R. FRICKE

LEHRBUCH DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG UND IHRER ANWENDUNGEN

I. BAND: DIFFERENTIALRECHNUNG

ZWEITE UND DRITTE AUFLAGE



VERLAG VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN

LEHRBUCH DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG UND IHRER ANWENDUNGEN

VON

DR. ROBERT FRICKE
GEH. HOFRAT UND PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER TECHN. HOCHSCHULE IN BRAUNSCHWEIG

ERSTER BAND: DIFFERENTIALRECHNUNG

ZWEITE UND DRITTE AUFLAGE

MIT 129 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN,
EINER SAMMLUNG VON 253 AUFGABEN
UND EINER FORMELTABELLE



VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1921

Vorwort zur ersten Auflage.

Bei der Herausgabe eines neuen Buches über Differential- und Integralrechnung hat der Verfasser nahezu die Empfindung, er müsse um Entschuldigung bitten, daß er die gewaltige Zahl der Bücher, welche die genannten Rechnungen behandeln, noch um eine Einheit vermehrt habe. Das Beste freilich wäre ja, wenn das Buch selbst seinem Verfasser die Entschuldigung abnähme. Aber „habent sua fata libelli", und die Schicksale eines Büchleins weiß man nicht voraus; darum mag auch der Verfasser zu Worte kommen.

Lange schon hegte ich den Plan zu einem Lehrbuche der Differential- und Integralrechnung; doch wurde seine Ausführung wiederholt durch andere Arbeiten zurückgedrängt. Das mag sein Gutes gehabt haben: Eine vieljährige eigene Erfahrung und eine bemerkenswerte Klärung der allgemeinen Ansichten über den Unterricht in der Differential- und Integralrechnung kann ich mir nun zunutze machen. In die früheste Jugend meiner Lehrtätigkeit an einer Technischen Hochschule vor fast einem Vierteljahrhundert fielen die heftigen Angriffe gegen die Mathematiker und ihre Wissenschaft an den Hochschulen; mit Heinrich Heine kann ich singen: „Es fiel ein Reif in der Frühlingsnacht." Doch es ist uns besser ergangen als Heines Liebespaar; wir sind nicht „verdorben, gestorben", wir haben uns vielmehr aus der damaligen gegen die Mathematiker, aber auch gegen die Mathematik gerichteten Bewegung das Gute, was sie barg, zu Nutz und Frommen unserer Ämter herausgeholt und haben die Bedeutung und Würde unserer Wissenschaft gegen die Übergriffe verteidigt.

In dem Bestreben, erhobene Vorwürfe zu entkräften, waren die Mathematiker wohl geneigt, ihren Lehrstoff stark zu beschneiden und ihrer Lehrform die gefürchtete wissenschaftliche Strenge zu nehmen. Beides war ein Übermaß des Entgegenkommens, und in beiden Hinsichten hat die rückläufige Bewegung nicht lange auf sich warten lassen. Es gab eine Zeit, wo ein Führer der gegen die Mathematik kämpfenden Liga sagen konnte: „Wenn die gelehrte, unfruchtbare Theorie sich zu kühnem Fluge erhebt, da fliegt sie der wirklichen Welt aus den Augen, hinauf über die Wolken zu Abel und Riemann, wo ... der spezielle

Begriff ‚Dimension' durch den allgemeinen Begriff ‚Mannigfaltigkeit' ersetzt wird und dann in einer Welt von vier . . . Mannigfaltigkeiten geturnt werden kann.“ Die Tatsachen selbst haben geantwortet: Nicht die Mathematiker, sondern die um die „wirkliche Welt“ allein bemühten Physiker haben es in ihrer „vierdimensionalen“ Raum-Zeitwelt zu höchst ansehnlichen „turnerischen“ Leistungen gebracht, denen der berühmte Verfasser des obigen Ausspruchs seine Bewunderung und Wertschätzung heute wohl kaum versagen wird. Aber so wahr Dubois-Reymonds Worte sind, „daß es kaum eine noch so weltabgelegene wissenschaftliche Untersuchung gebe, die nicht im Laufe der Zeit praktischer Anwendung fähig wäre“ (um Beispiele wären wir nicht verlegen), so wollen wir doch für den unmittelbaren Unterricht an den Technischen Hochschulen nur dasjenige aus der Mathematik verwerten, was schon jetzt im engsten Zusammenhang mit den technischen Wissenschaften steht. Das aber, und dies ist ein zweiter Punkt von grundsätzlicher Bedeutung, wollen wir in einer wissenschaftlich haltbaren Lehrform vermitteln. Stodola sagte auf dem Züricher Kongreß: „Gleiche Fähigkeiten vorausgesetzt, verleiht die wissenschaftliche Ausbildung dem Techniker rein durch Schärfung des kritischen Urteiles eine große Überlegenheit über den reinen Praktiker.“. . .

Man wird vielleicht behaupten, die seinerzeit geübte Kritik des mathematischen Hochschulunterrichtes treffe weniger das „Was“ als das „Wie“ dieses Unterrichtes: Es handele sich um die für den Techniker ungewohnte Form, in welcher das mathematische Gehirn die Probleme anzufassen und zu lösen gewohnt sei. Goethe hat einmal gesagt: „Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.“ Die abstrakte und allgemeine Gestalt, in welcher die mathematischen Schlüsse und Sätze auftreten, ist es, die dem Ingenieur unbequem erscheint. „Inde irae et lacrumae!“ Aber es ist eben die besondere Kraft und die Bedeutung des mathematischen Denkens, den allgemeinen Gedanken vor dem besonderen Beispiele zu betonen und zu entwickeln, und die Mathematik würde ihren Hauptcharakter verlieren, wenn sie sich in die Besprechung von Einzelbeispielen auflösen würde. Gauß schrieb einmal an Schumacher, „der Vorteil eines neuen Calculs sei der, daß, wenn ein solcher Calcul dem innersten Wesen vielfach vorkommender Bedürfnisse entspreche, jeder, der sich ihn ganz angeeignet habe, auch ohne die Inspirationen des Genies die dahin gehörigen Aufgaben lösen, ja selbst in so verwickelten Fällen gleichsam mechanisch lösen könne, wo ohne eine solche Hilfe auch das Genie ohnmächtig werde“. Perry fordert, der Ingenieur solle die Differentialrechnung mit derselben Leichtigkeit handhaben lernen, wie er in der Werkstatt lernt, mit

Meißel und Feile umzugehen. Wohlbemerkt die Differentialrechnung als solche, nicht dies oder jenes Beispiel aus der Differentialrechnung. In ihrer Allgemeinheit ruht die Hauptkraft der Mathematik und ihre Bedeutung für die Anwendungen. Der Ingenieur soll nicht bei jeder neuen Aufgabe, bei der er Differentialrechnung nötig hat, von neuem mit der Arbeit beginnen müssen, sondern soll die ihm hier zur Verfügung stehenden Hilfsmittel in ihrer Reinheit und Allgemeinheit ein für allemal erfaßt haben. In einer Festrede E. Kummers findet sich der Satz: „Die Araber verwendeten in der Mathematik ihr Nachdenken darauf, das Nachdenken entbehrlich zu machen.“ Möchten unsere Ingenieure in dieser Hinsicht nicht hinter den Arabern zurückbleiben!

Aus alledem folgt der Grundsatz: Wer die Differential- und Integralrechnung als ein Rüstzeug für vielfältige künftige Aufgaben erwerben will, muß zunächst diese Rechnung lernen! Aber nun verschiebt sich die Schwierigkeit. Der Ingenieur wird selbst zum Mathematiker und kann die Brücke nicht mehr schlagen zu seinen eigenen Gebieten. Perry sagt: „Gib seinen x’s und y’s eine physikalische Bedeutung oder schreibe statt dessen p’s und v’s, und was die leichteste Rechenaufgabe war, wird ein schwieriges Problem.“ Nur ein wechselseitiges Entgegenkommen der verschiedenen Lehrgebiete kann hier helfen. Die Mathematik wird sich auch hier gern in den Dienst der Gesamtaufgabe stellen. Es ist versucht worden, durch möglichst reichhaltige Beispiele aus den verschiedensten Gebieten in einer leider nur zu schnell wechselnden Gestalt dem Lernenden die Brauchbarkeit und Bedeutung der Mathematik für die Anwendungen nahe zu legen. Auch das beifällig aufgenommene Buch von Perry, „Höhere Mathematik für Ingenieure“, steht auf diesem Standpunkte. Aber die Vielfältigkeit der schnell wechselnden Anwendungen, von denen manche zumal im Anfange des Studiums dem Lernenden noch fern liegen mögen, hindert nur zu oft ein wirklich eindringendes Verständnis. Hier glaube ich den Charakter der vorliegenden Darstellung am deutlichsten kennzeichnen zu können. Ich habe, wo es irgend anging, die mathematischen Überlegungen „stetig und in möglichst breitem Strome“ in die Anwendungen hinüberfließen lassen. Die Anwendungen konnten auf diese Weise mit einer gewissen behaglichen Ausführlichkeit behandelt werden, und es wurde vermieden, den wehrlosen Leser auf weniger als zehn Seiten vom Trägheitsmoment des Rechtecks über die Festigkeit dicker Zylinder, das Indikatordiagramm einer Gasmaschine, die Elastizität von Flüssigkeiten, die Reibung eines Spurzapfens in die Probleme der Balkenbiegung zu zerren, wie dies Perry gelegentlich getan hat. Von früh an bildet das Kapitel der „geometrischen Anwendungen“ einen eisernen Bestand in den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Aber „die Mechanik“, sagt G. Kirchhoff, „ist mit der Geometrie nahe verwandt; beide Wissen-

schaften sind Anwendungen der reinen Mathematik; die Sätze beider stehen in bezug auf ihre Sicherheit genau auf gleicher Stufe". Die Untersuchung der Bewegungen eines Punktsystems, einer Ebene in sich, eines starren Körpers im Raume liefert nicht minder wertvolle Beispiele für die Differentialrechnung. Warum soll diesem Gegenstande nicht das gleiche Recht mit der Geometrie zuerkannt werden? Also findet der Leser im ersten Bande ein besonderes Kapitel über die Untersuchung der Bewegungen. Im zweiten Bande reiht sich entsprechend ein Kapitel über die Hauptanwendungen der Integralrechnung in der Physik an. Auch habe ich die für den Ingenieur wichtigsten mathematischen Apparate, Integraphen, Planimeter, Integratoren und Analysatoren, beschrieben und ihre Theorie aus den allgemeinen Sätzen der Integralrechnung hervorwachsen lassen. Auch bei diesen Apparaten handelt es sich um lehrreiche Beispiele für das, was oben über die Allgemeinheit der Mathematik gesagt wurde. Wer die Integralsätze von Gauß und Stokes in ihrer Allgemeinheit erfaßt hat, besitzt damit nicht nur das beste Verständnis für das Spiel des Polarplanimeters und der Integratoren, sondern er beherrscht zu gleicher Zeit bei anderer Deutung jener Sätze die Hauptbegriffe und Theoreme der Vektorenanalysis. Nur im Kapitel über die Differentialgleichungen folgen die Anwendungen in bunter wechselnder Fülle; aber das ließ sich nicht ändern.

Noch ein paar beiläufige Bemerkungen: Ich habe mich bemüht, dem „numerischen Rechnen" die ihm gebührende wichtige Stellung anzuweisen; insbesondere die Einleitung wird hierfür zeugen. Was aus der analytischen Geometrie benutzt wird, findet der Leser in meinem Büchlein „Analytische Geometrie" aus der Sammlung „Teubners Leitfäden für den mathematischen und technischen Hochschulunterricht". Hinweise auf dies Buch wird der Leser vielfach antreffen. Gern hätte ich mich auf eine Darstellung entsprechender Kürze über die „Determinantentheorie" bezogen. Nur ganz beiläufig sind einmal gegen Ende des zweiten Bandes ein paar Formeln mit Hilfe von Determinanten in ihre einfachsten Gestalten gekleidet. Auch sonst hätte hie und da die Darstellung bei Gebrauch von Determinanten ein wenig gekürzt werden können. Ein besonderes Kapitel über Determinantentheorie in das Buch aufzunehmen, hat mir wegen der Fremdartigkeit des Gegenstandes widerstrebt. Ich bin immer noch nicht ganz überzeugt, daß der neuzeitliche Brauch, alles, was die Technische Hochschule über die Elemente der Mathematik Hinausgehendes nötig hat, in einen Topf zu werfen, dem man die Etikette „Höhere Mathematik I, II, III" aufklebt, „sachlich" völlig einwandfrei ist. Die dem Buche eingefügte Aufgabensammlung empfehle ich aufs angelegentlichste der Beachtung des Lesers. Nur durch sorgsame Bearbeitung des hier gebotenen Stoffes wird er zur Selbständigkeit ge-

langen, werden ihm die Differentiale und Integrale zu brauchbaren Werkzeugen wie „Meißel und Feile in der Werkstatt". Es muß dabei dem richtigen Takte des Lesers überlassen bleiben, inwieweit er seinen Fähigkeiten entsprechend von den überall beigefügten Lösungen Gebrauch machen will. Sollte es dem Leser dabei begegnen, daß er nach mühsamer Rechnung zu einem Ergebnis gelangt, das die im Buche angegebene Behandlung vielleicht in wenig Zeilen erreicht, so soll er sich dadurch keineswegs entmutigt fühlen; denn nur auf dem Wege solcher eigener Erfahrungen lernt er den Satz kennen und schätzen, daß die wahre Mathematik nicht dazu da ist, um möglichst „viel", sondern um möglichst „wenig" zu rechnen!

Übrigens will ich mich noch ausdrücklich gegen den Verdacht verwahren, daß ich etwa alles, was im vorliegenden Buche steht, auch unverändert und im vollen Umfange in der Vorlesung brächte. Die Zeiten, wo Vorlesungen wirklich „Vorlesungen" (aus Büchern) waren, liegen in grauer Vergangenheit. Heute ist eine Vorlesung kein Lehrbuch und ein Lehrbuch keine Vorlesung. Beide verfolgen ihren Bildungszweck auf ihre Art und mit den ihnen eigentümlichen Hilfsmitteln. Die Vorlesung ist in erster Linie das Mittel der Führung für alle, die sich führen lassen wollen, auch für die Schwächeren; das Lehrbuch gibt die Sicherung, die Ergänzung, die Vertiefung. Es mag an einer Universität günstiger liegen, an einer Technischen Hochschule aber muß man der mittleren Beschaffenheit des Zuhörerkreises Rechnung tragen. Da ist in der Vorlesung weit ausführlicheres Verweilen bei den Grundbegriffen als im Lehrbuche erforderlich, bis der Vortragende die Überzeugung gewinnt, weitergehen zu dürfen. Auch erscheint es am Platze, manchem Gegenstande zunächst eine Gestalt zu geben, die wissenschaftlich nicht einwandfrei sein mag, und die durch spätere Ergänzungen sichergestellt wird. Manches auch, was für die Auffassung des Wesentlichen nicht dringend erforderlich ist, mag fortbleiben; manche Ausführung an Beispielen und in Aufgaben kann schon wegen der beschränkten Zeit der Übungsstunden nicht gegeben werden. Um so wichtiger ist dann eben der Daseinszweck des Lehrbuches, das, ohne ein Abklatsch der Vorlesung zu sein, der mittleren Fassungskraft ein sicheres Hilfsmittel der Wiederholung ist, und das zugleich den Begabten auf eine höhere Stufe der Erkenntnis zu heben vermag. . . .

Bad Harzburg, den 22. Mai 1918.

Robert Fricke.

Vorwort zur zweiten und dritten Auflage.

In verhältnismäßig kurzer Zeit ist die erste Auflage des vorliegenden Lehrbuches vergriffen. Es war ursprünglich meine Absicht, für eine etwaige Neuauflage im Unterrichte selbst Erfahrungen für Besserungen zu sammeln. Bei der Kürze der Zeit seit Erscheinen der ersten Auflage war dies indessen unmöglich. Auch waren die beiden letzten Jahre hierfür wenig günstig. Die stark gekürzten Semester und die wiederholt eingeschalteten Zwischensemester machten es nötig, die Vorlesungen so knapp und elementar zu gestalten, wie es eben zulässig sein konnte. Die Änderungen beziehen sich demnach nur auf stilistische Besserungen und auf die Ausmerzung einer Reihe untergeordneter Versehen in der ersten Auflage. Der rasche Absatz des Buches dürfte ja auch für seine Brauchbarkeit in der vorliegenden Gestalt sprechen. Möge es auch in dieser Form die erfreulicherweise überall einsetzende Bewegung zur Vertiefung des mathematischen Unterrichts wenigstens für einen Teil der Studierenden der Technik kräftig fördern sowie auch im Bereiche der Universitäten zu seinen alten Freunden sich neue erwerben!

Braunschweig, den 17. Oktober 1920.

Robert Fricke.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung. Zahlen, Variable und Funktionen.

Seite

1. Das System der reellen Zahlen und die Zahlenlinie 1
2. Der Begriff der Grenze einer Zahlenreihe 4
3. Beispiele monotoner Zahlenreihen 7
4. Der Begriff der stetigen Variablen 12
5. Der Begriff der Funktion 15
6. Die Stetigkeit der Funktionen 17
7. Folgerungen aus der Stetigkeit der Funktionen 19
8. Geometrische Deutungen und Ausführungen 21
9. Die Funktionen x^n und ihre inversen Funktionen $\sqrt[n]{x}$ 26
10. Inhaltsberechnungen bei der gleichseitigen Hyperbel 31
11. Additionstheorem für die Inhaltsfunktion $f(x)$ bei der gleichseitigen Hyperbel 35
12. Die natürliche Exponentialfunktion e^x und der natürliche Logarithmus $\ln x$ 37
13. Der Logarithmus ${}^b\log x$ und die Exponentialfunktion b^x 39
14. Mechanische und graphische Rechenmethoden mittelst der Logarithmen . 42
15. Die Messung der Kreisbogen, der Kreissektoren und der Winkel 47
16. Die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ 51
17. Die Additionstheoreme der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ 56
18. Die zyklometrischen Funktionen $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ und $\operatorname{arc\,cotg} x$ 59
19. Die hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Cos}\, x$, $\mathfrak{Tg}\, x$ und $\mathfrak{Cotg}\, x$ 64
20. Die Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Ar\,Sin}\, x$, $\mathfrak{Ar\,Cos}\, x$, $\mathfrak{Ar\,Tg}\, x$ und $\mathfrak{Ar\,Cotg}\, x$ 70
21. Die ganzen rationalen Funktionen 72
22. Faktorenzerlegung der ganzen rationalen Funktionen 74
23. Die gebrochenen rationalen Funktionen 77
24. Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen 78
25. Die elementaren algebraischen Funktionen 82
26. Die elementaren transzendenten Funktionen 84
27. Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen 89

Abschnitt I.

Grundlagen der Differentialrechnung.

Kapitel I. Die Differentiation der Funktionen einer Variablen.

1. Der Begriff der abgeleiteten Funktion 94
2. Geometrische und physikalische Deutungen der abgeleiteten Funktion . . 97
3. Die Differentiale und der Differentialquotient 101

Seite

4. Die Bogenlänge und das Bogendifferential einer Kurve 104
5. Beziehung zwischen den Ableitungen inverser Funktionen 107
6. Differentiation von Aggregaten und von Vielfachen einer Funktion . . . 112
7. Differentiation von Produkten und Quotienten 116
8. Differentiation zusammengesetzter Funktionen 121
9. Der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz 127
10. Die Monotonie der Funktionen mit Ausführungen für die rationalen Funktionen 130

Kapitel II. **Wiederholte Differentiation der Funktionen einer Variablen.**

1. Die abgeleiteten Funktionen höherer Ordnung 132
2. Die n^{te} Ableitung des Produktes zweier Funktionen 135
3. Die Differenzenquotienten höherer Ordnung und ihre Grenzwerte 138
4. Die Differentiale und die Differentialquotienten höherer Ordnung 142

Kapitel III. **Differentiation der Funktionen mehrerer Variablen.**

1. Die Ableitungen und Differentiale erster Ordnung der Funktionen mehrerer Veränderlichen 144
2. Geometrische Deutung der Ableitungen und Differentiale einer Funktion $f(x, y)$ 149
3. Differentiation zusammengesetzter und unentwickelter Funktionen . . . 152
4. Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung 156
5. Die totalen Differentiale höherer Ordnung 160

Abschnitt II.

Methoden der Berechnung der Funktionen.

Kapitel I. **Näherungsdarstellungen mittelst ganzer Funktionen.**

1. Interpolation mittelst ganzer Funktionen 163
2. Die Lehrsätze von Taylor und Mac Laurin 166
3. Berechnung der Basis e der natürlichen Logarithmen 169
4. Berechnung der trigonometrischen Funktionen 171
5. Berechnung der Logarithmen 173
6. Näherungsmethoden bei der Lösung von Gleichungen 180
7. Die Nullpunkte und die Unendlichkeitspunkte der Funktionen 184
8. Unbestimmte Formen bei Funktionen $f(x)$ 189
9. Der Taylorsche Lehrsatz für die Funktionen mehrerer Variablen 195

Kapitel II. **Konvergenz der unendlichen Reihen.**

1. Begriffe der Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen 198
2. Absolute und unbedingte Konvergenz einer unendlichen Reihe 201
3. Addition, Subtraktion und Multiplikation unendlicher Reihen 206
4. Hinreichende Kennzeichen der Konvergenz und der Divergenz 209
5. Gleichmäßige Konvergenz einer unendlichen Reihe von Funktionen . . . 212
6. Haupteigenschaften der Potenzreihen 213

Seite
7. Differentiation der Potenzreihen 217
8. Die Reihen von Mac Laurin und Taylor 221
9. Ausführungen an Beispielen. 223
10. Die Binomialreihe mit numerischen Anwendungen 225
11. Reihenentwicklungen der Funktionen arc tg x, arc sin x, 𝔄𝔯 𝔗𝔤 x, 𝔄𝔯 𝔖𝔦𝔫 x 229

Kapitel III. **Berechnung der Extremwerte der Funktionen.**

1. Die Extremwerte der Funktionen $f(x)$ einer Variablen 232
2. Beispiele zur Bestimmung der Extremwerte von Funktionen $f(x)$ 236
3. Aufgaben zur Bestimmung der Extremwerte von Funktionen $f(x)$. . . . 243
4. Die Extremwerte der Funktionen mehrerer Variablen 247
5. Beispiele zur Bestimmung der Extremwerte von Funktionen mehrerer Variablen 251
6. Aufgaben zur Bestimmung der Extremwerte der Funktionen mehrerer Variablen 255
7. Extremwerte der Funktionen bei Gültigkeit von Nebenbedingungen . . 257
8. Beispiele von Extremwerten der Funktionen bei Gültigkeit von Nebenbedingungen. 260
9. Aufgaben über Extremwerte von Funktionen bei Gültigkeit von Nebenbedingungen. 264

Abschnitt III.

Anwendungen der Differentialrechnung.

Kapitel I. **Untersuchung der ebenen Kurven.**

1. Ebene Kurven und ihre Darstellung durch Gleichungen 266
2. Untersuchung der Tangenten der ebenen Kurven bei rechtwinkligen Koordinaten 275
3. Untersuchung der Tangenten der ebenen Kurven bei Polarkoordinaten . 281
4. Konkavität, Konvexität und Wendepunkte der Kurven. 287
5. Die Krümmung der ebenen Kurven 292
6. Die Evoluten und Evolventen 299
7. Aufgaben über Evoluten und Evolventen. 304
8. Singuläre Punkte ebener Kurven 307

Kapitel II. **Untersuchung der Flächen und Kurven im Raume.**

1. Darstellung der Flächen und Kurven im Raume durch Gleichungen . . 310
2. Tangentialebenen, Tangenten, Normalen und Normalebenen bei Flächen und Kurven 314
3. Beispiele über Tangentialebenen, Tangenten, Normalen und Normalebenen bei Flächen und Kurven 318
4. Gestalt einer Raumkurve in der Umgebung eines ihrer Punkte 321
5. Die Krümmung der Raumkurven 327
6. Aufgaben über Krümmung der Raumkurven 333
7. Die Krümmung der Flächen 335

Seite

8. Die Indikatrix eines Flächenpunktes. Bezugnahme auf frühere Entwicklungen 343
9. Aufgaben über die Krümmung der Flächen 345
10. Ebene Kurvenscharen und Hüllkurven 348
11. Aufgaben über Kurvenscharen und Hüllkurven 351

Kapitel III. **Untersuchung der Bewegungen.**

1. Bewegung eines einzelnen Punktes 354
2. Aufgaben über die Bewegung eines einzelnen Punktes 357
3. Ebene Bewegung eines starren Körpers 361
4. Beschleunigungen bei der ebenen Bewegung 365
5. Untersuchung der Konchoidenbewegung 369
6. Aufgaben über ebene Bewegungen 372
7. Drehungen eines starren Körpers um einen Punkt 376
8. Bewegung eines starren Körpers im Raume 382

Einleitung. Zahlen, Variable und Funktionen.

1. Das System der reellen Zahlen und die Zahlenlinie. Der erste Zahlbegriff, d. h. der Begriff der „*Anzahl*“ (ganzen positiven Zahl), ist mehreren Erweiterungen zu unterziehen, ehe er zur Grundlage der folgenden Entwicklungen geeignet ist. Bereits unter den vier „Grundrechnungen“, den sogenannten „rationalen“ („vernünftigen“) Rechnungen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, sind es die beiden „indirekten“ Rechnungsarten der Subtraktion und Division, welche je eine Erweiterung des Zahlbegriffs bewirken. Die Subtraktion fügt den „Anzahlen“ die Zahl 0 und die negativen ganzen Zahlen an, die Division reiht dem so erweiterten Zahlensystem die gesamten rationalen (positiven und negativen) Brüche an. Diese und die bisherigen ganzen Zahlen setzen das Gesamtsystem der „*rationalen Zahlen*“ zusammen. Im System dieser rationalen Zahlen ist dann jede rationale Rechnung in dem Sinne „ausführbar“, daß sie, angewandt auf irgend zwei Zahlen des Systems, wieder eine bestimmte Zahl des Systems als Ergebnis liefert; ausgenommen ist dabei nur die Division durch 0.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß wir die rationalen Zahlen samt den an ihnen auszuübenden rationalen Rechnungen mit einem „geometrischen Bilde“ versehen können, und zwar in folgender Weise: Auf einer beiderseits unbegrenzten geraden Linie wählen wir willkürlich einen ersten Punkt O sowie für weiterhin vorzunehmende Längenmessungen eine Längeneinheit, etwa 1 cm. Der bequemen Sprechweise halber denken wir die Gerade parallel zu den Zeilen des vorliegenden Textes; wir können dann von O aus eine rechte und eine linke Seite der Geraden unterscheiden. Ist nun a eine beliebige rationale Zahl, die > 0 ist, so gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt P der Geraden auf der rechten Seite von O, dessen Entfernung von O, in der gewählten Längeneinheit gemessen, gleich a ist; wir nennen diesen Punkt P den „*Bildpunkt*“ der Zahl a. Ist aber a eine beliebige rationale Zahl, die < 0 ist, so sei der Bildpunkt P dieser Zahl a der eindeutig bestimmte Punkt der Geraden links von O, welcher die Entfernung $-a$ von O hat. O selbst aber wählen wir als Bildpunkt der Zahl 0.

Weiter kann man jede rationale Rechnung, angewandt auf zwei rationale Zahlen, durch eine einfache *geometrische Konstruktion*, ange-

wandt auf die Bildpunkte jener Zahlen, ersetzen. Ergibt z. B. die Multiplikation der rationalen Zahlen a und b die gleichfalls rationale Zahl c, so schreiben wir die Gleichung $a \cdot b = c$ in die Gestalt $1 : a = b : c$ um und können die Auffindung des Bildpunktes c durch Konstruktion der vierten Proportionalen zu drei Strecken leisten.

Wählen wir einen von O verschiedenen Punkt Q auf der rechten Seite unserer Geraden aus, und zwar so nahe bei O, als wir irgend wollen, so ist einleuchtend, daß wir „nach getroffener Wahl von Q“ eine Anzahl n derart angeben können, daß der Bildpunkt der rationalen Zahl $\frac{1}{n}$ zwischen O und Q liegt. Man veranschauliche sich nun die Lage der Bildpunkte aller rationalen Zahlen $\cdots, \frac{-2}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots$ auf der Geraden und wird folgenden Satz als einleuchtend anerkennen: An welche Stelle der Geraden man auch die Strecke OQ verschieben mag, stets wird doch mindestens einer der Bildpunkte jener rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$ in der Strecke zu finden sein. Wie nahe man also auch zwei voneinander verschiedene Punkte der Geraden wählen mag, sie werden niemals eine Strecke dieser Geraden eingrenzen können, welche von Bildpunkten der rationalen Zahlen frei wäre. Man sagt demnach, daß die Bildpunkte der rationalen Zahlen die Gerade *„überall dicht“* bedecken.

Es ist nun andererseits leicht zu zeigen, daß keineswegs jeder Punkt unserer Geraden Bildpunkt einer rationalen Zahl ist. Zeichnet man z. B. die Diagonale des Quadrates, welches die Längeneinheit zur Seite hat, so zeigt eine bekannte Überlegung, daß die Länge dieser Diagonale in der Längeneinheit nicht durch eine rationale Zahl gemessen werden kann. Trägt man also die Diagonale von O aus nach rechts als Strecke OP auf unserer Geraden ab, so kann der Endpunkt dieser Strecke nicht Bildpunkt einer rationalen Zahl sein. Auch wenn wir diese Strecke in eine Anzahl, etwa in n gleiche Teile teilen, kann z. B. der am Punkte O nächst gelegene Teilpunkt nicht Bildpunkt einer rationalen Zahl sein. Wenn wir demnach wie oben auf unserer Geraden rechts neben O in beliebiger Nähe von O einen von diesem Punkte verschiedenen Punkt Q wählen, so sind wir sicher, daß innerhalb der Strecke OQ nicht alle Punkte Bildpunkte rationaler Zahlen sind; denn wir können z. B. die eben benutzte Anzahl n so groß wählen, daß jener am Punkte O nächst gelegene Teilpunkt der Strecke OQ angehört. Indem wir aber diese Strecke OQ mit dem fraglichen Teilpunkte auf der Geraden so verschieben, daß O nach einem beliebig vorgeschriebenen Bildpunkte einer rationalen Zahl zu liegen kommt, erkennen wir, daß überhaupt zwischen jedem Bildpunkte einer rationalen Zahl und einem beliebig nahe rechts neben ihm gelegenen Punkte stets ein Punkt nachweisbar ist, der nicht Bildpunkt einer ratio-

nalen Zahl ist. Insbesondere folgt hieraus weiter, daß, wie nahe aneinander liegend wir auch zwei verschiedene Bildpunkte rationaler Zahlen wählen mögen, niemals die zwischen ihnen gelegenen Punkte sämtlich Bildpunkte rationaler Zahlen sind.

Obschon demnach die Bildpunkte der rationalen Zahlen, sagen wir kurz die „*rationalen Punkte*", unsere Gerade überall dicht bedecken, besteht zwischen dem „System der rationalen Punkte" und dem „System aller Punkte der Geraden" ein grundsätzlicher Unterschied: „*Stets*" gehören *alle* zwischen irgend zwei Punkten des zweiten Systems gelegenen Punkte der Geraden dem zweiten Systeme, d. h. dem System aller Geradenpunkte, an; „*nie*" gehören *alle* zwischen irgend zwei Punkten des ersten Systems gelegene Punkte der Geraden dem ersten Systeme, d. h. dem System aller rationalen Punkte, an. Es ist dies eine Grundtatsache, die der Vorstellung der Geraden und dem Begriffe der Zahl anhaftet; und es bleibt uns nur übrig, zu ihrer Charakterisierung ein Wort einzuführen: Wir nennen das System aller Punkte der Geraden ein „*Kontinuum*", und wir sprechen diesem System die Eigenschaft der „*Stetigkeit*" zu, wogegen das System der rationalen Punkte diese Eigenschaft der Stetigkeit nicht oder, besser gesagt „nirgends" besitzt.

Es ist nun sehr bekannt, daß man das System der rationalen Zahlen durch Hinzunahme neuer Zahlen, die man freilich mit Unrecht „*irrationale*" („unvernünftige" oder „vernunftwidrige") nennt, in der Weise ergänzt, daß die Zahlen des damit vervollständigten Systems aller rationalen und irrationalen Zahlen gerade genau eindeutig den *gesamten* Punkten der Geraden entsprechen, die wir dann fortan als die „*Zahlenlinie*" bezeichnen wollen. Die Größenverhältnisse dieser Zahlen regeln sich nach der Lage ihrer Bildpunkte auf der Zahlenlinie. Die rationalen Rechnungen können wir aber zunächst dadurch auch für die irrationalen Zahlen erklären, daß wir die entsprechenden geometrischen Konstruktionen, die wir oben auf die Bildpunkte der rationalen Zahlen, die „*rationalen Punkte*" der Zahlenlinie, ausgeübt dachten, auch auf die „*irrationalen Punkte*", d. h. die übrigen Punkte der Geraden, beziehen[1]).

Die gesamten rationalen und irrationalen Zahlen setzen dasjenige Zahlensystem zusammen, welches dem größten Teile der weiteren Entwicklungen zugrunde liegt, und welches wir im Gegensatze zu den imaginären und komplexen Zahlen als das „*System der reellen Zahlen*" bezeichnen. Wie den Punkten der Zahlenlinie sprechen wir dem System der reellen Zahlen die Eigenschaft der „*Stetigkeit*" zu, durch welche sich dieses Zahlensystem z. B. von dem System aller rationalen Zahlen, wie wir sahen, wesentlich unterscheidet.

---

1) Über eine arithmetische Erklärung der Zahlen s. § 2.

2. Der Begriff der Grenze einer Zahlenreihe. Unter den Hilfsmitteln, welche man zu einer *arithmetischen* Erklärung der irrationalen Zahlen besitzt, ist dasjenige der „Dezimalbrüche“ das bekannteste. Wenn auch die Dezimalbrüche schon früh in den Elementen der Mathematik betrachtet werden, so führt uns doch die Erklärung der dabei vorliegenden Verhältnisse bereits zu demjenigen Begriffe, welcher die ganze Differential- und Integralrechnung beherrscht, nämlich zum Begriff der *„Grenze einer Zahlenreihe“*.

Ist P irgendein irrationaler Punkt der Zahlenlinie, so gibt es eine bestimmte größte ganze Zahl a_0, deren Bildpunkt dem Punkte P zur Linken am nächsten liegt. Bezeichnen wir den Bildpunkt der Zahl a_0 kurz selbst als den „Punkt a_0“, so liegt P zwischen den Punkten a_0 und (a_0+1). Unter den zehn rationalen Punkten $a_0, a_0+\frac{1}{10}, a_0+\frac{2}{10}, \cdots, a_0+\frac{9}{10}$, von denen keiner mit dem „irrationalen“ Punkte P identisch ist, gibt es wieder einen bestimmten, der dem Punkte P zur Linken am nächsten liegt. Ist dies der Punkt $a_1 = a_0 + \frac{\nu_1}{10}$, so ist P zwischen den beiden Punkten a_1 und $(a_1+\frac{1}{10})$ gelegen, so daß der Abstand dieses Punktes a_1 von P sicher $< \frac{1}{10}$ ist. Unter den zehn weiteren rationalen Punkten a_1, $a_1+\frac{1}{100}, a_1+\frac{2}{100}, \cdots, a_1+\frac{9}{100}$ gibt es wieder einen, etwa $a_2 = a_1 + \frac{\nu_2}{100}$, der dem Punkte P zur Linken am nächsten liegt, wobei dann der Abstand des Punktes a_2 von P sicher $< \frac{1}{100}$ ist. So fortfahrend erhalten wir eine völlig bestimmte, nicht abbrechende Reihe rationaler Zahlen in Gestalt der Dezimalbrüche:

$$(1) \quad a_0; \quad a_1 = a_0, \nu_1; \quad a_2 = a_0, \nu_1\nu_2; \quad a_3 = a_0, \nu_1\nu_2\nu_3; \cdots.$$

Jede Zahl a_n dieser Reihe ist zwar kleiner als die zu P gehörende irrationale Zahl; aber wir können doch diese irrationale Zahl mit jedem vorgeschriebenen Grade der Genauigkeit angenähert durch Zahlen der Reihe (1) darstellen, da der Abstand des Punktes a_m, sowie der jedes weiter folgenden Punktes $a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots$ vom Punkte P sicher $< \frac{1}{10^m}$ ist.

Aber die Reihe (1) leistet nicht nur eine angenäherte Berechnung der zum Punkte P gehörenden irrationalen Zahl: *Vielmehr erscheint diese Zahl durch die Reihe* (1) *geradezu eindeutig bestimmt, und zwar als „Grenze“ der Reihe* (1). Wir wollen die hierbei in Betracht kommenden Überlegungen zur Vermeidung von Wiederholungen sogleich in allgemeiner Gestalt ausführen.

Eine als „Maß der Annäherung“ zu benutzende Zahl soll weiterhin durch δ bezeichnet werden; die Zahl δ soll demnach in jedem Falle > 0 sein, mag übrigens aber „beliebig klein“ gewählt sein. Wir nennen ferner, wenn a eine negative Zahl ist, die ihr „entgegengesetzte“ Zahl $-a$ ihren

„absoluten Betrag“ und bezeichnen denselben durch das Symbol $|a|$; für eine positive Zahl a, sowie auch für die Zahl 0, setzen wir den wieder durch $|a|$ zu bezeichnenden absoluten Betrag gleich a selbst.

Es sei nun eine nicht abbrechende Reihe bestimmter reeller Zahlen:

$$(2) \qquad a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

gegeben; dann gilt folgender Satz: *Wenn nach Auswahl einer „beliebig kleinen Zahl δ immer eine Anzahl m derart angebbar ist, daß:*

$$(3) \qquad |a_{n+k} - a_n| < \delta$$

für „alle“ der Bedingung $n \geqq m$ genügenden Anzahlen n und für „alle“ Anzahlen k erfüllt ist, so gibt es eine und nur eine als „Grenze“ („Limes“) der Reihe (2) *zu benennende und durch das Symbol* $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ *zu bezeichnende Zahl* $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$, *für welche folgende Tatsache zutrifft: Nach erneuter Auswahl einer „beliebig kleinen“ Zahl δ' kann man stets einen Index m' derart angeben, daß für alle der Bedingung $n \geqq m'$ genügenden Indizes die Ungleichung $|g - a_n| < \delta'$ zutrifft.*

Gibt es eine Zahl der Reihe, etwa a_m, von der an alle weiter folgenden Zahlen gleich sind, $a_m = a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots$, so ist der Satz selbstverständlich. Die Bedingung (3) ist für dieses m stets erfüllt, und es ist einleuchtend, daß $g = a_m$ die eindeutig bestimmte Grenze der Reihe (2) ist. Indem wir also diesen Fall als elementar ausschließen, nehmen wir weiterhin an, *daß in der Reihe* (2) *unbegrenzt viele verschiedene Zahlen vorkommen.*

Unter Gebrauch einer geometrischen Sprechweise überlege man nun, wie die unbegrenzt vielen verschiedenen Bildpunkte, die den unterschiedenen Zahlen der Reihe (2) entsprechen, auf der Zahlenlinie liegen mögen. Ist a ein beliebiger Punkt der Zahlenlinie, so nennen wir das von den beiden Punkten $(a - \delta)$ und $(a + \delta)$ eingegrenzte Intervall, dem auch die beiden Endpunkte $(a \pm \delta)$ als angehörig angesehen werden mögen, eine „Umgebung“ des Punktes a. Finden sich in „jeder“ Umgebung des Punktes a, wie klein auch δ gewählt sein mag, unendlich viele verschiedene Punkte (2), so nennen wir a eine „Häufungsstelle“ des Systems der Punkte (2). Unser nächstes Ziel ist, zu zeigen, daß dieses System zufolge der an die Ungleichung (3) geknüpften Voraussetzung *eine und nur eine Häufungsstelle* besitzt.

Zunächst nehmen wir einmal $\delta = 1$ und denken die zugehörige, der Ungleichung (3) zugrunde liegende Anzahl m bestimmt. Dann werden eben zufolge dieser Ungleichung die unbegrenzt vielen verschiedenen Punkte $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ alle in dem durch die Punkte $(a_m \pm 1)$ ein-

gegrenzten Intervalle liegen. Von irgendeiner Zahl c muß nun notwendig eine der beiden folgenden, sich ausschließenden Aussagen zutreffen[1]): Entweder gibt es nur eine „endliche" Anzahl[2]) verschiedener Zahlen der Reihe (2), die $> c$ sind, oder es gibt „unbegrenzt viele" solche Zahlen. Im ersten Falle wollen wir c als eine Zahl β bezeichnen, im zweiten als eine Zahl α. Es ist einleuchtend, daß „alle" Zahlen, die größer als eine schon gefundene Zahl β sind, wieder Zahlen β sein müssen, sowie, daß „alle" Zahlen, die kleiner als eine schon gefundene Zahl α sind, gleichfalls Zahlen α darstellen; auch ist offenbar jede Zahl α kleiner als jede Zahl β. Es liegt hier also, da „jede" Zahl c entweder eine Zahl α oder eine Zahl β ist, eine Zerlegung des ganzen Zahlenkontinuums in zwei Kontinua, die wir entsprechend A und B nennen wollen, vor; oder (um es geometrisch auszusprechen) es liegt eine Zerlegung der ganzen Zahlenlinie in zwei Teile A und B vor, von denen A ganz links von B liegt, und die zusammen die ganze Zahlenlinie gerade erschöpfen. Dabei gehört $(a_m - 1)$ dem Teile A und $(a_m + 1)$ dem Teile B an. Derjenige Punkt a, in dem beide Teile zusammenstoßen, und der entweder dem Teile A oder dem Teile B angehört, liegt also zwischen $(a_m - 1)$ und $(a_m + 1)$. *Dieser Punkt a ist nun in der Tat eine Häufungsstelle des Punktsystems* (2). Wie klein wir nämlich auch δ wählen mögen, es ist immer $(a - \delta)$ eine Zahl α und $(a + \delta)$ eine Zahl β, so daß in „jeder" Umgebung von a unendlich viele verschiedene Punkte des Systems (2) liegen.

Es läßt ferner leicht zeigen, *daß keine zweite von a verschiedene Häufungsstelle a' unseres Punktsystems* (2) *existiert.* Zu jedem δ gehört ja ein die Ungleichung (3) begründender Index m und damit ein durch die beiden Punkte $(a_m \pm \delta)$ eingegrenztes Intervall, dem alle Punkte a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ... angehören. Für jedes δ können wir also ein Intervall der Länge 2δ angeben, außerhalb dessen nur endlich viele Punkte (2) liegen, und welchem demnach notwendig jede Häufungsstelle des Punktsystems als Innenpunkt oder doch wenigstens als Endpunkt angehören muß. Nimmt man nun noch eine von a verschiedene Häufungsstelle a' an, so wähle man irgendein der Bedingung $\delta < \frac{1}{2}|a - a'|$ genügendes δ. Dann gibt es überhaupt kein Intervall der Länge 2δ, dem a und a' zugleich angehören, so daß sich aus der Annahme der zweiten Stelle a' ein Widerspruch ergibt.

Wir haben nun in der Zahl a die Grenze $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$, deren Existenz wir nachweisen wollten, tatsächlich gewonnen. Wählen wir also ein beliebig kleines δ', so muß stets ein Index m derart angebbar sein, daß $|g - a_n| < \delta'$

1) Die folgende Schlußweise ist von Dedekind zur Erklärung der irrationalen Zahlen in der Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (Braunschw. 1872) ausgebildet.
2) Die Zahl 0 ist hier zu den „Anzahlen" als zugehörig angesehen.

für alle $n \geqq m$ zutrifft. Man wähle nämlich eine neue Zahl δ, die $< \delta'$ ist, und setze:

$$(4) \qquad \delta' - \delta = \delta''.$$

Zu δ gehört ein Index m, so daß für jedes $n \geqq m$ und beliebiges k die Bedingung (3) gilt, die wir auch in die Form:

$$(5) \qquad a_{n+k} - \delta < a_n < a_{n+k} + \delta$$

kleiden können. Nun gibt es, da $g = a$ die betrachtete Häufungsstelle ist, in der durch $(g \pm \delta'')$ eingegrenzten Umgebung von g unbegrenzt viele Punkte der Reihe (2), also auch nach Fortnahme der n ersten a_0, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ noch unbegrenzt viele. Wählen wir einen derselben als Punkt a_{n+k}, so gilt also:

$$g - \delta'' < a_{n+k} < g + \delta''.$$

Durch Addition dieser Ungleichungen zu (5) folgt mit Benutzung von (4)

$$(6) \qquad g - \delta' < a_n < g + \delta'$$

und also $|g - a_n| < \delta'$ für jedes $n \geqq m$, wie wir beweisen wollten.

Ist endlich a' eine von g verschiedene Zahl, so wähle man eine der Ungleichung $\delta' < \frac{1}{2}|g - a'|$ genügende Zahl δ' und bestimme eine zugehörige Zahl m im Sinne der Ungleichung (6). Außerhalb des durch die Punkte $(g \pm \delta')$ eingegrenzten Intervalls können dann höchstens die m Punkte $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ liegen. Da aber das durch die Punkte $(a' \pm \delta')$ eingegrenzte Intervall gänzlich außerhalb des eben zuvor genannten Intervalls liegt, so können zwischen den Punkten $(a' \pm \delta')$ eben auch höchstens m Punkte (2) liegen. Keine von g verschiedene Zahl kann hiernach den Charakter einer Grenze der Reihe (2) haben, *so daß* $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$ *in Übereinstimmung mit unserer Behauptung eindeutig bestimmt ist.*

3. Beispiele monotoner Zahlenreihen. Vielfach hat man mit Zahlenreihen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zu tun, bei denen jede Zahl größer ist als die voraufgehende:

$$(1) \qquad a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$$

oder auch mit solchen, bei denen $a_{n+1} < a_n$ für jedes n gilt. Zahlenreihen dieser Art bezeichnen wir als „*monoton*" und unterscheiden die beiden eben genannten Fälle als monotone Reihen „wachsender" bzw. „abnehmender" Zahlen.

Für eine monotone Reihe wachsender Zahlen trifft eine der beiden folgenden, sich ausschließenden Aussagen zu: Entweder ist eine Zahl h angebbar, die größer ist als jede Zahl a_n, oder es gibt keine solche Zahl h. Wählen wir im letzteren Falle eine Zahl ω „beliebig" groß, so gibt es immer noch einen Index m derart, daß $a_m > \omega$ und also auch $a_{m+1} > \omega$,

$a_{m+2} > \omega, \ldots$ gilt. *Wir sagen dann, die Reihe habe die Grenze* ∞, *und drücken dies kurz durch die Gleichung* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$ *aus.*

Im ersten Falle aber gilt der häufig zu verwendende Satz: *Eine monotone Reihe wachsender Zahlen hat eine bestimmte endliche Grenze* $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$, *falls sich eine Zahl h angeben läßt, die größer als jedes* a_n *ist.* Der Beweis dieses Satzes gelingt leicht durch die schon in § 2 benutzten Überlegungen, die wir der Übung halber hier nochmals wiederholen. Von einer beliebigen Zahl c gilt notwendig eine der beiden folgenden, sich ausschließenden Aussagen: Entweder kann man eine Zahl a_n angeben, die $> c$ ist, und dann gilt natürlich auch $a_{n+1} > c$, $a_{n+2} > c, \ldots$, oder es gibt keine Zahl a_n, die $> c$ ist. Im ersten Falle nennen wir c eine Zahl α, im zweiten eine Zahl β. Sicher ist dann wieder, daß jede Zahl, die kleiner als eine schon gefundene Zahl α ist, wieder eine Zahl α liefert, und daß jede Zahl, die größer als ein schon festgestelltes β ist, zu den Zahlen β gehört; auch ist jedes α kleiner als jedes β. Wir finden demnach durch wörtliche Wiederholung der S. 6 ausgeführten Überlegung die ganze Zahlenlinie in zwei Teile A und B zerlegt, die in einem eindeutig bestimmten Punkte g zusammentreffen. Dabei liegt dieser Punkt g zwischen irgendeinem a_n, das ja immer eine Zahl α ist, und der Zahl h, die dem Teile B angehört. Wir können übrigens hier hinzusetzen, daß g selbst dem Teile B angehört. Wäre nämlich g eine Zahl α, so könnten wir ein a_n angeben, das $> g$ wäre und also im Teile B läge, während doch jedes a_n eine Zahl α ist. Wählen wir nun eine Zahl δ beliebig klein, so ist $(g - \delta)$ eine Zahl α, und also ist ein Index m angebbar, für den $a_m > g - \delta$ zutrifft. Zufolge (1) ist dann eben allgemein $a_n > g - \delta$ für alle $n \geqq m$, und da $a_n < g$ gilt, so folgt weiter:

$$g - a_n = |g - a_n| < \delta$$

für jeden der Bedingung $n \geqq m$ entsprechenden Index n. Hierdurch charakterisiert sich g als Grenze der Reihe $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Auch ist einleuchtend, daß diese Grenze eindeutig bestimmt ist. Ist nämlich $a > g$, so wähle man $\delta < a - g$ und findet in der zu δ gehörenden Umgebung von a überhaupt keinen Punkt a_n. Ist aber $a < g$, so gibt es eine Zahl a_n, die $> a$ ist. Wählen wir dann $\delta < a_n - a$, so liegen alle Punkte $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ außerhalb der zu δ gehörenden Umgebung von a. Somit hat keine von g verschiedene Zahl a den Charakter einer Grenze der Reihe $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Durch Zeichenwechsel aller Zahlen übertragen wir die aufgestellten Sätze auf monotone Reihen abnehmender Zahlen. Offenbar besteht hier der Satz: *Eine monotone Reihe abnehmender Zahlen* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *hat entweder eine eindeutig bestimmte endliche Grenze* $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$, *oder es ist*

$\lim_{n=\infty} a_n = -\infty$, *je nachdem sich eine Zahl angeben läßt, die kleiner als jedes a_n ist oder nicht.*

Eine monotone Reihe wachsender Zahlen war es, welche wir am Anfang von § 2 zur angenäherten Darstellung einer vorgelegten irrationalen Zahl konstruierten. Wenn wir damals sagten, die irrationale Zahl sei durch die Reihe eindeutig festgelegt, so ist dies jetzt einleuchtend, insofern die irrationale Zahl die eindeutig bestimmte Grenze jener Reihe ist.

Ein noch weit einfacheres Beispiel einer monotonen Reihe wachsender Zahlen haben wir in den *Vielfachen einer von 0 verschiedenen positiven Zahl a. Diese Reihe der Zahlen $a_n = n \cdot a$ hat offenbar die Grenze ∞.* Wählen wir nämlich eine „beliebig große" Zahl ω aus, so ist der Quotient $\frac{\omega}{a}$ eine mit ω bestimmte endliche Zahl. Man braucht jetzt nur eine ganze Zahl $m > \frac{\omega}{a}$ zu wählen und hat dann $a_m = m \cdot a > \omega$, woraus die Behauptung hervorgeht.

Ein anderes Beispiel bilden *die Potenzen $a_n = b^n$ einer Zahl b, die > 1 ist; auch diese offenbar monotone Reihe wachsender Zahlen hat die Grenze ∞:*

$$\lim_{n=\infty} b^n = \infty, \qquad (b > 1). \tag{2}$$

Setzen wir nämlich $b = 1 + a$, so gilt $a > 0$. Es ist aber für $n > 1$ stets:

$$b^n > 1 + na, \tag{3}$$

wie wir durch den Schluß der „vollständigen Induktion" zeigen wollen. Dieses häufig angewandte Verfahren besteht in folgender Überlegung: Wir nehmen die Bedingung (3) für irgendein $n > 1$ als richtig an. Dann folgt durch Multiplikation von (3) mit der positiven Zahl $b = 1 + a$:

$$b^{n+1} > (1 + na)(1 + a) = 1 + (n+1)a + na^2 > 1 + (n+1)a,$$

so daß die Bedingung (3) entsprechend auch noch für die nächst folgende Zahl $(n + 1)$ gilt. Da nun zufolge:

$$b^2 = (1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$$

die Ungleichung (3) für $n = 2$ richtig ist, so gilt sie auch für $n = 3$ und also für $n = 4$ usw. Wir brauchen uns jetzt nur noch darauf zu berufen, daß $\lim_{n=\infty} na = \infty$ ist, und erkennen aus (3), daß auch die Zahlen b^n jede noch so groß gewählte Zahl ω bei hinreichend großem n übersteigen, d. h., daß die Behauptung (2) richtig ist.

Ist c eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl, so haben wir in den Potenzen $a_n = c^n$ eine monotone Reihe abnehmender Zahlen, die die Zahl 0 zur Grenze hat:

$$\lim_{n=\infty} c^n = 0, \qquad (0 < c < 1). \tag{4}$$

Daß diese Reihe eine nicht-negative, endliche Grenze g hat, ist nach den allgemeinen Sätzen über monotone Reihen selbstverständlich. Wäre aber $g > 0$, so würde aus der für jedes n gültigen Ungleichung $g < c^n$ umgekehrt $\left(\frac{1}{c}\right)^n < \frac{1}{g}$ folgen, was gegen den in (2) zum Ausdruck kommenden Satz verstoßen würde.

Zwei besonders wichtige Reihen rationaler Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$[1]) erklären wir durch die Vorschriften:

$$(5) \qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Die ersten Zahlen dieser Reihen sind:

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 2; & b_1 = 4; \\
a_2 = (\frac{3}{2})^2 = 2{,}25; & b_2 = (\frac{3}{2})^3 = 3{,}375; \\
a_3 = (\frac{4}{3})^3 = 2{,}370\ldots; & b_3 = (\frac{4}{3})^4 = 3{,}160\ldots; \\
a_4 = (\frac{5}{4})^4 = 2{,}441\ldots; & b_4 = (\frac{5}{4})^5 = 3{,}051\ldots; \\
a_5 = (\frac{6}{5})^5 = 2{,}488\ldots; & b_5 = (\frac{6}{5})^6 = 2{,}985\ldots; \\
a_6 = (\frac{7}{6})^6 = 2{,}521\ldots; & b_6 = (\frac{7}{6})^7 = 2{,}941\ldots; \\
a_7 = (\frac{8}{7})^7 = 2{,}546\ldots; & b_7 = (\frac{8}{7})^8 = 2{,}910\ldots; \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

Diese Zahlen legen die Vermutung nahe, daß die $a_1, a_2 \ldots$ eine monotone Reihe wachsender, die $b_1, b_2, \ldots$ eine ebensolche Reihe abnehmender Zahlen bilden. Nun gilt zufolge (5) für jeden Index n die Ungleichung $a_n < b_n$; ist demnach die Vermutung richtig, so gilt für jedes n und für jede Anzahl k:

$$a_n < a_{n+k} < b_{n+k} < b_n,$$

woraus wir weiter: $a_n < b_{n+k}, \quad a_{n+k} < b_n$

folgern würden. Es müßte also jede Zahl a kleiner als jede Zahl b sein, woraus bereits die Existenz zweier endlicher Grenzen $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n=\infty} b_n$ hervorginge. Überdies würde aus:

$$|b_n - a_n| = b_n - a_n = \frac{1}{n} a_n < \frac{1}{n} b_1 = \frac{4}{n}$$

offenbar folgen: $\lim\limits_{n=\infty} (b_n - a_n) = 0$ und also $\lim\limits_{n=\infty} b_n = \lim\limits_{n=\infty} a_n$,

so daß die Grenzen unserer beiden Zahlenreihen gleich sein würden.

Um nun die Monotonie der beiden Reihen zu zeigen, verstehen wir unter c und d zwei der Bedingung:

$$c > d > 0$$

1) Um die Gleichungen (5) ff. bequem schreiben zu können, beginnen wir hier mit dem Index 1

genügende Zahlen und knüpfen an die für jede Anzahl n gültige Gleichung an:

$$\frac{c^{n+1}-d^{n+1}}{c-d} = c^n + c^{n-1}d + c^{n-2}d^2 + \cdots + cd^{n-1} + d^n.$$

Die $(n+1)$ rechts stehenden Summanden sind, abgesehen vom letzten, sämtlich $> d^n$ und, abgesehen vom ersten, sämtlich $< c^n$; es gilt also:

$$(n+1)d^n < \frac{c^{n+1}-d^{n+1}}{c-d} < (n+1)c^n$$

oder, wenn wir mit der positiven Zahl $(c-d)$ multiplizieren:

$$(c-d)(n+1)d^n < c^{n+1} - d^{n+1} < (c-d)(n+1)c^n.$$

Durch ein paar Umstellungen leiten wir hieraus ab:

$$(6) \qquad \begin{cases} d^n(d+(n+1)(c-d)) < c^{n+1}, \\ c^n(c-(n+1)(c-d)) < d^{n+1}. \end{cases}$$

Die beiden Zahlen: $c = 1 + \frac{1}{n}$; $d = 1 + \frac{1}{n+1}$

befriedigen die Bedingungen $c > d > 0$ und liefern:

$$c - (n+1)(c-d) = 1,$$

so daß die zweite Ungleichung (6) ergibt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{oder} \quad a_n < a_{n+1}.$$

Setzen wir andrerseits für ein beliebiges $n > 1$:

$$c = 1 + \frac{1}{n-1}, \qquad d = 1 + \frac{1}{n},$$

so ist wieder $c > d > 0$, und man findet leicht:

$$d + (n+1)(c-d) = \frac{n+1}{n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = d \cdot c.$$

Nun liefert die erste Ungleichung (6)

$$d^n \cdot dc < c^{n+1}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \quad \text{oder} \quad b_n < b_{n-1},$$

so daß tatsächlich beide Reihen monoton sind.

Die gemeinsame Grenze unserer beiden Reihen ist eine weiterhin oft zu nennende Zahl, welche man mit der besonderen Bezeichnung e belegt hat:

$$(7) \qquad e = \lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Aus den oben angegebenen Zahlen a_7 und b_7 können wir zunächst nur entnehmen, daß e zwischen den beiden rationalen Zahlen 2,546 und 2,911 liegt:

$$2{,}546 < e < 2{,}911 .$$

Es wäre zwar möglich, durch Berechnung weiterer Zahlen a_n, b_n engere Schranken für die Zahl e anzugeben; aber diese Rechnungen werden alsbald wegen ihres Umfangs undurchführbar. Auch würde, selbst wenn wir bis $n = 100$ gingen, der Abstand der beiden Schranken:

$$b_{100} - a_{100} = \tfrac{1}{100}\, a_{100} > \tfrac{1}{100}\, a_1 = 0{,}02$$

sein, so daß schon die zweite Dezimalstelle unsicher wäre. Wir werden unten handlichere Mittel zur Berechnung von Näherungswerten der Zahl e kennen lernen. Eine auf zehn Dezimalstellen genaue Darstellung ist:

$$e = 2{,}7182818284\ldots; \tag{8}$$

sie überbietet bei weitem die Genauigkeit, welche man gewöhnlich bei praktischen Zwecken einhalten muß.

4. Der Begriff der stetigen Variablen. Wenn wir Gegenstände, die in bezug auf ihre Größe vergleichbar sind, in einer geeigneten Maßeinheit messen, so drücken wir die Größen dieser Gegenstände in Zahlen aus. Die Tatsache, daß ein und derselbe Gegenstand zu verschiedenen Zeiten verschiedene Größen haben kann, führt uns zu dem Begriffe der „*veränderlichen*" oder „*variablen Größe*" oder, wie wir kurz sagen, der „*Veränderlichen*" oder „*Variablen*". Eine solche Variable ist also in jedem „Zeitpunkte" eine bestimmte Zahl, bedeutet aber in zwei verschiedenen Zeitpunkten nicht oder doch nicht stets die gleiche Zahl.

Ist demgegenüber eine Größe in je zwei verschiedenen Zeitpunkten stets ein und dieselbe Zahl, so nennen wir sie eine „*konstante Größe*" oder kurz eine „*Konstante*".

Wir vereinbaren hier sogleich, daß wir durch die Wahl der Bezeichnungen für die Größen von vornherein andeuten wollen, ob dieselben variable oder konstante sind. Gebrauchen wir zur Bezeichnung der Zahl, der eine Größe gleich ist, einen Buchstaben aus dem Anfange der Alphabete, wie $a, b, c, \ldots, A, B, C, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, so wollen wir damit gewöhnlich, d. h. unter Vorbehalt gelegentlicher Ausnahmen, zum Ausdrucke bringen, daß die Größe eine Konstante sei; gebrauchen wir dagegen als Zahlzeichen einen Buchstaben vom Ende der Alphabete, wie $x, y, z, t, u, \ldots, X, Y, Z, \ldots$, so deuten wir damit für gewöhnlich an, daß es sich um eine variable Größe handle.

Es ist übrigens auch leicht möglich, den Begriff der Variablen in einer rein mathematischen, von der Zeitvorstellung unabhängigen Gestalt zu bestimmen. Kommt in einer Rechnung eine etwa mit dem Zeichen a

belegte Zahl vor, so wollen wir damit ausdrücken, daß die Rechnung nur für die bestimmte Zahl gelten soll, deren Zeichen a ist; freilich soll das nicht ausschließen, daß wir zu Beginn der Rechnung für die Zahl, welche wir mit a bezeichnen, eine Auswahl unter mehreren haben, wie dies ja bei Gebrauch eines Buchstabens zur Bezeichnung einer Zahl immer gemeint ist. Kommt hingegen eine mit der Bezeichnung x belegte Zahl vor, so bedeutet dies, daß die Rechnung gelten soll für mehrere voneinander verschiedene Zahlen, die wir nach Willkür für x in unsere Formeln eintragen mögen.

An Stelle des Begriffes der im Laufe der Zeit veränderlichen Größe tritt also dann der Begriff des „*Zahlensystems*", und die „*Variable* x" ist nur noch ein Zeichen für eine Zahl, welche wir nach Willkür aus dem System herausgreifen können. Dieses Zahlensystem ist natürlich in jedem Einzelfalle deutlich zu erklären. Es kann z. B. sein, daß x überhaupt jede reelle Zahl bedeuten darf; wir nennen die Variable x dann „*unbeschränkt*". Andrerseits sind Einschränkungen in der mannigfaltigsten Weise denkbar. Z. B. können wir vorschreiben, daß x nur die zwischen zwei bestimmten, voneinander verschiedenen Zahlen a und b gelegenen reellen Zahlen bedeuten darf; wir drücken dies, wenn etwa a die kleinere unter beiden Zahlen ist, durch die Vorschrift:

$$a < x < b \tag{1}$$

aus und nennen die von den beiden Punkten a und b eingegrenzte Strecke der Zahlenlinie das „*Intervall*" der Variablen x. Meist setzen wir voraus, daß x auch noch mit der „unteren" und „oberen Schranke" a und b des Intervalls gleich werden darf, und sprechen dann kurz vom Intervall:

$$a \leqq x \leqq b. \tag{2}$$

In diesem Falle, wo die beiden Streckenendpunkte oder Schranken dem Intervalle selbst noch angehören, sprechen wir von einem „*abgeschlossenen Intervalle*", während das in (1) erklärte Intervall als ein „*nichtabgeschlossenes*" zu bezeichnen ist. Wir können ein anderes Mal vorschreiben, daß x nur den rationalen Brüchen zwischen 0 und 1 gleich sein darf oder vielleicht den gesamten rationalen Brüchen, deren Nenner Potenzen der Zahl 2 sind, und dgl. mehr.

Gegenüber diesen einfachen Vorstellungen der „Zahlensysteme" wird nun freilich der Begriff der im Laufe der Zeit variablen Größe eben durch die Hereinnahme der Zeitvorstellung schwieriger. Die Zeit selbst erscheint unserer Anschauung als eine in einer zweckmäßig gewählten Einheit (etwa einer Sekunde) meßbare Größe, und die Zeitgröße oder Zeitdauer stellen wir uns als eine beständig wachsende und zwar „*stetige*" Variable vor. Es ist dies dieselbe Eigenschaft der Stetigkeit, des lücken-

losen Zusammenhanges, welche wir oben der Zahlenlinie zuerkannten. Wir können uns geradezu als ein Bild der Zeit eine unbegrenzte gerade Linie vorstellen, auf der ein bestimmter Augenblick zu einem „Zeitpunkte" wird, und auf der man die Gegenwart unter dem Bilde eines mit konstanter Geschwindigkeit immer in der gleichen Richtung fortwandernden Punktes sich vorstellt. Im übrigen handelt es sich bei der Stetigkeit um eine Grundeigenschaft unserer Anschauungen der Zeit und des Raumes, welche eine weitere Erklärung weder nötig macht, noch einer solchen zugänglich sein würde.

Der Begriff der im Laufe der Zeit veränderlichen Größe x würde nun darauf hinauslaufen, daß jedem Zeitpunkte eine bestimmte Zahl x zugewiesen ist. Auf diese Weise aber gelangen wir bereits zu der Vorstellung einer Zuordnung von Zahlen zu Paaren, wie wir sie erst im nächsten Paragraphen näher betrachten wollen. *Wir wollen demnach bei dem Begriffe der variablen Größe nur das Kennzeichen festhalten, daß sie sich überhaupt im Laufe der Zeit ändert; dagegen wollen wir von einem besonderen Gesetze, nach dem diese Änderung sich vollziehen soll, absehen oder auch uns vorbehalten, dieses Gesetz je nach Umständen in zweckmäßiger Art zu wählen oder doch zu beschränken.*

Vor allen Dingen ist der Begriff der „*monotonen*" und „*stetigen*" Variablen für alles Folgende grundlegend. Wir nennen im Anschluß an § 3 eine Variable x während eines Zeitintervalles „*monoton*", *wenn sie während dieser Zeit entweder beständig wächst oder beständig abnimmt*, und bezeichnen sie entsprechend genauer als eine monoton „*wachsende*" oder „*abnehmende*" Variable. Hat x zu Anfang des Zeitintervalls den Wert a und zu Ende den Wert b, *so heißt die „monotone" Variable x „stetig", wenn sie „jeder" zwischen a und b gelegenen Zahl c während der betrachteten Zeit gleich wird.* Daß bei einer wachsenden Variablen x unter zwei Zahlen c allemal die kleinere von x eher erreicht wird als die größere, ist selbstverständlich.

Im Anschluß an die Entwicklungen von § 2, aber unabhängig von den eben besprochenen Begriffen der Monotonie und Stetigkeit, erklären wir weiter: *Die Variable x nähert sich einer Zahl g als einer „Grenze" $g = \lim x$ an, wenn nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl δ stets ein Zeitpunkt angebbar ist, von dem an $|g - x| < \delta$ gilt, ohne daß x zu irgendeiner Zeit die Zahl g selbst zu sein braucht.* Weiter sagen wir, *die Variable x nähere sich der „Grenze" $+\infty$ an, oder es sei $\lim x = +\infty$, wenn nach Auswahl einer beliebig großen Zahl ω stets ein Zeitpunkt angebbar ist, von dem an $x > \omega$ gilt.*[1]) Am einfachsten ist es, wenn wir uns die Variable x hierbei sogleich als „monoton" und „stetig" denken. Ein Beispiel für eine

1) Die Bedeutung von $\lim x = -\infty$ wird man leicht entsprechend angeben.

stetige Variable x, die sich der Grenze $+\infty$ annähert, liefert die Vorschrift, der Bildpunkt der Zahl x solle sich auf der Zahlenlinie etwa vom Punkte 1 ab mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts bewegen. Dabei liefert uns zugleich der reziproke Wert $x' = x^{-1}$ dieser Variablen x eine neue und natürlich auch stetige Variable x', welche ein einfachstes Beispiel für die Annäherung an die Grenze 0 darstellt.

5. Der Begriff der Funktion. Die Änderungen der Größe x eines Gegenstandes sind unserer Erfahrung gemäß häufig verknüpft mit den Veränderungen der Größe y eines zweiten Gegenstandes. In einem solchen Falle hat die Mathematik nicht etwa nach einem Kausalzusammenhange zwischen den beiden Gegenständen zu forschen; vielmehr betrachtet sie einzig die tatsächlich vorliegende Zuordnung von Zahlen y, denen die eine Variable gleich ist, zu den jeweils gleichzeitig stattfindenden Zahlenwerten x der anderen Variablen. Solche Zuordnungen führen uns zu einem neuen Begriffe: *Falls jeder Zahl x eines vorgelegten Zahlensystems eine bestimmte Zahl y zugeordnet ist, so soll die durch diese Zuordnung erklärte Variable y eine „Funktion" der Variablen x heißen.* Es soll nicht ausgeschlossen sein, daß jeder Zahl x des Systems ein und dieselbe Zahl y zugeordnet ist; dann würde die Funktion y eine Konstante sein, und wir hätten einen oben (S. 12) ja vorbehaltenen Ausnahmefall von der Regel, daß wir Konstante durch die Anfangsbuchstaben des Alphabets bezeichnen wollten.

Wir verabreden, daß wir die Aussage, y sei eine Funktion von x, kurz durch die Gleichung $y = f(x)$ kennzeichnen wollen, wobei man das Symbol f als ein Zeichen fasse für die besondere Art der im einzelnen Falle vorliegenden Zuordnung, vielleicht auch gleich für eine Rechenvorschrift, nach der wir für die Zahlen x des Systems die zugehörigen y berechnen mögen. Denken wir die Zahl x hierbei dem System frei entnommen und dann allemal das zugehörige y bestimmt, so heißt x die *„unabhängige"* und y die *„abhängige"* Variable. Die unabhängige Variable x nennen wir auch das *„Argument"* der Funktion $f(x)$.

Übrigens wollen wir uns auch die Wahl anderer Bezeichnungen offen halten. Es ist nach den vorstehenden Festsetzungen selbstverständlich, was es heißt, v sei eine Funktion des Argumentes u, oder s sei eine Funktion von t, usw. Auch an Stelle des Symbols f zur Bezeichnung einer Funktion gebrauchen wir gelegentlich andere, wie $\varphi, \psi, g, h, F, \ldots$

Der für uns wichtigste und später allein in Betracht kommende Fall ist der, *daß eine Funktion $y = f(x)$ für „alle" Zahlen x eines Intervalles erklärt ist, vielleicht sogar für „unbeschränkt" veränderliches x, oder für „alle" x, die nicht kleiner als eine Zahl a oder nicht größer als eine Zahl b sind.* Die einfachste Vorstellung ist die *daß die Funktion $y = f(x)$ für*

alle Punkte eines abgeschlossenen Intervalles $a \leqq x \leqq b$ gegeben ist; an diese Annahme schließen sich die nächsten Entwicklungen an.

Es möge x als eine monoton wachsende und stetige Variable das Intervall von a bis b beschreiben. Wenn hierbei $f(x)$ entweder niemals abnimmt oder niemals wächst, so heißt unsere Funktion im Intervall „*monoton*“. Der Wortlaut der Erklärung läßt die Möglichkeit zu, daß $f(x)$ in einem Teile des Intervalls oder gar im ganzen Intervalle konstant ist. Meist aber haben wir mit monotonen Funktionen zu tun, die mit wachsendem x selbst entweder *beständig* wachsen oder *beständig* abnehmen, derart daß zu zwei verschiedenen Argumenten x immer auch zwei verschiedene Funktionswerte y gehören. Ist $f(x)$ zwar nicht im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ monoton, läßt sich dieses Intervall aber in eine *endliche* Anzahl von „Teilintervallen“ zerlegen, in deren jedem $f(x)$ monoton ist, so heißt $f(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ „*abteilungsweise*“ *monoton.*

Für eine solche Funktion ist nun der Begriff der „*Stetigkeit*“ leicht erklärbar. Ist $f(x)$ im Teilintervalle $a_0 \leqq x \leqq b_0$ monoton, *so heißt die Funktion daselbst „stetig“, falls „jeder“ zwischen $f(a_0)$ und $f(b_0)$ gelegene Wert d in mindestens einem Punkte c jenes Intervalles von $f(x)$ wirklich angenommen wird.* Ist etwa $f(a_0) < f(b_0)$, so wird dann selbstverständlich allemal wieder unter zwei verschiedenen Werten d der kleinere von der Funktion für ein kleineres Argument c angenommen als der größere.

Die vorstehenden Erklärungen erweisen sich nun leider bereits im Gebiete derjenigen Funktionen, welche der Elementarmathematik entstammen, als nicht durchweg brauchbar. Die Monotonie einer einzelnen vorgelegten Funktion ist nicht immer unmittelbar zu erkennen, so daß es unzweckmäßig erscheint, die Erklärung der Stetigkeit an die Voraussetzung der Monotonie zu knüpfen. Aber selbst wenn die letztere feststellbar ist, würde die Stetigkeit auf Grund der gegebenen Erklärung unmittelbar keineswegs immer leicht zu prüfen sein. Setzen wir z. B.:

$$y = f(x) = x^5 + 2x^2 + 3x + 1,$$

so gilt $f(0) = 1$ und $f(1) = 7$, und es ist hier freilich sofort einleuchtend, daß diese Funktion $f(x)$ etwa im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ monoton ist. Fragen wir aber, ob z. B. der zwischen $f(0)$ und $f(1)$ gelegene Wert 6 von der Funktion wirklich erreicht wird, so würden wir zur Beantwortung dieser Frage die Existenz einer zwischen 0 und 1 gelegenen Lösung x der Gleichung:

$$x^5 + 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

nachweisen müssen, hätten also mit einem Problem der Algebra zu tun, das nicht zu den einfachsten gehört.

Bei dieser Sachlage stellen wir unabhängig von der Monotonie folgendes praktisch brauchbare, hinreichende und notwendige Kennzeichen

der Stetigkeit auf: *Die Funktion $f(x)$ heißt im „abgeschlossenen Intervall“ $a \leq x \leq b$ „gleichmäßig stetig“, wenn nach Auswahl einer „beliebig“ kleinen Zahl δ stets eine von 0 verschiedene positive Zahl λ derart angebbar ist, daß für je zwei Argumente x_1 und x_2 des Intervalles die Bedingung $|f(x_2) - f(x_1)| < \delta$ erfüllt ist, sobald $|x_2 - x_1| \leq \lambda$ zutrifft*[1].

Wir müssen nun natürlich hinterher zeigen, daß einer Funktion $f(x)$, welche diese Bedingung der Stetigkeit erfüllt, jene Eigenart der Stetigkeit zukommt, welche wir von der Vorstellung der Zahlenlinie, der Zeit und der stetigen Variablen x her kennen. Dies soll in § 6 geschehen.

6. Die Stetigkeit der Funktionen[2]. Es seien $c_1, c_2, c_3, \ldots$ unbegrenzt viele Zahlen des Intervalles $a \leq x \leq b$, welche eine Grenze $\lim c_n = c$ besitzen; *dann gehört die Zahl c selbst dem abgeschlossenen Intervall an*, da man leicht erkennt, daß sie weder $< a$ noch $> b$ sein kann. Für unsere Funktion $f(x)$ läßt sich nun folgender Satz zeigen: *Die im Intervalle $a \leq x \leq b$ gleichmäßig stetige Funktion $f(x)$ nimmt für die Argumente $c_1, c_2, c_3, \cdots$ mit der Grenze c Werte $f(c_1), f(c_2), f(c_3), \cdots$ an, die gleichfalls eine Grenze $\lim\limits_{n=\infty} f(c_n)$ besitzen, und zwar ist diese Grenze identisch mit dem Funktionswerte $f(c)$.*

Nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl δ können wir nämlich zufolge der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktion eine Zahl λ derart angeben, daß

$$|f(c_{n+k}) - f(c_n)| < \delta \tag{1}$$

gilt, sobald $|c_{n+k} - c_n| \leq \lambda$ zutrifft. Da aber die Zahlen $c_1, c_3, c_3, \cdots$ eine Grenze haben, so gibt es für das hier vorliegende λ und also für das gewählte δ einen endlichen Index m derart, daß für alle $n \geq m$ die Bedingung $|c_{n+k} - c_n| \leq \lambda$ und also die Ungleichung (1) erfüllt ist[3]. Demnach existiert tatsächlich eine Grenze $g = \lim\limits_{n=\infty} f(c_n)$. Nehmen wir nun an, daß diese Grenze g *nicht* gleich $f(c)$ sei, so ist:

$$\tfrac{1}{2} |f(c) - g| = \delta' \tag{2}$$

für eine von 0 verschiedene positive Zahl. Dann gibt es zufolge der Stetigkeit der Funktion eine positive Zahl λ' derart, daß:

$$|f(c) - f(x)| < \delta' \tag{3}$$

für alle die Bedingung $|c - x| \leq \lambda'$ befriedigenden Zahlen x des Intervalles gilt. Da nun $\lim\limits_{n=\infty} f(c_n) = g$ und $\lim\limits_{n=\infty} c_n = c$ ist, so kann man einen Index m' derart angeben, daß für alle $n \geq m'$ zugleich $|f(c_n) - g| < \delta'$ und $|c - c_n| \leq \lambda'$ und also

1) Gewöhnlich bezieht man die Erklärung zunächst auf die einzelne Stelle c des Intervalles und sagt, $f(x)$ sei „im Punkte c stetig“, wenn für diesen Punkt c ein λ derart existiert, daß stets $|f(x) - f(c)| < \delta$ zutrifft, falls $|x - c| \leq \lambda$ gilt. Ist dann $f(x)$ in *jedem* Punkte des „abgeschlossenen“ Intervalles $a \leq x \leq b$ stetig, so kann man zeigen, daß sie daselbst auch „gleichmäßig stetig“ im Sinne der obigen Erklärung ist. Um diesen Beweis übergehen zu können, ist im Texte sogleich die „gleichmäßige Stetigkeit“ in einem Intervalle erklärt.

2) Beim ersten Studium nehme der Leser nur von den Kursivsätzen des § 6 Kenntnis, da diese Sätze später Anwendung finden.

3) Es mag hierbei bemerkt werden, daß die Bedingung (3) S. 5 für die Existenz einer Grenze $\lim\limits_{n=\infty} a_n$, nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, wie aus den damaligen Entwicklungen leicht folgt.

zufolge (3) auch $|f(c)-f(c_n)|<\delta'$ zutrifft. Wir können die erste und dritte dieser Ungleichungen auch in die Gestalten kleiden:

$$-\delta' < f(c_n) - g < +\delta',$$
$$-\delta' < f(c) - f(c_n) < +\delta'$$

und finden aus ihnen durch Addition und Division mit 2:

$$-\delta' < \tfrac{1}{2}(f(c) - g) < +\delta', \quad \tfrac{1}{2}\,|f(c) - g| < \delta',$$

was gegen die Gleichung (2) verstößt. Es ist demnach $\lim\limits_{n=\infty} f(c_n) = f(c)$, womit unser Satz bewiesen ist.

Mit dem eben bewiesenen Satze ist der folgende nahe verwandt: *Sind $c_1, c_2, c_3, \cdots$ unbegrenzt viele verschiedene dem Intervalle $a \leq x \leq b$ entnommene Werte, und haben die zugehörigen Werte $f(c_1), f(c_2), f(c_3), \cdots$ der in jenem Intervalle gleichmäßig stetigen Funktion $f(x)$ eine Grenze $\lim\limits_{n=\infty} f(c_n)$, so tritt dieser Grenzwert an mindestens einer Stelle des Intervalls als Funktionswert auf.*

Durch wörtliche Wiederholung der S. 5 und 6 ausgeführten Überlegung zeigen wir zunächst, daß die Bildpunkte der Zahlen $c_1, c_2, \cdots$ im Intervall mindestens eine „Häufungsstelle" c von der Art haben, daß sich in „jeder" Umgebung von c unbegrenzt viele verschiedene Punkte c_n finden. Man wähle also δ_1 und hat dann innerhalb der durch $(c \pm \delta_1)$ eingegrenzten Umgebung von c noch unbegrenzt viele verschiedene c_n. Ein von c verschiedener unter diesen Punkten sei c_{ν_1} und werde kurz c_1' genannt; es gilt somit:

$$|c - c_1'| < \delta_1 .$$

Man setze zweitens $\frac{1}{2}|c - c_1'| = \delta_2$ und hat dann innerhalb der durch $(c \pm \delta_2)$ eingegrenzten Umgebung von c auch noch unbegrenzt viele verschiedene Punkte der Reihe $c_{\nu_1+1}, c_{\nu_1+2}, \cdots$. Ein von c verschiedener unter diesen sei c_{ν_2} und werde kurz c_2' genannt, so daß die Ungleichung:

$$|c - c_2'| < \delta_2 < \tfrac{1}{2}\delta_1$$

befriedigt wird. Man setze nun wieder $\frac{1}{2}|c - c_2'| = \delta_3$, wähle aus $c_{\nu_2+1}, c_{\nu_2+2}, \cdots$ eine von c verschiedene Zahl $c_{\nu_3} = c_3'$, die:

$$|c - c_3'| < \delta_3 < (\tfrac{1}{2})^2 \delta_1$$

befriedigt, und fahre in der gleichen Weise fort. Man gewinnt auf diese Art eine neue Zahlenreihe $c_1', c_2', \cdots$ mit der Grenze $\lim\limits_{n=\infty} c_n' = c$, die dem Intervall angehört. Nach dem schon bewiesenen Satze hat die zugehörige Reihe $f(c_1'), f(c_2'), \cdots$ eine Grenze, welche mit dem Funktionswerte $f(c)$ gleich ist. Da aber die Reihe $f(c_1'), f(c_2'), f(c_3'), \cdots$ durch Fortlassung gewisser Zahlen aus der Reihe $f(c_1), f(c_2), f(c_3), \cdots$ entsteht, so gilt:

$$\lim_{n=\infty} f(c_n') = \lim_{n=\infty} f(c_{\nu_n}) = \lim_{n=\infty} f(c_n),$$

und also ist in c entsprechend der Behauptung ein Argument nachgewiesen, dessen Funktionswert $f(c) = \lim\limits_{n=\infty} f(c_n)$ ist.

Mittelst des letzten Satzes können wir leicht einen weiteren Satz zeigen, welcher bei unserer Funktion $f(x)$ auf den Begriff der „Stetigkeit" im ursprünglichen Sinne zurückführt: *Jeder zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegene Zahlenwert y wird von unserer im Intervalle gleichmäßig stetigen Funktion $f(x)$ in mindestens einem Punkte des Intervalls $a \leq x \leq b$ wirklich angenommen.* Natürlich dürfen wir die beiden Werte $y = f(a)$ und $y = f(b)$, welche ja in den Endpunkten des Intervalles wirklich eintreten, hier mit einschließen. Ist der Satz richtig, so gilt er auch für *jedes* Teilintervall $a \leq a_0 \leq x \leq b_0 \leq b$, in dem $f(x)$ selbstverständlich auch gleich-

mäßig stetig ist. Lassen wir demnach x *stetig* von a_0 bis b_0 wachsen, so wird sich $f(x)$ von $f(a_0)$ bis $f(b_0)$ derart ändern, daß hierbei niemals irgendein zwischen $f(a_0)$ und $f(b_0)$ gelegener Wert y übersprungen werden kann. Damit aber würde die Stetigkeit der Funktion im ursprünglichen Sinne erkannt sein.

Wir beweisen den aufgestellten Satz indirekt und nehmen also an, es gäbe eine Zahl d zwischen $f(a)$ und $f(b)$, der $f(x)$ an keiner Stelle des Intervalles gleich wird. Man wähle dann eine beliebig kleine Zahl δ und bestimme die zugehörige von 0 verschiedene Zahl λ. Im Intervall markiere man von a aus die Teilpunkte $a+\lambda$, $a+2\lambda$, $a+3\lambda$, $\cdots$, welche Teilintervalle der Länge λ eingrenzen. Da die Zahl λ in der endlichen Zahl $(b-a)$ nur eine endliche Anzahl von Malen enthalten ist, so erschöpfen wir durch endlich viele Teilintervalle, unter denen das letzte $\leq \lambda$ ist, das ganze Intervall. Nun sind je zwei benachbarte unter den endlich vielen Werten $f(a)$, $f(a+\lambda)$, $f(a+2\lambda)$, $\cdots$, $f(b)$ um weniger als δ voneinander unterschieden. Da aber d zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt und der Annahme nach mit keinem der Funktionswerte $f(a)$. $f(a+\lambda)$, $\cdots$, $f(b)$ gleich ist, so kommt mindestens ein Paar aufeinander folgender Werte $f(a)$, $f(a+\lambda)$, $\cdots$, $f(b)$ vor, die d einschließen, und von denen also mindestens der eine von d um weniger als $\frac{1}{2}\delta$ verschieden ist. Nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl δ können wir demnach im Intervall immer ein c derart angeben, daß die Ungleichung gilt:

$$|f(c)-d| < \tfrac{1}{2}\delta. \tag{4}$$

Die eben mit δ und c bezeichneten Zahlen mögen jetzt δ_1 und c_1 heißen, so daß zufolge (4) die Ungleichung besteht:

$$|f(c_1)-d| < \tfrac{1}{2}\delta_1.$$

Da $f(c_1)$ der Annahme nach nicht gleich d ist, so können wir weiter zu

$$\tfrac{1}{2}|f(c_1)-d| = \delta_2$$

eine Zahl c_2 bestimmen, für welche:

$$|f(c_2)-d| < \tfrac{1}{2}\delta_2 < (\tfrac{1}{2})^2\delta_1$$

gilt, und welche wegen $|f(c_2)-d| < \frac{1}{4}|f(c_1)-d|$ von c_1 verschieden ist. Auch $f(c_2)$ ist von d verschieden; wir setzen also jetzt $\frac{1}{2}|f(c_2)-d| = \delta_3$, bestimmen eine die Bedingung:
$$|f(c_3)-d| < \tfrac{1}{2}\delta_3 < (\tfrac{1}{2})^2\delta_2 < (\tfrac{1}{2})^3\delta_1$$

befriedigende Zahl c_3, welche von c_2 und c_1 verschieden ist, und fahren in gleicher Weise fort. Wir erhalten eine unbegrenzte Reihe $c_1, c_2, c_3, \cdots$ verschiedener Zahlen, wobei:
$$|f(c_n)-d| < \tfrac{1}{2}\delta_n < (\tfrac{1}{2})^2\delta_{n-1} < \cdots < (\tfrac{1}{2})^n\delta_1$$

gilt und also die Reihe $f(c_1)$, $f(c_2)$, $f(c_3)$, $\cdots$ die Grenze d hat. Der zuletzt bewiesene Satz ergibt also die Existenz eines Wertes c im Intervall, für welchen entgegen der Annahme $f(c)=d$ gilt; und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

7. Folgerungen aus der Stetigkeit der Funktionen[1]. Die Überlegungen von § 6 gestatten uns, noch einige weitere Sätze über stetige Funktionen aufzustellen. Unter Festhaltung der bisherigen Bezeichnungen ergibt sich aus der Erklärung der gleichmäßigen Stetigkeit: Die im Intervall $a \leq x \leq a+\lambda$ vorkommenden Funktionswerte sind zwischen den beiden Zahlen $(f(a) \pm \delta)$ gelegen, und dies gilt also insbesondere auch für den Funktionswert $f(a+\lambda)$. Da aber weiter im Intervall $a+\lambda \leq x \leq a+2\lambda$ die Werte $f(x)$ zwischen den Werten $(f(a+\lambda) \pm \delta)$ liegen, so sind die Werte $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq a+2\lambda$ notwendig von den beiden Zahlen $(f(a) \pm 2\delta)$ eingeschlossen. Durch Fortsetzung dieser Überlegung stellt man fest, daß die dem Intervalle $a \leq x \leq a+m\lambda$ angehörenden $f(x)$ zwischen

1) Soweit der Text in Kleindruck gegeben ist, wolle der Leser beim ersten Studium auch in § 7 nur von den Kursivsätzen Kenntnis nehmen.

den Schranken $(f(a) \pm m\delta)$ liegen. Da wir nun das ganze Intervall $a \leq x \leq b$ durch eine *endliche* Anzahl von Teilintervallen erschöpfen, so existieren zwei endliche Schranken für alle daselbst vorkommenden Werte $f(x)$: *Für jede vorgelegte im Intervall $a \leq x \leq b$ gleichmäßig stetige Funktion $f(x)$ existiert eine endliche positive Zahl h, unter der alle im Intervalle vorkommenden Beträge $|f(x)|$ liegen.*

Ist $f(x)$ im Intervall an keiner Stelle gleich 0, so ist $f(x)$ ebenda nach dem letzten Satze von § 6 entweder überall > 0 oder überall < 0. Auf diesen Fall bezieht sich der Satz: *Ist die vorgelegte im Intervall $a \leq x \leq b$ gleichmäßig stetige Funktion $f(x)$ daselbst nirgends gleich 0, so existiert eine von 0 verschiedene positive Zahl k, die kleiner ist als alle im Intervalle auftretenden Beträge $|f(x)|$.* Würde nämlich eine solche Zahl nicht existieren, so würde nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl δ immer noch ein c im Intervall vorkommen, für welches $|f(c)| < \delta$ ist. Daraus würden wir leicht eine neue Reihe $f(c_1), f(c_2), f(c_3), \cdots$ mit der Grenze 0 herstellen, und also würde die Funktion nach einem in § 6 aufgestellten Satze der Voraussetzung entgegen im Intervall in mindestens einem Punkte den Wert 0 haben.

Die letzten Ergebnisse setzen uns in den Stand, noch folgenden Satz zu beweisen: *Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei im Intervall $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig stetige Funktionen, so sind ebenda auch die ersten drei von den vier folgenden Funktionen:*

$$(1) \qquad \varphi(x) + \psi(x), \quad \varphi(x) - \psi(x), \quad \varphi(x) \cdot \psi(x), \quad \varphi(x) : \psi(x)$$

gleichmäßig stetig, und dasselbe gilt von der vierten Funktion, wenn $\psi(x)$ in keinem Punkte des Intervalles den Wert 0 hat.

Setzen wir nämlich erstlich $f(x) = \varphi(x) \pm \psi(x)$, so gilt:

$$f(x_2) - f(x_1) = (\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \pm (\psi(x_2) - \psi(x_1)),$$

$$(2) \qquad |f(x_1) - f(x_1)| \leqq |(\varphi(x_2) - \varphi(x_1))| + |(\psi(x_2) - \psi(x_1))|,$$

da der absolute Betrag der Summe oder der Differenz zweier Zahlen nie größer sein kann als die Summe der absoluten Beträge beider Zahlen. Nach Auswahl von δ gibt es nun zwei positive Zahlen λ_1, λ_2 derart, daß

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < \tfrac{1}{2}\delta \quad \text{für} \quad |x_2 - x_1| \leqq \lambda_1$$

und

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| < \tfrac{1}{2}\delta \quad \text{für} \quad |x_2 - x_1| \leqq \lambda_2$$

gilt. Ist demnach λ gleich der kleineren der beiden Zahlen λ_1, λ_2 oder, falls $\lambda_1 = \lambda_2$ ist, ihnen gleich, so folgt aus (2) und den eben angegebenen Ungleichungen $|f(x_2) - f(x_1)| < \delta$, sobald $|x_2 - x_1| \leqq \lambda$ zutrifft. Damit aber ist unser Satz für die beiden ersten Funktionen (1) bewiesen.

Ist weiter $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$, so gilt:

$$f(x_2) - f(x_1) = \varphi(x_2)(\psi(x_2) - \psi(x_1)) + \psi(x_1)(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)),$$

$$(3) \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leqq |\varphi(x_2)| \cdot |\psi(x_2) - \psi(x_1)| + |\psi(x_1)| \cdot |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|.$$

Nun gibt es zwei endliche positive Zahlen h_1, h_2, so daß $|\varphi(x)| < h_1$, $|\psi(x)| < h_2$ für alle x des Intervalles, also auch für x_2 und x_1 zutrifft.

Ist aber ein δ gewählt, so gibt es weiter zwei positive Zahlen λ_1, λ_2 von der Art, daß die Ungleichungen:

$$(4) \qquad |\psi(x_2) - \psi(x_1)| < \frac{\delta}{2h_1}, \quad |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < \frac{\delta}{2h_2}$$

für alle x_1, x_2 des Intervalles bestehen, die $|x_2 - x_1| \leqq \lambda_2$ bzw. $|x_2 - x_1| \leqq \lambda_1$ befriedigen. Wählen wir λ wie vorhin, so gilt zufolge (3) und (4) auch $|f(x_2) - f(x_1)| < \delta$, so oft $|x_2 - x_1| \leqq \lambda$ zutrifft; damit ist die gleichmäßige Stetigkeit von $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ erkannt.

Endlich haben wir für $f(x) = \varphi(x) : \psi(x)$ anzuknüpfen an:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{\psi(x_2)}(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) - \frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)\,\psi(x_2)}(\psi(x_2) - \psi(x_1)),$$

$$(5) \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leqq \left|\frac{1}{\psi(x_2)}\right| \cdot |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| + \frac{|\varphi(x_1)|}{|\psi(x_1)| \cdot |\psi(x_2)|} \cdot |\psi(x_2) - \psi(x_1)|.$$

Da $\psi(x)$ im Intervall nirgends den Wert 0 hat, so existiert eine von 0 verschiedene positive Zahl k_2, die kleiner ist als alle Beträge $|\psi(x)|$ des Intervalls. Setzen wir $k_2^{-1} = h_2'$ und gebrauchen h_1 im bisherigen Sinne, so folgt aus (5) leicht:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq h_2' \cdot |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| + h_1 \cdot h_2'^2 \cdot |\psi(x_2) - \psi(x_1)|.$$

Hieraus ergibt sich die gleichmäßige Stetigkeit der vierten Funktion (1) durch dieselbe Überlegung wie diejenige der dritten.

8. Geometrische Deutungen und Ausführungen. Zahlreiche Beispiele von stetigen Funktionen werden uns von der Geometrie sowie von den naturwissenschaftlichen und technischen Erfahrungen geliefert. Wir können andrerseits die besonderen Einkleidungen solcher Beispiele zur Veranschaulichung vorgelegter stetiger Funktionen heranziehen. Zwei solche Veranschaulichungen sollen schon hier genannt werden.

Erstlich deuten wir, wenn uns eine stetige Funktion $y = f(x)$ gegeben ist, x und y als *rechtwinklige Koordinaten in der Ebene* und denken im einzelnen Punkte x der Abszissenachse, soweit $f(x)$ erklärt ist, den Funktionswert $y = f(x)$ nach Art der analytischen Geometrie[1]) als Ordinate aufgetragen. Dann ist es eben eine Folge der Stetigkeit der Funktion, daß die Ordinatenendpunkte eine *zusammenhängende* Punktreihe, die wir „*Kurve*“ nennen, als Bild der Funktion liefern. Es ist dies eine so bekannte Maßregel, daß wir zu ihrer Einführung hier weiter nichts zu sagen brauchen.

1) Bei Benutzung von Sätzen aus der Geometrie beziehen wir uns weiterhin auf die „Analytische Geometrie“ des Verfassers, die in der Sammlung „Teubners Leitfäden für den mathematischen und technischen Hochschulunterricht“ erschienen ist (Leipzig und Berlin 1915). Dieses Buch soll als „A. G.“ zitiert werden.

Zweitens deuten wir, wenn uns eine stetige Funktion $s = f(t)$ gegeben ist,[1]) t als *Maß der Zeit* (eines der Urbilder der stetigen Variablen) und s als *Bildpunkt auf der Zahlenlinie;* dann ist uns die Funktion versinnlicht als *Bewegung eines Punktes auf einer Geraden.*

Die Deutung der Funktion durch eine Kurve hat den großen Vorzug, daß die verschiedenen Funktionswerte „nebeneinander" in einem einzigen Bilde vereinigt sind. Vornehmlich werden wir also diese Deutung der Funktionen benutzen und häufig die einer Funktion entsprechende Kurve zu zeichnen haben. Bei solchen Zeichnungen bedienen wir uns zweckmäßig des sogenannten *Millimeterpapiers,* d. h. eines Papierbogens, der eine Einteilung in Quadratmillimeter trägt[2]). Ob wir dabei ein cm oder ein dm oder irgendeine andere Länge als Längeneinheit zugrunde legen, mag je nach Umständen entschieden werden. Es ist sogar manchmal zweckmäßig, für die Messung der Ordinaten eine andere Einheit zu wählen wie für die Abszissen. Wenn z. B. bei kleinen Änderungen von x die Veränderungen der Funktion verhältnismäßig groß ausfallen, so wird man die „Ordinateneinheit" kleiner wählen als die „Abszisseneinheit", um die Kurve, soweit man sie betrachten will, auf das Reißbrett zu bekommen.[3])

Die Versinnlichung der Funktion durch eine Kurve vermag uns übrigens auch zu neuen Aufgaben und zur Aufstellung neuer Begriffe hinzuführen. Eine in dieser Richtung liegende Ausführung wollen wir gleich hier geben, weil uns dieselbe eine nützliche Einübung der Sätze über den Grenzbegriff vermittelt und andrerseits die Grundlage für eine alsbald auszuführende Untersuchung liefert.

In einem durch $0 < a \leqq x \leqq b$ charakterisierten Intervalle sei eine stetige, mit wachsendem x beständig abnehmende Funktion gegeben, deren Werte im Intervalle überall > 0 seien. Die dieser Funktion entsprechende Kurve denken wir uns über dem Intervalle der x-Achse, für welches die Funktion erklärt ist, gezeichnet.

Jedermann wird nun zugeben, daß der von der Kurve, der x-Achse und den beiden Ordinaten bei $x = a$ und $x = b$ eingegrenzte Teil der Ebene (Fig. 1), gemessen in der Flächeneinheit (dem Quadrate der Längeneinheit), einen ganz bestimmten Flächeninhalt J hat. In besonders einfachen Fällen mag die Inhaltszahl J sogar nach elementar-planimetrischen Regeln berechenbar sein; aber auch in jedem anderen Falle meinen wir der Existenz und Bestimmtheit der Zahl J sicher zu sein. Und doch ist

---

1) Wir benutzen hier gleich die Bezeichnungen t und s für Argument und Funktion, wie sie in der Mechanik gebräuchlich sind.

2) Man vgl. die unten folgenden Figuren 2 bis 7, S. 27 ff.

3) Bei den weiter folgenden Zeichnungen ist jedoch stets die „Ordinateneinheit" gleich der „Abszisseneinheit" gewählt.

es, selbst wenn wir die elementaren planimetrischen Inhaltssätze als bekannt und bewiesen ansehen, ohne Zuhilfenahme etwa physikalischer und also der Sache fremder Erwägungen nicht ganz einfach, diese Sicherheit zu bestätigen. Eine Art, wie dies jedoch geschehen kann, ist die folgende:

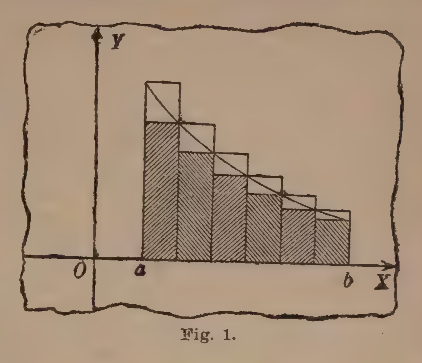


Fig. 1.

Wir verstehen unter n irgendeine Anzahl, setzen $\frac{b-a}{n} = h$ und zerlegen die von den Punkten a und b begrenzte Strecke der x-Achse durch Einzeichnung der $(n-1)$ Teilpunkte $a+h,\ a+2h, \cdots, a+(n-1)h$ in n gleich lange Teilstrecken. Die zu den $(n+1)$ Argumenten a, $a+h$, $a+2h, \cdots, a+nh=b$ gehörenden Funktionswerte bezeichnen wir durch

$$y_0 = f(a),\ y_1 = f(a+h),\ y_2 = f(a+2h), \cdots;\ y_n = f(a+nh) = f(b)$$

Tragen wir sie als Ordinaten auf, so zerlegen wir dadurch die fragliche Fläche in n Streifen, von denen der k^{te} links von y_{k-1} und rechts von y_k begrenzt wird. Da nun $y_{k-1} > y_k$ gilt, so ist (Fig. 1) das über der Grundlinie h des k^{ten} Streifens errichtete Rechteck der Höhe y_k nur erst ein vom Ganzen verschiedener Teil des Streifens, und ebenso ist der Streifen wieder ein vom Ganzen verschiedener Teil des größeren Rechtecks der Höhe y_{k-1} über der gleichen Grundlinie.

Der Begriff des Rechtecksinhaltes und die Regel seiner Berechnung gelten als bekannt. Alle n kleineren Rechtecke (in Fig. 1 schraffiert) zusammengelegt geben uns eine Fläche des Inhaltes:

(1) $$A_n = h(y_1 + y_2 + \cdots + y_n),$$

ebenso alle größeren Rechtecke eine Fläche des Inhaltes:

(2) $$B_n = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}).$$

Es gilt $A_n < B_n$; denn wir haben:

(3) $$B_n - A_n = h(y_0 - y_n) = (b-a)\,(f(a) - f(b)) \cdot \frac{1}{n} > 0.$$

Es gilt aber überhaupt für je zwei Anzahlen l und m stets:

(4) $$A_l < B_m;$$

denn die Fläche des Inhaltes A_l ist ein vom Ganzen verschiedener Teil der Fläche des Inhaltes B_m.

Indem wir jetzt der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzen, erhalten wir zwei unbegrenzte Reihen bestimmter Zahlen $A_1, A_2, \ldots$ und $B_1, B_2, \ldots,$

von denen wir leicht zu zeigen vermögen, *daß sie eine gemeinsame Grenze:*

(5) $$g = \lim_{n=\infty} A_n = \lim_{n=\infty} B_n$$

besitzen.[1]) Es ist nämlich zufolge (4) stets $A_{n+k} < B_n$ und also, wenn wir beiderseits A_n abziehen, zufolge (3):

(6) $$A_{n+k} - A_n < B_n - A_n, \quad A_{n+k} - A_n < (b-a)(f(a) - f(b)) \cdot \frac{1}{n}.$$

Fast ebenso leicht ergibt sich:

$$A_n - A_{n+k} < B_{n+k} - A_{n+k} = (b-a)(f(a)-f(b)) \cdot \frac{1}{n+k} < (b-a)(f(a)-f(b)) \cdot \frac{1}{n},$$

woraus wir folgern:

$$-(b-a)(f(a)-f(b)) \cdot \frac{1}{n} < A_{n+k} - A_n.$$

Diese und die zweite Ungleichung (6) fassen wir zusammen in:

$$|A_{n+k} - A_n| < (b-a)(f(a)-f(b)) \cdot \frac{1}{n},$$

gültig für je zwei Anzahlen n und k. Hieraus geht hervor, daß die Zahlenreihe $A_1, A_2, \ldots$ die Voraussetzung des Satzes von S. 5 erfüllt, und also gibt es eine bestimmte endliche Grenze $g = \lim_{n=\infty} A_n$. Aus (3) folgt weiter:

$$\lim_{n=\infty} (B_n - A_n) = \lim_{n=\infty} ((B_n - g) + (g - A_n)) = 0,$$

so daß sich aus $\lim_{n=\infty} (g - A_n) = 0$ leicht auch $\lim_{n=\infty} (B_n - g) = 0$ und damit die zu beweisende Gleichung (5) ergibt.

Übrigens gilt für jedes n die Ungleichung:

(7) $$A_n < g < B_n.$$

Gäbe es nämlich ein $A_l > g$, so setze man $A_l - g = \delta$ und ist dann der Existenz eines B_m sicher, welches der Ungleichung $|g - B_m| < \delta$ genügt und also im Widerspruch zu (4) kleiner als A_l sein müßte. Ebenso zeigt man, daß kein $B_m < g$ sein kann. Wäre aber ein $A_n = g$, so wäre sicher $A_{2n} > g$, wie man sich in Fig. 1 leicht deutlich macht. Ebenso erkennt man die Unmöglichkeit einer Gleichung $B_n = g$.

Die Zahl g stellt sich demnach als einzige Zahl zwischen die beiden Zahlen A_n und B_n *jedes* Paares, wie die Fläche, deren Inhalt wir erklären wollten, zwischen je die beiden Flächen der Inhalte A_n und B_n, deren eine sie als Teil enthält, und in deren anderer sie als Teil enthalten ist. Wir haben den Inhalt J demnach jetzt dahin zu erklären, *daß er begrifflich und seinem Zahlenwerte nach gleich der Grenze unserer beiden Zahlenreihen ist:*

(8) $$J = g = \lim_{n=\infty} A_n = \lim_{n=\infty} B_n.$$

1) Die beiden Reihen sind übrigens keineswegs immer monoton.

Unsere Methode zur Bestimmung des Flächeninhaltes J, welche wir späterhin noch verschiedentlich weiter zu entwickeln und zu verfeinern haben, liefert uns zwar für den Zahlenwert J nur zwei Reihen von „Näherungswerten“. Daß aber unsere Näherungsbetrachtungen auch bereits hier leicht zu genauen Ergebnissen führen können, möge die folgende weitere Überlegung dartun.

Es sei μ irgendeine von 0 verschiedene positive Zahl. Man setze dann, unter $f(x)$ die eben betrachtete Funktion verstanden, $y' = \mu \cdot f(x)$, wodurch y' als eine im Intervall $a \leqq x \leqq b$ gleichfalls stetige und mit wachsendem x beständig abnehmende Funktion von x erklärt ist. Die Kurve der neuen Funktion erhalten wir aus der eben betrachteten Kurve einfach dadurch, daß wir jede Ordinate y nach dem Verhältnis $\mu : 1$ in y' abändern. Insbesondere wird demnach auch jede der $(n+1)$ Ordinaten y_k, die in (1) und (2) auftreten, abgeändert in $y'_k = \mu y_k$. Wenn wir also den Inhalt J' des von der neuen Kurve, der x-Achse und den Ordinaten bei $x = a$ und $x = b$ umgrenzten Ebenenstücks nach unserer Methode bestimmen, so treten dabei an Stelle der in (1) und (2) angegebenen A_n und B_n die Zahlen $A'_n = \mu A_n$, $B'_n = \mu B_n$. Diese aber nähern sich der Grenze $\mu g = \mu J$, *so daß, wenn wir den Inhalt J kennen, der Inhalt J' des neuen Flächenstücks genau durch die Formel $J' = \mu J$ gegeben ist.*

Übrigens kann man die mit den Ordinaten der ersten Kurve vorgenommenen Änderungen auch gleich auf *alle* Punkte der Ebene beziehen, indem man allgemein an Stelle des Punktes (x, y) den durch:

$$x' = x, \qquad y' = \mu y \tag{9}$$

gegebenen Punkt (x', y') treten läßt. Durch diese „Transformation“ wird dann unser Flächenstück des Inhaltes J in ein ähnlich gestaltetes Flächenstück über der gleichen Basis übergeführt, das gegenüber dem ersten Stück gedehnt oder zusammengedrückt erscheint, je nachdem $\mu > 1$ oder $\mu < 1$ ist. Der Inhalt des neuen Flächenstücks ist dann eben der mit μ multiplizierte Inhalt des ursprünglichen Stücks.

Man überlege gleich auch noch, wie die durch:

$$x' = \mu x, \qquad y' = y \tag{10}$$

gegebene Transformation auf das Flächenstück wirkt. Jetzt werden bei gleichbleibenden Ordinaten die Abszissen im Verhältnis $\mu : 1$ geändert; wir erhalten wieder ein ähnlich gestaltetes Flächenstück, das, je nachdem $\mu > 1$ oder $\mu < 1$ ist, gegenüber dem ursprünglichen nach rechts verschoben und gedehnt oder nach links verschoben und zusammengedrückt erscheint. Setzen wir zur Inhaltsbestimmung die Formeln (1) und (2) an, so bleiben nun die y_k unverändert, während h durch $h' = \mu h$ zu ersetzen ist. Wiederum wird demnach $J' = \mu J$ sein

Indem wir beide Arten der betrachteten Transformationen nacheinander ausüben, ergibt sich noch folgender, alsbald zu verwendender Satz: *Die Transformation:*

(11) $$x' = \mu x, \quad y' = \nu y$$

führt das oft genannte Flächenstück des Inhaltes J in ein ähnlich gestaltetes Flächenstück über, dessen Inhalt $J' = \mu\nu \cdot J$ ist.

9. Die Funktionen x^n und ihre inversen Funktionen $\sqrt[n]{x}$. Eine Klasse einfacher aber sehr wichtiger Funktionen stellen die Potenzen x^n *mit ganzzahligen positiven Exponenten* $n = 1, 2, \ldots$ dar. Ihre Betrachtung wird uns zu einigen neuen Begriffen hinführen, mit denen wir uns ohnehin bekannt machen müssen. Zunächst ist beim einzelnen n die Funktion x^n für jedes Argument x mit einer bestimmten Zahl $y = x^n$ gleich, so daß die Funktion $y = x^n$ *für unbeschränkt veränderliches x erklärt* ist. Ist $x \geqq 0$, so ist auch $y \geqq 0$; und sind x_1 und x_2 zwei verschiedene nichtnegative Argumente, von denen x_1 das kleinere sei, so sind auch $y_1 = x_1^n$ und $y_2 = x_2^n$ verschieden, und es gilt $y_1 < y_2$: *Die Funktion x^n ist also in jedem durch $0 \leqq a \leqq x \leqq b$ charakterisierbaren Intervalle monoton und mit wachsendem x beständig wachsend.* Für die beiden eben genannten Argumente x_1, x_2 schreiben wir aus einer S. 11 aufgestellten Ungleichung:

(1) $$n x_1^{n-1} < \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} < n x_2^{n-1}$$

ab als für alle Anzahlen $n \geqq 2$ gültig; die damaligen Voraussetzungen würden zwar die Bedingung $x_1 > 0$ einschließen, doch gilt (1) offenbar auch noch für $x_1 = 0$. Wir folgern hieraus, daß für irgend zwei dem Intervalle $0 \leqq a \leqq x \leqq b$ entnommene Argumente x_1, x_2 die Ungleichung:

$$|x_2^n - x_1^n| < n b^{n-1} |x_2 - x_1|$$

besteht. Hieraus aber ergibt sich sofort (S. 17), *daß die Funktion x^n in jedem Intervalle $0 \leqq a \leqq x \leqq b$ stetig ist, eine Behauptung, die in dem eben ausgeschlossenen Falle $n = 1$, d. h. bei der Funktion $y = x$, selbstverständlich ist.*

Setzen wir an Stelle von x das Argument $-x$, so bleibt der zugehörige Funktionswert y unverändert, oder er geht selbst in seinen entgegengesetzten Zahlenwert über, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Wir verabreden gleich allgemein: *Hat die Funktion $f(x)$ die besondere Eigenschaft, daß sie bei Zeichenwechsel von x entweder stets (d. h. welcher Wert x auch vorliegt) unverändert bleibt oder stets Zeichenwechsel erfährt, so bezeichnen wir sie als eine „gerade" bzw. als eine „ungerade" Funktion.* Die Kurve einer geraden Funktion hat die y-Achse zur Symmetrielinie oder geht bei Spiegelung an der y-Achse in sich selbst über; demgegenüber geht die Kurve einer ungeraden Funktion in sich über, wenn wir

sie um den Nullpunkt O des Koordinatensystems in der x, y-Ebene um 180° herumdrehen.

In Fig. 2 ist der Verlauf der Funktion $y = x^n$ in den niedersten Fällen $n = 1, 2, 3$ und 4 in der Nähe des Nullpunktes O durch die zugehörigen Kurven dargestellt[1]); für $n = 1$ liegt natürlich eine Gerade

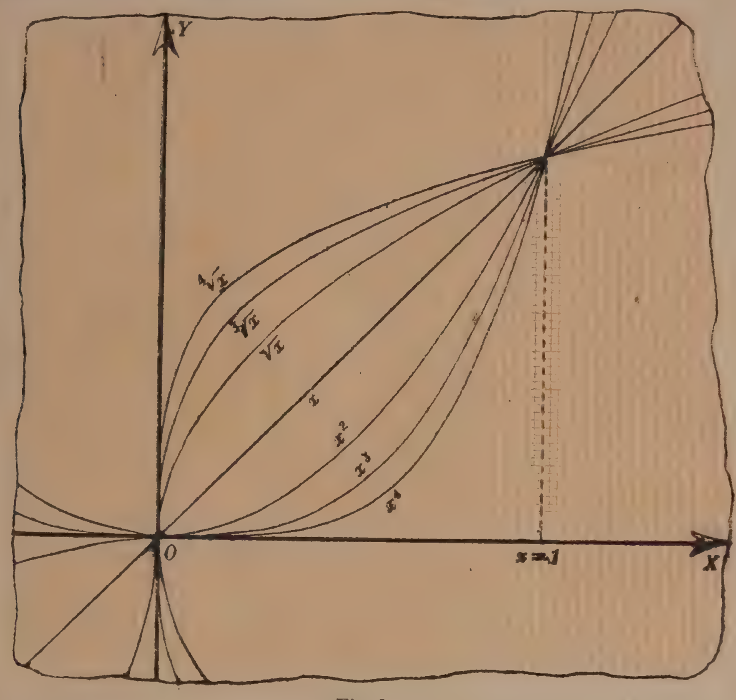


Fig. 2.

vor und für $n = 2$ eine Parabel; eine Länge von 5 cm ist als Längeneinheit gewählt. Alle Kurven laufen durch den Nullpunkt O und den Punkt der Koordinaten $x = 1$, $y = 1$ hindurch. Unter zwei zu verschiedenen n gehörigen Kurven läuft die mit dem kleineren n im Intervall $0 < x < 1$ oberhalb, für $x > 1$ aber unterhalb der mit dem größeren n.[2]) Nähert sich x als stetige Variable der Grenze $+\infty$ (S. 14), so gilt auch

1) Zur Kürzung numerischer Rechnungen bei Kurvenkonstruktionen und sonstigen Gelegenheiten wolle sich der Leser von vornherein mit einem Tabellenwerke versehen, in dem die Quadrate, Kuben, Reziproken, Quadratwurzeln und Kubikwurzeln der ganzen Zahlen von 1 bis 1000 angegeben sind, auch die Werte der Logarithmen, der Kreisfunktionen und der Hyperbelfunktionen zusammengestellt sind. Man findet solche Zusammenstellungen z. B. in dem von dem Verein „Hütte" herausgegebenen „Taschenbuch des Ingenieurs".

2) Die Richtung nach *oben* ist entsprechend den Zeichnungen an der Wandtafel diejenige der *positiven* y-Achse.

$\lim y = +\infty$; ebenso folgt für $\lim x = -\infty$ als Verhalten der Funktion $\lim y = \pm\infty$, wo das obere Zeichen für gerades n, das untere für ungerades n gilt. *Wir können demnach in diesem Falle $+\infty$ und $-\infty$ auch noch als Argumente x zulassen, denen dann die „Werte" $+\infty$ bzw. $\pm\infty$ der Funktion entsprechen.*

Zufolge der Stetigkeit und Monotonie nimmt unsere Funktion $y = x^n$, die bei $x = 0$ verschwindet und für $\lim x = +\infty$ selbst den „Wert" $+\infty$ annimmt, jeden beliebigen nicht-negativen Wert y für ein und nur ein bestimmtes nicht-negatives Argument x an (S. 18). Wir können demnach die Beziehung zwischen den beiden Variablen x und y auch so auffassen, daß jedem willkürlich gewählten nicht-negativen y eine bestimmte Zahl x zugeordnet ist; dann also ist y als unabhängig und x als abhängig gedacht, und x wird zu einer Funktion $x = \varphi(y)$ des Argumentes y.

Zur geometrischen Deutung dieser Funktion $x = \varphi(y)$ haben wir die Kurve der ursprünglichen Funktion $y = f(x)$ so konstruiert zu denken, daß wir die Zahlenwerte y als Abszissen auf der y-Achse abtragen und dann allemal die zugehörigen Funktionswerte x als Ordinaten senkrecht zur y-Achse errichten. Dies würde indessen dem bisherigen Brauche widersprechen. Wir ziehen demnach vor, unter Austausch der Bezeichnungen x und y die Gleichung $x = \varphi(y)$ in die Gestalt $y = \varphi(x)$ umzuschreiben, tragen nun wieder die Argumente x auf der ursprünglichen x-Achse ab und errichten die y als Ordinaten senkrecht. Die entstehende Kurve ist dann offenbar einfach das Spiegelbild der Kurve der ursprünglichen Funktion $y = f(x)$ an der in Fig. 2 gezeichneten und durch $y = x$ dargestellten Winkelhalbierenden des Achsenkreuzes. So entstehen insbesondere aus den drei in Fig. 2 gezeichneten Kurven der Funktionen x^2, x^3, x^4 die drei in der Figur gleichfalls angegebenen Kurven, welche die Bezeichnungen $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$ tragen.

Den hier vollzogenen Übergang von der Funktion $f(x)$ zur Funktion $\varphi(x)$ nennen wir „*Inversion*" oder „*Umkehrung*" der Funktion $f(x)$, und entsprechend heißt $\varphi(x)$ die zu $f(x)$ „*inverse*" oder „*umgekehrte Funktion*". Es ist selbstverständlich, daß jede von beiden Funktionen die inverse der anderen ist, wie denn natürlich die Kurve der Funktion $\varphi(x)$ durch Spiegelung an der genannten Winkelhalbierenden wieder in die erste Lage, d. i. in die Kurve von $f(x)$ zurückkehrt.

Wenn wir eben der Einfachheit wegen die Umkehrung unserer besonderen Funktion x^n nur auf die nicht-negativen Werte von x und y bezogen, so kann diese Beschränkung jetzt hinterher leicht abgestreift werden. Wir haben in Fig. 2 die Kurven sogleich in ihrem ganzen zur Abbildung gelangenden Verlaufe an der Winkelhalbierenden gespiegelt und übrigens in Fig. 3 nochmals für die beiden niedersten Fälle $n = 2$

und $n = 3$ unter Wahl von 1 cm als Längeneinheit die Kurven der zu x^n inversen Funktionen dargestellt. Hier kommt wieder der Unterschied zwischen geraden und ungeraden Zahlen n zur Geltung. Im Falle eines geraden n ist die Kurve zur x-Achse symmetrisch, liefert für jedes $x > 0$ zwei nur im Vorzeichen verschiedene y, für $x = 0$ nur den einen Wert $y = 0$ und endlich für $x < 0$ überhaupt keinen zugehörigen Funktionswert. Wir haben hier zum ersten Male die Gelegenheit, den Fall zu beobachten, *daß jedem einzelnen Argumente x mehr als ein Funktionswert zugeordnet ist.* Man wird es sofort verstehen, wenn wir für gerades n die zu x^n inverse Funktion bei allen $x > 0$ als „*zweideutig*“, bei $x = 0$ als „*eindeutig*“ und folgerecht für $x < 0$ als „*nulldeutig*“ bezeichnen. Eine Beeinträchtigung der Bedeutung aller unserer bisherigen Betrachtungen über Stetigkeit, Monotonie usw. durch das Auftreten der „*Mehrdeutigkeit*“ ist keineswegs zu befürchten. So werden sich z. B. bei der eben betrachteten für $x > 0$ zweideutigen Funktion alle positiven Werte y (und ebenso alle negativen) zu einer eindeutigen Funktion zusammenfügen, auf die jene Betrachtungen unmittelbar Anwendung finden. Den Fall einer ungeraden Zahl n veranschauliche man sich am Beispiele $n = 3$, welches die in Fig. 3 mit der Bezeichnung $\sqrt[3]{x}$ bezeichnete Kurve liefert. Jetzt ist die zu x^n inverse Funktion für alle x eindeutig und liefert eine stetige, mit wachsendem x beständig wachsende Funktion.

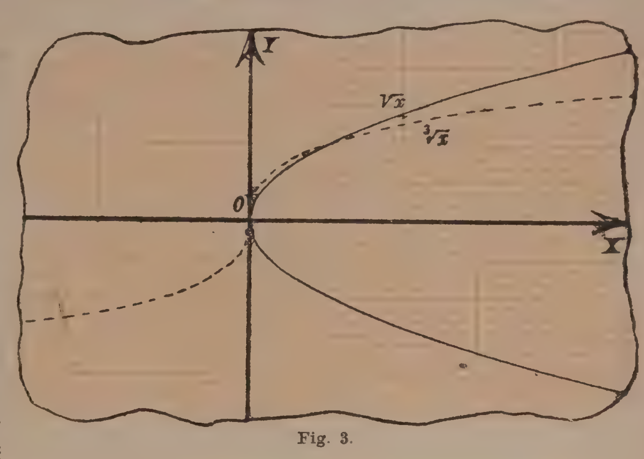


Fig. 3.

Rechnerisch haben wir hier mit bekannten und sehr einfachen Dingen zu tun, die uns jedoch noch zu ein paar neuen Benennungen hinführen sollen. Indem wir in der Gleichung $y = x^n$ den Wechsel der Bezeichnungen der Variablen vornehmen, erscheint die zugehörige inverse Funktion y von x mit x verknüpft durch die Gleichung $y^n - x = 0$. Wenn wie hier *y als Funktion von x durch Nullsetzen eines x und y umfassenden Ausdrucks erklärt* ist, so sagen wir, y sei „*unentwickelt*“ oder „*implizite*“ als Funktion von x gegeben. Die Ausrechnung von y aus der Gleichung würde uns dann die Funktion, wie man sagt, „*entwickelt*“ oder „*explizite*“, d. h. in unserer bisher benutzten Gestalt $y = \varphi(x)$ ergeben. Im vor-

liegenden Falle ist nun, wenn wir das Zeichen der Radizierung gebrauchen, einfach $y = \sqrt[n]{x}$ die entwickelte Darstellung der Funktion, so daß wir in x^n und $\sqrt[n]{x}$ ein erstes Beispiel zweier zueinander inverser Funktionen vor uns haben.

Auch die Potenzen mit negativen Exponenten:

$$(2) \qquad y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

führen uns noch zu einer bisher nicht betrachteten Tatsache. Die Funktion (2) ist für jedes von 0 verschiedene Argument eine bestimmte Zahl y; aber für $x = 0$ gibt es, da die Division durch 0 unstatthaft ist, keine zugehörige Zahl y, so daß die Funktion (2) zunächst nur für die von 0 verschiedenen Argumente x erklärt ist. Nähert sich nun x als stetig abnehmende Variable der Grenze 0, so gilt, wie wir sahen, dasselbe von x^n, und also wird sich $y = x^{-n}$ stetig der Grenze $+\infty$ nähern (S. 14 u. f.). Nähert sich x als stetig wachsende Variable oder, wie wir im Anschluß an die Zahlenlinie sagen können, von links her der Grenze 0, so wird entsprechend $\lim y = +\infty$ oder $= -\infty$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. *Wir wollen in diesem Falle den Punkt $x = 0$ der Zahlenlinie oder der x-Achse als einen „Unendlichkeitspunkt" der Funktion bezeichnen.*[1])

Für $\lim x = +\infty$ und ebenso für $\lim x = -\infty$ nähert sich die durch die Gleichung (2) erklärte Funktion y stetig der Grenze 0. Hier können wir also auch wieder $+\infty$ und $-\infty$ als Argumente x zulassen, denen beide Male der Funktionswert $y = 0$ entspricht.

Weitere Ausführungen über die Funktionen (2) wird man mühelos hinzufügen. In Fig. 4 sind die zugehörigen Kurven für $n = 1$ und $n = 2$ gegeben, wobei man im ersten Falle mit einer auf ihre Asymptoten als Koordinatenachsen bezogenen gleichseitigen Hyperbel zu tun hat.[2]) Wir erkennen nach den allgemeinen Sätzen (S. 20) sofort, daß die Funktion $y = x^{-n}$ in einem Intervalle $0 < a \leqq x \leqq b$ stetig, monoton und mit wachsendem x beständig abnehmend ist. In diesem Intervalle nimmt z. B. die Funktion $y = x^{-1}$ jeden zwischen b^{-1} und a^{-1} gelegenen Wert y einmal und nur einmal an, nämlich einfach an der Stelle $x = y^{-1}$.

---

1) Die betrachtete Funktion ist zwar (zufolge des Satzes von S. 20) in jedem Intervalle $0 < a < x \leqq b$ gleichmäßig stetig; doch gilt dies nicht für das abgeschlossene Intervall $0 \leqq x \leqq b$, da ja die Funktion im linken Endpunkte dieses Intervalles unendlich wird und die Erklärung der gleichmäßigen Stetigkeit in einem abgeschlossenen Intervalle die Endlichkeit der Funktion daselbst zur Voraussetzung hat. Etwas schwieriger ist einzusehen, daß unsere Funktion auch in dem linksseitig „nicht-abgeschlossenen" Intervalle $0 < x \leqq b$ nicht gleichmäßig stetig ist; doch gehen wir hierauf nicht näher ein, da die gleichmäßige Stetigkeit oben nur für abgeschlossene Intervalle erklärt wurde.

2) Als Längeneinheit haben wir hier 2 cm gewählt.

Den Übergang zu den mit (2) inversen Funktionen:

(3) $$y = x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

wolle man sich durch Spiegelung der Kurven der Funktionen (2) an der Winkelhalbierenden des Koordinatenkreuzes veranschaulichen. Dabei ist

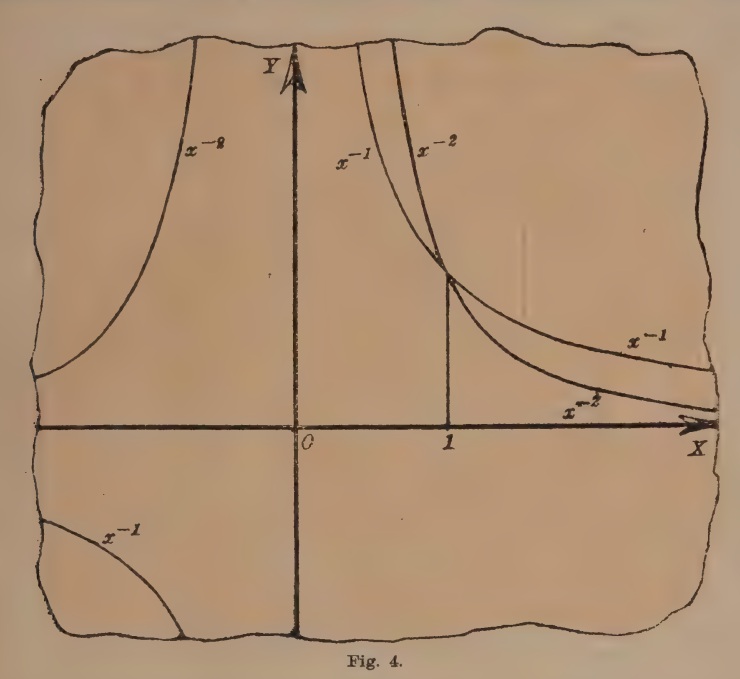


Fig. 4.

wieder die Fallunterscheidung der geraden und ungeraden n zu treffen; die Funktionen (3) haben bei $x = 0$ einen Unendlichkeitspunkt, sind übrigens in jedem den Unendlichkeitspunkt nicht enthaltenden abgeschlossenen Intervalle stetig usw.

10. Inhaltsberechnungen bei der gleichwertigen Hyperbel. Die S. 23 ff. über die Flächeninhalte gegebenen Ausführungen passen unmittelbar auf den zur rechten Seite der y-Achse gelegenen Zweig der gleichseitigen Hyperbel, durch welche wir soeben die Funktion $y = x^{-1}$ veranschaulichten. Ist x irgendeine von 0 verschiedene positive Zahl, so hat das Ebenenstück, welches durch die zu diesem x gehörende Hyperbelordinate $y = x^{-1}$, durch die beim Argumente 1 eintretende Ordinate $y = 1$, sowie durch die zwischenliegenden Teile der Hyperbel und der x-Achse eingegrenzt ist, einen bestimmten von x abhängenden Inhalt. Wir wollen unter $f(x)$ den Zahlenwert dieses Inhaltes verstehen, falls

$x > 1$ ist; für $x < 1$ sei dagegen $f(x)$ der mit negativem Vorzeichen versehene Zahlenwert dieses Inhaltes. Hierdurch ist jeder von 0 verschiedenen positiven Zahl x eine bestimmte Zahl $f(x)$ zugeordnet, und zwar ist $f(x) < 0$ für $0 < x < 1$ und $f(x) > 0$ für $x > 1$, während $f(1) = 0$ gilt. Dadurch, daß wir $f(x)$ für $0 < x < 1$ mit der *negativ* genommenen Inhaltszahl des Ebenenstücks gleichsetzten, erreichen wir, *daß die Funktion $f(x)$ für alle $x > 0$, d. h. soweit die Funktion überhaupt erklärt ist, „monoton" und mit wachsendem x „beständig wachsend" ist.* Sicher ist auch $f(x)$ *in jedem Intervalle* $0 < a \leqq x \leqq b$ *„stetig"*. Offenbar ist nämlich $(f(x_2) - f(x_1))$ für irgend zwei diesem Intervalle entnommene x_1 und $x_2 > x_1$ der Inhalt des von der Hyperbel, der x-Achse und den bei x_1 und x_2 gelegenen Ordinaten eingegrenzten Flächenstücks. Dieses Stück aber ist ein Teil des über der gleichen Grundlinie errichteten Rechtecks der Höhe x_1^{-1}. Da nun $x_1 \geqq a$ und also $x_1^{-1} \leqq a^{-1}$ gilt, so folgt:

$$f(x_2) - f(x_1) = |f(x_2) - f(x_1)| < x_1^{-1} \cdot (x_2 - x_1) \leqq a^{-1} \cdot |(x_2 - x_1)|.$$

Es wird demnach $|f(x_2) - f(x_1)| < \delta$ zutreffen, so oft $|x_2 - x_1| \leqq \lambda$ ist, unter λ die von 0 verschiedene Zahl $a \cdot \delta$ verstanden. Daraus aber folgt die Stetigkeit von $f(x)$ im fraglichen Intervall.

Um über die Werte der Funktion $f(x)$ in der Nähe der Stelle $x = 1$ einige Angaben zu machen, haben wir in Fig. 5 (S. 33) unter Wahl von 1 dm als Längeneinheit die Hyperbel im Intervall $1 \leqq x \leqq 3$ gezeichnet und die aus einer Reziprokentafel entnommenen Ordinaten für $x = 1{,}0$; $1{,}1$; $1{,}2$; ...; 3 in die Figur eingetragen.[1]) Wollen wir nun etwa nach den Methoden von S. 23ff. den Inhalt $f(2)$ näherungsweise berechnen, so setzen wir unter Benutzung der damals gebrauchten Bezeichnungen im Anschluß an Fig. 5:

$$n = 10,\ h = \tfrac{1}{10},\ y_0 = 1,\ y_1 = 0{,}9091,\ \ldots,\ y_{10} = 0{,}5.$$

Die beiden S. 23 mit A_{10} und B_{10} bezeichneten Näherungswerte bestimmen sich daraufhin mit Hilfe der Rechenmaschine in ein paar Sekunden zu $A_{10} = 0{,}6688$ und $B_{10} = 0{,}7188$, überall auf vier Dezimalstellen gekürzt; es gilt somit:

$$0{,}6688 < f(2) < 0{,}7188.$$

Die hier erzielte Annäherung ist nur erst eine sehr rohe, da die beiden Schranken sich noch um 5 Einheiten der zweiten Dezimalstelle unterscheiden. Eine weit bessere Annäherung erzielen wir dadurch, daß wir den Hyperbelbogen, der den einzelnen der zehn Streifen oben be-

1) Um mit der Breite der Druckseite zu reichen, sind die beiden durch $n = 2$ getrennten Hälften des Intervalles übereinander getragen, wobei die Koordinaten für die rechte Hälfte des Intervalles durch Einklammerung kenntlich gemacht sind.

grenzt, durch seine Sehne, die oberhalb des Hyperbelbogens liegt, ersetzen. An Stelle des Streifens tritt dann ein nur wenig größeres Trapez. Für die Summe der zehn Trapezinhalte rechnen wir leicht den Betrag $B'_{10} = 0{,}6938$ aus. Zeichnen wir uns andrerseits in einzelnen Streifen die in der Mitte verlaufende Ordinate und in ihrem Endpunkte die Hyperbeltangente, so grenzt diese ein etwas zu kleines Trapez ein, dessen Flächenzahl die durch 10 geteilte Länge der

Fig. 5.

inmitten gelegenen Ordinate ist. Die Reziprokentafel liefert daraufhin die untere Schranke $A'_{10} = 0{,}6928$. Man findet so:

$$0{,}6928 < f(2) < 0{,}6938$$

als bereits weit bessere Annäherung. Aus späteren Rechnungen ergibt sich der Wert von $f(2)$ auf vier Dezimalstellen zu:

$$f(2) = 0{,}6931\,.$$

Berechnet man nach der letzten Methode aus den weiter in Fig. 5 angegebenen Ordinaten, sowie den aus der Reziprokentafel hervorgehen-

den Hyperbelordinaten für $x = 2{,}05;\ 2{,}15;\ \ldots;\ 2{,}95$ den Flächeninhalt $f(3) - f(2)$, so findet sich hierfür die gute Annäherung:

$$0{,}4054 < f(3) - f(2) < 0{,}4059,$$

woraus für den Wert $f(3)$ mit Rücksicht auf $f(2) = 0{,}6931$ folgt:

$$1{,}0985 < f(3) < 1{,}0990.$$

Tatsächlich ist der auf vier Stellen gekürzte Wert von $f(3)$ gleich 1,0986.

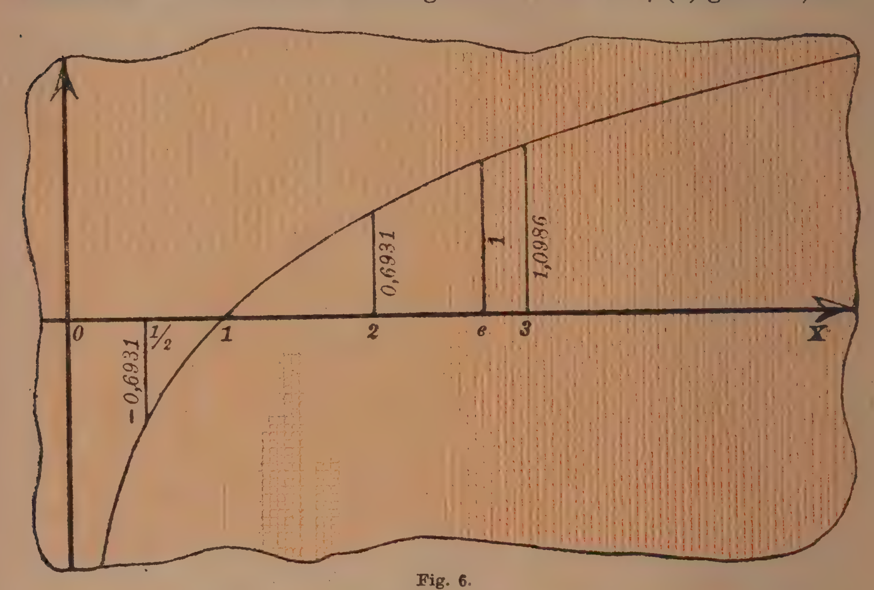


Fig. 6.

Da $f(x)$ mit x beständig wächst und stetig ist, so gibt es zwischen 2 und 3 eine bestimmte Zahl x, *für welche* $f(x) = 1$ *ist*. Diese weiterhin sehr wichtige Zahl bezeichnen wir mit e und wollen gleich einen Näherungswert derselben feststellen. Zu diesem Zwecke berechnen wir uns für die zwischen 2 und 3 gelegenen Argumente nach unserer Methode die Funktionswerte $f(2{,}1), f(2{,}2), f(2{,}3), \ldots$ und stellen im Laufe dieser Rechnung leicht fest, daß $f(2{,}7) = 0{,}9933$, also < 1 und $f(2{,}8) = 1{,}0296$, also > 1 ist. Hieraus folgt $2{,}7 < e < 2{,}8$. Ersetzen wir nun die gleich zu zeichnende Kurve der Funktion $f(x)$ im Intervall $2{,}7 < x < 2{,}8$ durch ihre zugehörige Sehne, so wird die Ordinate dieser Sehne zufolge einer einfachen Ähnlichkeitsbetrachtung bei demjenigen Werte $x = e$ gleich 1 werden, der aus der Proportion

$$(f(2{,}8) - 1) : (1 - f(2{,}7)) = (2{,}8 - e) : (e - 2{,}7)$$

folgt. Hieraus berechnet sich als Näherungswert von e:

(1) $$e = 2{,}7183,$$

der, wie wir noch sehen werden, in der Tat die Zahl e auf vier Stellen genau angibt.

In Fig 6 ist die Kurve unserer Funktion $f(x)$ in der Umgebung von $x = 1$ dargestellt; die Zeichnung kann natürlich mit der Genauigkeit der vorstehenden numerischen Angaben nicht entfernt wetteifern. Für die Fortsetzung der Kurve von $x = 1$ nach links haben wir übrigens bei der Zeichnung sogleich von dem bald zu beweisenden Gesetze $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ Gebrauch gemacht. Die Längeneinheit ist hier gleich 2 cm gewählt.

11. Additionstheorem für die Inhaltsfunktion $f(x)$ bei der gleichseitigen Hyperbel. Für die in § 10 betrachtete Funktion $f(x)$ existiert ein wichtiges Theorem, das auf einer einfachen Eigenschaft der Hyperbel beruht. Ist μ irgend eine positive Zahl[1]), so wird durch die Transformation:

(1) $$x' = \mu x, \quad y' = \mu^{-1} y$$

ein Punkt (x, y) stets in einen Punkt (x', y') übergeführt, der in demselben durch die Koordinatenachsen eingegrenzten Quadranten liegt. Gilt insbesondere $x \cdot y = 1$, so folgt auch $x' \cdot y' = 1$ und umgekehrt. Hieraus aber ist zu entnehmen, *daß der zur Erklärung der Funktion $f(x)$ benutzte Hyperbelzweig durch die Transformation* (1) *in sich übergeführt wird.*

Die Transformation (1) ordnet sich nun der noch etwas allgemeineren Transformation (11) S. 26 unter. Sind x_1 und $x_2 > x_1$ irgend zwei positive Zahlen, so folgt aus den Entwicklungen von S. 25, daß unser oft genanntes Ebenenstück des Inhaltes $(f(x_2) - f(x_1))$ durch die Transformation (1) in ein ähnlich gestaltetes zu den Abszissen $x_1' = \mu x_1$, $x_2' = \mu x_2$ gehörendes Stück übergeführt wird, welches zufolge des eben ausgesprochenen Satzes oberhalb wieder durch die Hyperbel begrenzt wird. Nach dem Schlußsatz von § 8, S. 26, bleibt der Inhalt des Flächenstücks bei dieser Transformation unverändert, so daß die Relation:

(2) $$f(\mu x_2) - f(\mu x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

besteht. Die Bedingung $x_2 > x_1$ ist hierbei übrigens keineswegs wesentlich; offenbar gilt (2) auch für $x_2 = x_1$ und für $x_2 < x_1$, d. h. also für irgend drei positive Zahlen x_1, x_2, μ.

Als Beispiel wählen wir zunächst $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $\mu = x^{-1}$ und erhalten das Gesetz:

(3) $$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x),$$

das wir schon vorhin bei der Zeichnung der Kurve benutzten.

---

1) Bei Gebrauch dieser Sprechweise soll die Zahl 0 stets ausgeschlossen sein; ist $\mu = 0$ zugelassen, so sprechen wir von einer „nicht-negativen“ Zahl μ.

Wir wählen zweitens $x_1 = 1$ und gebrauchen hernach statt μ wieder die Bezeichnung x_1, wodurch sich:

(4) $$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

ergibt. Ersetzen wir hier x_2 durch das Produkt $x_2 \cdot x_3$ irgend zweier positiver Zahlen x_2, x_3, so folgt:

$$f(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) = f(x_1) + f(x_2 \cdot x_3) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3).$$

Offenbar ergibt sich durch Wiederholung der gleichen Überlegung für jede Anzahl n positiver Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

(5) $$f(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n).$$

In dieser Gleichung kommt das „*Additionstheorem*" der Funktion $f(x)$ zum Ausdruck: *Durch Addition von irgend n Funktionswerten $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n)$ erhält man den Funktionswert, welcher dem Produkte $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ der n Argumente $x_1, x_2, \cdots, x_n$ entspricht.*

Sind alle n Argumente einander gleich, so folgt:

(6) $$f(x^n) = n \cdot f(x).$$

Diese Formel gilt auch für $n = 0$, da $f(x^0) = f(1) = 0$ ist, sowie zufolge (3) auch für die negativen ganzen Zahlen n. Setzen wir, unter n wieder eine positive ganze Zahl verstanden, $x^n = x_1$, so können wir auch x_1 beliebig positiv wählen und haben dann nach S. 28 immer eine eindeutig zugehörige *positive* Zahl $x = \sqrt[n]{x_1} = x_1^{\frac{1}{n}}$, für welche $x^n = x_1$ zutrifft. Gleichung (6) liefert $f(x_1) = n \cdot f\left(\sqrt[n]{x_1}\right)$ oder, wenn wir den Index 1 fortlassen:

(7) $$f\left(\sqrt[n]{x}\right) = f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} f(x).$$

Tragen wir endlich in $f(x^m) = m \cdot f(x)$, unter m irgend eine ganze Zahl[1]) verstanden, $\sqrt[n]{x}$ an Stelle von x ein, so folgt unter Benutzung von (7):

$$f\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = m \cdot f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{m}{n} f(x).$$

Also gilt der Satz: *Ist a irgend eine rationale Zahl, so ist:*

(8) $$f(x^a) = a \cdot f(x).$$

Wir können jetzt beweisen, *daß die Zahl e, für welche $f(e) = 1$ ist, identisch ist mit der in* (7) S. 11 *erklärten Zahl e.* Ist $x > 1$, so bedeutet $f(x)$ den Inhalt eines oben durch die Hyperbel begrenzten Flächenstücks der Grundlinie $(x - 1)$ und der seitlichen Ordinaten 1 und x^{-1}. Es liegt

1) D. i. eine positive oder negative ganze Zahl oder die Zahl 0.

also $f(x)$ zwischen den Rechtecken der gemeinsamen Grundlinie $(x-1)$ und der Höhen 1 bzw. x^{-1}:

$$(x-1)\cdot x^{-1} < f(x) < x-1.$$

Ist n eine positive ganze Zahl, so ist $x = 1 + \frac{1}{n} > 1$, so daß die vorstehende Ungleichung für dieses x gilt:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < f\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Multiplizieren wir mit der *positiven* Zahl n, so folgt mit Benutzung von (8):

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < f\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] < 1.$$

Für $\lim n = +\infty$ nähert sich die linke Seite dieser Ungleichung der auf der rechten Seite stehenden Zahl 1 als Grenze, während sich das Argument der Funktion f der in (7) S 11 erklärten Grenze e nähert. Aus der Stetigkeit der Funktion (s. S. 17) folgt also für dieses e die Gleichung $f(e) = 1$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Es ist bislang noch nicht festgestellt, wie sich $f(x)$ verhält, falls x als stetige Variable sich der Grenze $+\infty$ nähert. Ist ω eine beliebig groß gewählte Zahl und a eine rationale Zahl, die $> \omega$ ist, so ist zufolge (8) offenbar $f(x) > \omega$, sobald $x > e^a$ ist. Hieraus ergeben sich die Eigenschaften:

(9) $$\lim_{x=+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x=0} f(x) = -\infty,$$

da die zweite Gleichung auf Grund von (3) aus der ersten soeben bewiesenen folgt. Die in Fig. 6 begonnene Kurve unserer Funktion $f(x)$ setzt sich somit nach rechts in der Art fort, *daß die Ordinate y mit der Abszisse x über alle Grenzen wächst, während sich die Kurve nach links hin der negativen y-Achse „asymptotisch" nähert.* Bei der Monotonie und Stetigkeit der Funktion können wir das Ergebnis auch dahin aussprechen, *daß jede beliebig gewählte Zahl y als Funktionswert bei einem und nur einem Argumente x eintritt.*

12. Die natürliche Exponentialfunktion e^x und der natürliche Logarithmus $\ln x$. Die letzten Sätze werden grundlegend, wenn wir jetzt die zu $f(x)$ inverse Funktion $\varphi(x)$ betrachten. Wir haben in Fig. 7 (S. 38) sogleich die Kurve dieser Funktion $\varphi(x)$ durch Spiegelung der Kurve von $f(x)$ an der Winkelhalbierenden des Achsenkreuzes hergestellt (s. S. 28), wobei wir als Längeneinheit 2 cm wählten.[1]) Wir erkennen sofort: *Die*

1) Einige auf vier Dezimalstellen gekürzte Werte der Funktion $\varphi(x)$ sind in der Figur angegeben.

Funktion $\varphi(x)$ *ist eine für unbeschränktes* x *erklärte eindeutige Funktion, die stetig und mit wachsendem* x *beständig wachsend ist; für* $x < 0$ *gilt* $0 < \varphi(x) < 1$, *für* $x > 0$ *aber* $\varphi(x) > 1$, *und endlich bestehen die Gleichungen:*

$$(1) \qquad \varphi(0) = 1, \quad \lim_{x=-\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x=+\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

Setzt man $x = e$ in (8) S. 36 ein, so folgt wegen $f(e) = 1$ die Gleichung $f(e^a) = a$ und nach Inversion $e^a = \varphi(a)$. *Die Funktion* $\varphi(x)$ *hat demnach für jedes „rationale“* x *einfach die Bedeutung:*

$$(2) \qquad \varphi(x) = e^x,$$

wie sich diese Bedeutung aus dem elementaren Potenzbegriff (unter Erweiterung auf gebrochene Exponenten) ergibt. Es ist also für den „rationalen“ Bruch $x = \frac{m}{n}$ der Wert $\varphi(x)$ gleich der positiven Zahl $\sqrt[n]{e^m}$, während mit einer Potenz e^x eines „irrationalen“ Exponenten aus dem Potenzbegriff allein überhaupt kein Sinn verknüpft werden kann. *Der Bequemlichkeit halber wollen wir jedoch fortan das Symbol* e^x *auch bei „irrationalem“* x *als besondere Bezeichnung unserer für „alle“* x *erklärten Funktion* $\varphi(x)$ *beibehalten.* Im Anschluß an diese Bezeichnung e^x nennen wir $\varphi(x) = e^x$ fortan *„Exponentialfunktion“*, und zwar zum Unterschiede von anderen in § 13 zu betrachtenden Exponentialfunktionen *„natürliche Exponentialfunktion“*, da sie unter allen Funktionen dieser Art, wie später gezeigt wird, das „natürlichste“, d. i. das einfachste Verhalten zeigt.

Die für „rationales“ x gedachte Gleichung $e^x = y$ invertiert die Elementarmathematik in $x = {}^e\log y$ und bezeichnet x als den „Logarithmus“ von y oder vom „Numerus“ y zur „Basis“ e. Im Anschluß an die Benennung „natürliche“ Exponentialfunktion sagt man auch kurz, x sei *der*

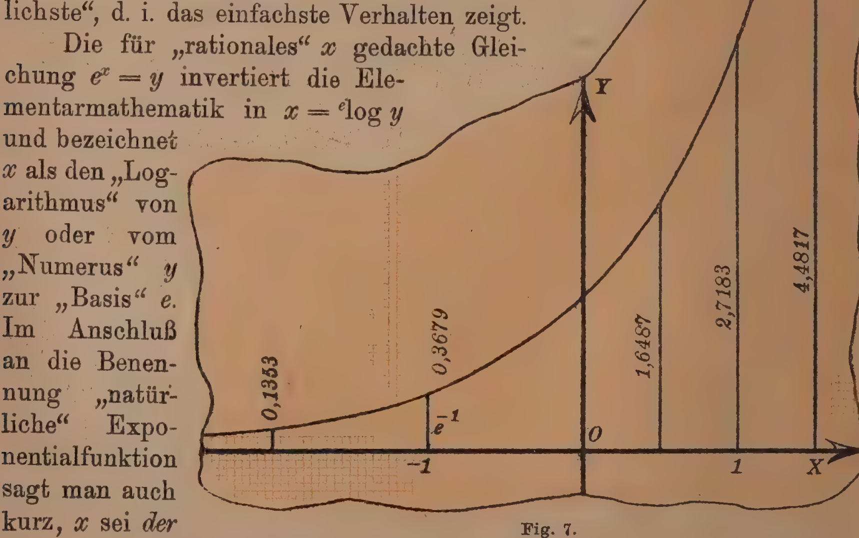


Fig. 7.

„natürliche“ Logarithmus (logarithmus naturalis) von y, und schreibt abkürzend $x = \ln y$. Diese Bezeichnung ln, welche sich in der Elementarmathematik (soweit dieselbe ohne den Grenzbegriff arbeitet) nur auf die Fälle „rationaler“ Funktionswerte beziehen kann, wollen wir allgemein für die zu e^x inverse Funktion $\ln x$ beibehalten. *Wir bezeichnen also die mit Hilfe der gleichseitigen Hyperbel für alle „positiven“ x erklärte eindeutige Funktion $f(x)$ durch das Symbol* $\ln x$ *und nennen sie den „natürlichen Logarithmus“ von x.*

Wir wollen schließlich noch das *„Additionstheorem des natürlichen Logarithmus“:*

$$\ln(y_1 \cdot y_2 \cdots y_n) = \ln y_1 + \ln y_2 + \cdots + \ln y_n$$

in ein entsprechendes Theorem für die Exponentialfunktion e^x umrechnen. Setzen wir $\ln y_k = x_k$ und also $y_k = e^{x_k}$, so folgt:

$$\ln(y_1 \cdot y_2 \cdots y_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Durch Inversion ergibt sich:

$$y_1 \cdot y_2 \cdots y_n = e^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

oder, wenn wir auch links die y durch die x ausdrücken:

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdots e^{x_n} = e^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}. \tag{3}$$

Das *„Additionstheorem“* der Funktion e^x lautet also: *Die natürliche Exponentialfunktion, gebildet für die „Summe“ von n Argumenten, ist gleich dem „Produkte“ der Funktionswerte, die den einzelnen Argumenten zugehören.*

13. Der Logarithmus $^b\log x$ und die Exponentialfunktion b^x. Mittelst der Funktion $\ln x$ und einer endlichen, von 0 verschiedenen Zahl μ sei jetzt eine neue Funktion durch:

$$f(x) = \mu \cdot \ln x \tag{1}$$

erklärt, und zwar wie $\ln x$ selbst für alle positiven Argumente x und nur für diese. *Diese Funktion $f(x)$ ist für alle $x > 0$ eindeutig und stetig*[1]), *und zwar durchläuft sie, wenn x stetig wachsend alle positiven Werte beschreibt, alle reellen Zahlen stetig und beständig wachsend oder abnehmend, je nachdem $\mu > 0$ oder $\mu < 0$ ist.* Die Kurve der neuen Funktion geht aus der ln-Kurve (Fig. 6, S. 34) dadurch hervor, daß man die Ordinaten der ln-Kurve nach dem Verhältnis $|\mu| : 1$ ändert und dann, sofern $\mu < 0$ ist, die geänderte Kurve noch an der x-Achse spiegelt.

Der reziproke Wert von μ ist gleichfalls endlich und von 0 verschieden. Die durch die Gleichung:

$$b = e^{\frac{1}{\mu}} \tag{2}$$

1) Betreffs der Stetigkeit können wir uns etwa auf den Satz von S. 20 berufen, indem wir $\varphi(x) = \mu$ und $\psi(x) = \ln x$ setzen.

eindeutig bestimmte Zahl b ist demnach endlich und von 1 verschieden, und zwar gilt $0 < b < 1$ für $\mu < 0$ und $b > 1$ für $\mu > 0$. Durch diese Zahl b stellt sich der Faktor μ in der Form:

(3) $$\mu = \frac{1}{\ln b}$$

dar, so daß wir an Stelle von (1) auch:

(4) $$f(x) = \left(\frac{1}{\ln b}\right) \cdot \ln x$$

schreiben können und in b dasjenige Argument der Funktion $f(x)$ erkennen, für welches $f(b) = 1$ ist.

Die zu $f(x)$ inverse Funktion $y = \varphi(x)$ bestimmt sich aus:

$$x = \mu \cdot \ln y \quad \text{oder} \quad \ln y = x \cdot \ln b$$

in der Gestalt:

(5) $$y = \varphi(x) = e^{x \cdot \ln b}.$$

Diese für unbeschränkt variables x erklärte Funktion ist eindeutig und stetig; und sie durchläuft, wenn x stetig wachsend alle Werte beschreibt, alle „positiven“ Werte beständig wachsend oder abnehmend, je nachdem $b > 1$ oder < 1 ist. Ihre Kurve geht aus der von $f(x)$ natürlich wieder durch die bekannte Spiegelung hervor. Im übrigen notieren wir noch das aus $\ln(y^{-1}) = -\ln y$ für die Funktion sich ergebende Gesetz:

(6) $$\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)} \quad \text{oder} \quad e^{-x \cdot \ln b} = \frac{1}{e^{x \cdot \ln b}}.$$

Für jede rationale Zahl a gilt $\ln(x^a) = a \cdot \ln x$, woraus durch Multiplikation mit μ sich $f(x^a) = a \cdot f(x)$ ergibt. Setzen wir hier $x = b$ ein, so folgt wegen $f(b) = 1$ sofort $f(b^a) = a$ und also durch Inversion:

$$\varphi(a) = b^a \quad \text{oder} \quad \varphi(x) = b^x$$

als für jedes *rationale* x gültig. Wir behalten nun gleich wieder auch für die irrationalen x das aus dem Potenzbegriff nicht erklärbare Symbol b^x als Bezeichnung unserer Funktion mit $\varphi(x)$ bei:

(7) $$\varphi(x) = e^{x \cdot \ln b} = b^x$$

und nennen sie „*Exponentialfunktion der Basis* b“

Entsprechend nehmen wir die für rationale x in der Elementarmathematik vollzogene Umkehrung von $b^x = y$ in $x = {}^b\log y$ zum Anlaß, unsere Funktion $f(x)$ nicht nur für ihre rationalen, sondern auch für ihre irrationalen Werte, d. h. für „alle“ Argumente $x > 0$ durch das Symbol ${}^b\log x$ zu bezeichnen:

(8) $$f(x) = \left(\frac{1}{\ln b}\right) \cdot \ln x = {}^b\log x,$$

sowie weiterhin als den „*Logarithmus der Basis b*“ von x zu benennen. Die Zusammenstellung der zu einem System von Zahlen x gehörenden Zahlen $y = {}^b\log x$ nennt man „*Logarithmensystem der Basis b*“. Aus (8) ergibt sich: *Das Logarithmensystem einer beliebigen (jedoch von 1 verschiedenen) positiven Basis b berechnet sich aus dem natürlichen Logarithmensystem, indem man iede Zahl* $\ln x$ *mit dem Faktor:*

(9) $$\mu_b = \frac{1}{\ln b},$$

dem sogenannten „Modul“ des Logarithmensystems der Basis b multipliziert.

Für Zwecke numerischer Rechnungen hat das zur Basis $b = 10$ gehörende System der „Briggschen“ oder „dekadischen“ Logarithmen Vorzüge, welche in der Elementarmathematik erörtert werden.[1]) Da die Berechnung der *natürlichen* Logarithmen nach den Regeln von § 10 und später zu entwickelnden Methoden am einfachsten ist, so hat man hernach für den Übergang zu den dekadischen Logarithmen einen brauchbaren Näherungswert für den Modul μ_{10} dieser Logarithmen nötig. Wir wollen uns demnach hier sogleich einen solchen Näherungswert berechnen.

Aus dem S. 34 angegebenen Werte $\ln 3 = 1{,}0986$ folgt nach dem Additionstheorem $\ln 9 = 2{,}1972$. Die Differenz $(\ln 10 - \ln 9)$ hatte ursprünglich die Bedeutung eines Flächeninhaltes, den wir unter Gebrauch der Bezeichnungen und Methoden von S. 32 ff. in die beiden Schranken

$$A'_{10} = \tfrac{1}{10}\left((9{,}05)^{-1} + (9{,}15)^{-1} + (9{,}25)^{-1} + \cdots + (9{,}95)^{-1}\right),$$
$$B'_{10} = \tfrac{1}{10}\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10}\right) + (9{,}1)^{-1} + (9{,}2)^{-1} + \cdots + (9{,}9)^{-1}\right)$$

einschließen. Mittelst der Reziprokentafel stellt man leicht fest, daß die Zahlen A'_{10} und B'_{10} bereits in den ersten vier Dezimalstellen übereinstimmen und gleich 0,1054 sind. Somit findet sich:

$$\ln 10 = \ln 9 + 0{,}1054 = 2{,}3026.$$

Der reziproke Wert von $\ln 10$ liefert uns den auf fünf Dezimalstellen genauen Wert des *Moduls der dekadischen Logarithmen:*

(10) $$\mu_{10} = 0{,}43429.$$

Bezeichnet man die dekadischen Logarithmen unter Fortlassung der Basis kurz durch $\log x$, so ist für die Berechnung dieser Logarithmen aus den natürlichen die Gleichung zugrunde zu legen:

(11) $$\log x = 0{,}43429 \cdot \ln x.$$

Bei Anwendung dieser Gleichung muß man sich über die Genauigkeitsgrenzen klar werden, welche die Näherungswerte μ_{10} und $\ln x$ für

1) Unabhängigkeit der „Mantisse“ von der Stellung des Dezimalkommas im „Numerus“, Bestimmtheit der „Kennziffer“ durch die Ziffernanzahl links vom Komma im Numerus.

den zu berechnenden Näherungswert $\log x$ ergeben. Will man einer positiven Zahl a durch einen Näherungswert a_n mit n Dezimalstellen so nahe als möglich kommen, so hat man bei Kürzung auf n Stellen bekanntlich die n^{te} Stelle um eine Einheit zu erhöhen, falls in der $(n+1)^{\text{ten}}$ Stelle eine der Ziffern 5, 6, 7, 8, 9 steht. Es ergibt sich demnach:

$$(12) \qquad a = a_n + \tfrac{1}{2}\vartheta \cdot 10^{-n}, \quad -1 \leqq \vartheta < 1,$$

wo ϑ irgend eine Zahl des in der Ungleichung (12) angegebenen Intervalls ist. Gilt nun entsprechend für eine zweite positive Zahl b die Darstellung:

$$b = b_m + \tfrac{1}{2}\eta \cdot 10^{-m}, \quad -1 \leqq \eta < 1,$$

so folgt bei ihrer Multiplikation:

$$a \cdot b = a_n \cdot b_m + \tfrac{1}{2}(a_n \cdot \eta \cdot 10^{-m} + b_m \cdot \vartheta \cdot 10^{-n}) + \tfrac{1}{4}\vartheta\eta \cdot 10^{-(m+n)}.$$

Benutzt man demnach $a_n \cdot b_m$ als Näherungswert für $a \cdot b$, so ist der Fehler jedenfalls absolut genommen nicht größer als:

$$\tfrac{1}{2}(a_n \cdot 10^{-m} + b_m \cdot 10^{-n}) + \tfrac{1}{4} 10^{-(m+n)}.$$

Einige Werte $\ln x$ sind S. 33 ff. auf vier Dezimalstellen angegeben. Um die zugehörigen dekadischen Logarithmen zu berechnen, ist somit $m = 4$ und $n = 5$ zu setzen, da für a_5 der Näherungswert (10) des Moduls μ_{10} einzutragen ist; b_4 ersetzen wir zweckmäßig durch die Bezeichnung $\ln_4$. In diesem Falle ist der durch das Produkt $0{,}43429 \cdot \ln_4$ gegebene Näherungswert gegen den genauen Wert des dekadischen Logarithmus um eine Differenz fehlerhaft, deren Betrag kleiner ist als

$$0{,}217145 \cdot 10^{-4} + \tfrac{1}{2}\ln_4 \cdot 10^{-5} + \tfrac{1}{4} 10^{-9} < 3 \cdot 10^{-5} + \tfrac{1}{2}\ln_4 \cdot 10^{-5}.$$

Ist dieser Betrag kleiner als fünf Einheiten der fünften Stelle:

$$3 \cdot 10^{-5} + \tfrac{1}{2}\ln_4 \cdot 10^{-5} < 5 \cdot 10^{-5}, \quad \ln_4 < 4,$$

was bei allen Numeris $x \leqq 54$ zutrifft, so ist der erhaltene Näherungswert der genauste, den man bei Gebrauch von vier Dezimalstellen erzielen kann. Die als Beispiele dienenden Angaben:

$$\log 2 = 0{,}43429 \cdot 0{,}6931 = 0{,}3010,$$
$$\log 3 = 0{,}43429 \cdot 1{,}0986 = 0{,}4771,$$
$$\log 9 = 0{,}43429 \cdot 2{,}1972 = 0{,}9542$$

sind also in den ersten Dezimalstellen sicher, sobald man beim abgekürzten Multiplizieren der Näherungswerte auf Sicherheit der vierten Stelle Obacht gibt.

14. Mechanische und graphische Rechenmethoden mittelst der Logarithmen. Auf dem Additionstheoreme des Logarithmus und seinen Folgerungen beruhen die Verwendungen, welche die Logarithmen für die

Zwecke numerischer Rechnungen gefunden haben. Man bedient sich dabei in erster Linie der Logarithmentafeln, und zwar je nach der Genauigkeit, die man erzielen will, 7-stelliger, 5-stelliger oder 4-stelliger Tafeln. Ist selbst die mit 4-stelligen Tafeln erzielbare Genauigkeit der Rechnung nicht erforderlich, so bedient man sich weit schneller durchführbarer mechanischer und graphischer Methoden, denen das Additionstheorem des Logarithmus zugrunde liegt. Wir schalten hier einige Ausführungen zum Verständnis dieser Methoden ein.

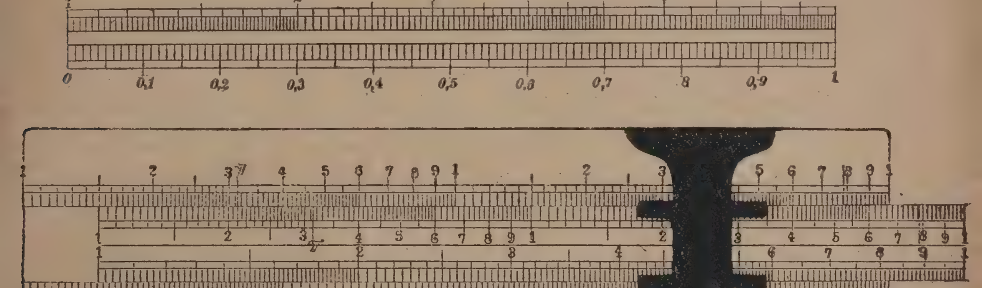


Fig. 8.

Man denke unter Benutzung von 1 dm als Längeneinheit die Kurve des dekadischen Logarithmus $y = \log x$ gezeichnet, projiziere den einzelnen Punkt (x, y) der Kurve mittelst eines Lotes auf die Ordinatenachse und denke am Fußpunkte des Lotes den zugehörigen Wert x der Abszisse angeschrieben. Die ganze Ordinatenachse ist dann Punkt für Punkt mit Zahlen x besetzt, und zwar kommen hierbei alle *positiven* Zahlen x und jede nur einmal zur Geltung; z. B. trägt der Punkt $y = -1$ den Wert $x = \frac{1}{10}$, $y = 0$ den Wert $x = 1$, $y = 0{,}3010 \cdots$ den Wert $x = 2$, $y = 1$ den Wert $x = 10$ usw. Die in dieser Art mit Zahlen besetzte Gerade nennen wir *„die unendliche logarithmische Skala“*. Der obere Teil von Fig. 8 zeigt das Intervall $0 \leqq y \leqq 1$ dieser Skala; wir wollen diesen Teil der unendlichen Skala kurz als *„die einfache logarithmische Skala“* bezeichnen. Die ganzzahligen Werte x sind hier angeschrieben; zwischen $x = 5$ und $x = 10$ sind durch die Teilstriche auch noch die Zehntel markiert, zwischen $x = 2$ und $x = 5$ die Zwanzigstel und zwischen $x = 1$ und $x = 2$ sogar die Fünfzigstel. Eine weitere Unterteilung würde undeutlich sein, ist auch bei der mit der logarithmischen Skala beabsichtigten Genauigkeit der numerischen Angaben entbehrlich. Versieht man das Intervall $1 \leqq y \leqq 2$ mit denselben Teilstrichen, so haben, da allemal $y + 1 = \log(10 \cdot x)$ ist, an Stelle der Zahlen $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$ die Zahlen

$x = 10, 20, 30, \ldots, 100$ zu treten; hier schreitet also die Einteilung zunächst, d. h. bis $x = 20$, nach Fünfteln und von $x = 50$ ab nach Einheiten fort. Ebenso haben wir im Intervall $-1 \leqq y \leqq 0$ bei genau derselben Unterteilung die Zahlen $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$ durch $x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; ...; 1 zu ersetzen usw.

Für die praktischen Zwecke reicht man nun entweder bereits mit der im Fig. 8 dargestellten logarithmischen Skala oder mit zwei nebeneinander gereihten Skalen dieser Art, die wir als eine *„logarithmische Doppelskala“* bezeichnen wollen. Soll zunächst zu irgendeinem „Numerus“ x der Logarithmus $y = \log x$ bestimmt werden, so teilen wir x durch eine solche Potenz 10^ν von 10, daß im Quotienten x' *eine* (von 0 verschiedene) Ziffer links vom Komma steht. Die Entfernung des Punktes x' der einfachen Skala vom linken Endpunkte dieser Skala bestimmt man mit dem in Fig. 8 zugefügten metrischen Maßstabe (in dm als Einheit) und erhält dadurch die Mantisse des gesuchten Logarithmus, während ν die Kennziffer ist (die natürlich auch eine negative ganze Zahl sein kann). Will man umgekehrt zu einem Logarithmus y den zugehörigen Numerus $x = 10^y$ gewinnen, so bringt man wieder den metrischen Maßstab der Längeneinheit (1 dm) mit der logarithmischen Skala zur Deckung, liest den zur Mantisse von y gehörenden Wert x' der logarithmischen Skala ab und setzt das Komma der Kennziffer entsprechend. Bei richtiger Schätzung der Zehntel zwischen den Teilstrichen ersetzt uns die logarithmische Skala und ein in mm geteilter Maßstab der Längeneinheit (1 dm) eine dreistellige Logarithmentafel der Zahlen 1 bis 1000.

Die Richtung wachsender Zahlen x (und y) wollen wir die *„Richtung der Skala“* nennen. Man wolle nun zwei gleichgerichtete unendliche Skalen über- oder nebeneinander lagern, und zwar derart gegeneinander verschoben, daß der Nullpunkt $y_2 = 0$ der zweiten Skala mit dem Punkte $y_1 = c$ der ersten Skala in Deckung ist. Dann gilt für je zwei in Deckung befindliche Punkte y_1 und y_2 die Gleichung $y_1 = y_2 + c$ und also für die beiden korrespondierenden Zahlen x_1 und x_2 der Skalen:

$$\log x_1 = \log x_2 + c \quad \text{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} = 10^c.$$

Sind also x_1, x_2 und x_1', x_2' irgend zwei Paare in Deckung befindlicher Skalenpunkte, so folgt stets:

$$(1) \qquad x_1 : x_2 = x_1' : x_2'.$$

Mittelst zweier gegeneinander verschiebbarer Skalen kann man demnach folgende Rechenaufgaben mechanisch lösen: *Erstlich kann man zu drei positiven Zahlen a, b, c die vierte Proportionale bestimmen.* Man bringt einfach durch Verschiebung der zweiten Skala den Punkt $x_2 = b$ mit dem Punkte $x_1 = a$ der ersten Skala zur Deckung; der mit dem Punkte

$x_1' = c$ der ersten Skala zusammenfallende Punkt x_2' der zweiten Skala ist die vierte Proportionale. Setzt man weiter $x_1 = a$, $x_2 = 1$, $x_2' = b$ in (1) ein, so folgt $x_1' = a \cdot b$. Daraus ergibt sich die „*Multiplikationsregel*“: *Um das Produkt zweier positiver Zahlen a, b zu bestimmen, bringe man den Punkt* 1 *der zweiten Skala mit dem Punkte a der ersten zur Deckung; der mit dem Punkte b der zweiten Skala zusammenfallende Punkte der ersten Skala ist das Produkt $x \cdot = a \cdot b$.* Man setze drittens $x_1 = a, x_2 = b, x'_2 = 1$ und findet $x'_1 = a : b$ und damit die „*Divisionsregel*“: *Um den Quotienten zweier positiver Zahlen a und b zu bestimmen, bringe man den Punkt b der zweiten Skala mit dem Punkt a der ersten zur Deckung; der Punkt* 1 *der zweiten Skala liefert dann als mit ihm zusammenfallenden Punkt der ersten Skala den Quotienten $x_1' = a : b$.*

Es ist nun wichtig, daß man bei der mechanischen Ausführung der Rechnungen bereits mit *zwei gegeneinander verschiebbaren logarithmischen* „*Doppelskalen*“ auskommt, die, zum praktischen Gebrauch zweckmäßig vorgerichtet, ein als „*Rechenschieber*“ bekanntes Instrument liefern.[1]) Man wolle nämlich zunächst bei der Multiplikation der beiden positiven Faktoren a und b durch die Potenzen 10^μ und 10^ν derart teilen, daß die Quotienten a' und b' *eine* (von 0 verschiedene) Ziffer links vom Komma haben. Da das Produkt $a \cdot b = (a' \cdot b')\ 10^{\mu+\nu}$ ist, so genügt die Kenntnis von $a' \cdot b'$, um unter entsprechender Versetzung des Komma auch $a \cdot b$ zu erhalten. Die Punkte a' und b' liegen nun in den linken Hälften der Doppelskalen und also der Punkt $a' \cdot b'$ jedenfalls innerhalb der Doppelskala. Man überträgt diese Betrachtung leicht auf die Division, wobei man, um in allen Fällen mit der Doppelskala zu reichen, den Punkt b' der *linken* Hälfte der einen Skala mit dem Punkte a' der *rechten* Hälfte der anderen zur Deckung zu bringen hat. Die Genauigkeitsgrenze ist bei der gebräuchlichen Größe der Rechenschieber dadurch festgelegt, daß man, sichere Zehntelschätzung vorausgesetzt, das Produkt oder den Quotienten zweier dreiziffriger Zahlen genau ablesen kann.

Aufgaben. 1) Man lagere zwei entgegengesetzt gerichtete und gegeneinander verschiebbare logarithmische Doppelskalen aneinander und entwickle für diesen Fall die Regeln der Multiplikation und Division, und zwar zunächst für unendliche Skalen und sodann für zwei Doppelskalen.

2) Man denke mit der einzelnen Skala eine zweite nach doppeltem Maßstab (Längeneinheit = 2 dm) gezeichnete Skala unter Deckung der beiden Punkte $x = 1$ zusammengelagert und überlege, wie diese Anordnung zur Berechnung der Quadrate und der Quadratwurzeln gegebener Zahlen zu verwenden ist.

Man kann die logarithmische Skala mittelst eines *graphischen Verfahrens* auch zur *Potenzierung* und *Radizierung* verwerten. Wir wollen

1) Zur Erinnerung an die Einrichtung des Rechenschiebers ist ein solcher im unteren Teile der Fig. 8 (S. 43) abgebildet; das Original ist aus Pappe hergestellt und wird von der Firma Gebr. Wichmann (Berlin) zu wohlfeilem Preise vertrieben.

beide Rechnungsaufgaben gleich zusammenfassend so einkleiden, daß man zu einer gegebenen positiven Zahl x die zugehörige positive Zahl:

(2) $$y = x^{\frac{m}{n}}$$

berechnen soll, unter m und n positive ganze Zahlen verstanden. Aus (2) folgt durch Logarithmierung unter Gebrauch der Abkürzung $\log x = \xi$, $\log y = \eta$:

(3) $$\eta = \frac{m}{n}\,\xi.$$

Man deute ξ und η als rechtwinklige Koordinaten und denke auf Millimeterpapier die der Gleichung (3) entsprechende Gerade, welche durch den Nullpunkt O und den Punkt (n, m) hindurchläuft, gezeichnet. Man lege dann die (unendliche) logarithmische Skala gleichgerichtet auf die ξ-Achse, indem man den Punkt 1 der Skala mit dem Nullpunkte O zur Deckung bringt. Im vorgeschriebenen Punkte x der Skala (dem Punkte $\xi = \log x$ der Abszissenachse) ist dann eine zweite (unendliche) logarithmische Skala parallel und gleichgerichtet der Ordinatenachse so aufzulagern, daß die ξ-Achse auf dieser den Punkt 1 ausschneidet. *Die Gerade* (3) *schneidet auf dieser zweiten Skala dann unmittelbar den gesuchten Wert y aus.*

Man kommt übrigens sehr leicht mit der einfachen logarithmischen Skala und der nur zwischen 0 und dem Punkte $\left(1, \frac{m}{n}\right)$ gezeichneten Strecke der Geraden (3) aus. Ist nämlich ν die Kennziffer von $\xi = \log x$, und gehört zu der zwischen 0 und 1 gelegenen Mantisse $\xi_0 = \xi - \nu$ von $\log x$ die Ordinate η_0 der Geraden (3), so gilt $(\eta - \eta_0) : \nu = m : n$ und also:

$$\eta = \nu \cdot \frac{m}{n} + \eta_0.$$

Hieraus ergibt sich folgende einfache Regel: *Man lagert eine logarithmische Skala gleichgerichtet mit der ξ-Achse auf das Intervall $0 \leqq \xi \leqq 1$ und ordnet eine zweite Skala an der Stelle $x_0 = x \cdot 10^{-\nu}$ der ersten zur η-Achse parallel und gleichgerichtet derart an, daß der Anfangspunkt* 1 *der zweiten Skala die zuvor auf Zehntelmillimeter abzuschätzende Ordinate $\nu \cdot \frac{m}{n}$ hat; dann ist y der Schnittpunkt der Geraden* (3) *mit der zweiten Skala. Schneidet jedoch die Gerade* (3) *die „einfache" Skala nicht, so ist die letztere nach oben oder nach unten um die zum Schnitt erforderliche Anzahl von Längeneinheiten* (dm) *zu verschieben*[1]), *was einfach zur Wirkung hat, daß das Komma im Ergebnis y um die entsprechende Anzahl von Schritten nach rechts oder links zu verschieben ist.*

1) Diese Verschiebung ist, falls die Gerade (3) auf Millimeterpapier gezeichnet ist, unmittelbar vollziehbar.

15. Die Messung der Kreisbogen, der Kreissektoren und der Winkel. Auf dem Kreise des Radius 1 um den Nullpunkt der Koordinaten sei durch zwei Punkte P_1 und P_2 ein „Kreisbogen“ $\widehat{P_1 P_2}$ eingegrenzt. Das durch diesen Bogen und die beiden Radien OP_1 und OP_2 eingegrenzte Flächenstück heißt der zugehörige „Kreissektor“ und der Winkel $\sphericalangle P_1 O P_2$ der zum Bogen gehörige „Zentriwinkel“. Da die Kreisperipherie bei Drehung um den Mittelpunkt in sich selbst verschiebbar ist, so ist es möglich, zwei Kreisbogen $\widehat{P_1 P_2}$ und $\widehat{P_1' P_2'}$ durch Aufeinanderlagerung in bezug auf ihre Größen miteinander zu vergleichen und auszusagen, ob sie einander gleich sind, oder welcher von ihnen größer ist. Man kann sogar irgendeinen beliebigen Bogen zur Maßeinheit wählen, durch Zusammenlegung zweier, dreier usw. solcher Bogen Kreisbogen der Größe 2, 3, ... herstellen, auch einen Bogen in eine Anzahl gleicher Teilbogen zerlegt denken[1]) usw. Tragen wir die Bogeneinheit etwa von dem Schnittpunkte A der positiven x-Achse mit der Peripherie in der Richtung gegen die positive y-Achse ab, so können wir demnach von A aus auch Bogen der Größen 2, 3, ..., aber auch der Größen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\cdots$ abmessen.

Ein Unterschied gegenüber der Zahlenlinie liegt hier freilich insofern vor, als der Kreis eine im Endlichen in sich zurücklaufende Linie ist. Bezeichnen wir, wie üblich, die Maßzahl für die halbe Peripherie mit π, so würden zunächst nur die dem Intervall $0 \leqq s \leqq 2\pi$ angehörenden Zahlen s als Maßzahlen der Kreisbogen auftreten. Indessen hindert nichts, die Kreisbogen auch über die ganze Peripherie einmal, zweimal, ja beliebig oft hinauswachsen zu lassen, wobei dann die Maßzahl s des Bogens *nach der positiven Seite hin unbegrenzt* erscheint. Auch können wir diejenigen Bogen, welche wir von A aus in der Richtung gegen die negative y-Achse auf dem Kreise abtragen, nach Analogie der Zahlenlinie mit *negativen* Maßzahlen s versehen und haben dann, indem wir auch nach dieser Seite hin die Peripherie beliebig oft umlaufen, die Maßzahl s *auch nach der negativen Seite hin als unbegrenzt* anzusehen.

Wie die Bogen, so können wir weiter auch die *Kreissektoren* untereinander und ebenso auch die *Zentriwinkel* unter sich in bezug auf ihre Größe vergleichen, addieren, teilen und in einer Einheit messen, wobei wir leicht wieder die Vorstellung entwickeln, daß die Sektorgröße S und die Winkelgröße ϑ nach beiden Seiten hin unbegrenzt sind. Entspricht die Maßeinheit der Sektoren, sowie auch die der Zentriwinkel der Bogeneinheit, so kommt, da dem n-fachen Bogen allemal auch der n-fache Sektor und Winkel, dem n^{ten} Teile des Bogens aber auch wieder

1) Freilich ohne hier diese Teilung in jedem Falle mit Zirkel und Lineal durchführen zu können.

der n^{te} Teil des Sektors und des Winkels entsprechen, dies darauf hinaus, daß die Maßzahlen S, ϑ und s zusammengehöriger Sektoren, Zentriwinkel und Bogen stets gleich sind. *Wählen wir jedoch andere Einheiten für die Sektoren- und Winkelmessung, so werden die Maßzahlen S der Sektoren und ϑ der Winkel nur erst mit den Maßzahlen s der zugehörigen Bogen proportional sein:*

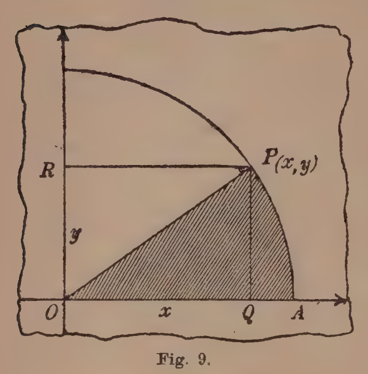


Fig. 9.

(1) $$S = a \cdot s, \qquad \vartheta = b \cdot s.$$

Wir besitzen nun bereits eine Einheit für die Messung der Sektoren, insofern diese Sektoren ebene Flächenstücke sind, die wir in der Flächeneinheit (dem Quadrate der Längeneinheit) messen. Legen wir zu dem in Fig. 9 schraffierten Sektor das Dreieck OPR des Inhaltes $\frac{1}{2}xy$ hinzu, so haben wir eine Fläche vor uns, zu deren Ausmessung wir sogar unmittelbar die Grenzmethoden von S. 23 ff. (unter Austausch von x und y) anwenden können. Mit einem anderen Mittel als dem Begriff der „*Grenze einer Zahlenreihe*" vermag auch die Elementarmathematik dem Inhalte der Kreisfläche nicht beizukommen. Sie arbeitet bekanntlich, um zunächst die ganze Kreisfläche auszumessen, mit den Inhalten a_n und b_n des eingeschriebenen und des umgeschriebenen n-Ecks. Dabei erweisen sich die Zahlenreihen $a_3, a_4, \ldots$ und $b_3, b_4, \ldots$ als monoton, und zwar ist die erste eine Reihe wachsender, die zweite eine Reihe abnehmender Zahlen, und es gilt für irgend zwei Indizes m und n stets $a_m < b_n$, während $\lim\limits_{n=\infty}(b_n - a_n) = 0$ zutrifft. Daraus geht dann (s. S. 23 ff.) die Existenz einer gemeinsamen Grenze hervor, welche man mit π bezeichnet, und für welche man den Näherungswert findet:

(2) $$\pi = \lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = 3{,}1415927\ldots.$$

Auch für die Winkelmessung gebraucht die Elementarmathematik eine besondere Einheit, nämlich den 90sten Teil des rechten Winkels, und nennt diese Einheit 1 Grad (1^0).

Besonders bemerkenswert ist nun aber, *daß die Elementarmathematik für die Messung der Kreisbogen ohne Bedenken die zunächst nur für die Messung „gerader" Strecken bestimmte Längeneinheit benutzt.* Die Zulässigkeit dieser Maßnahme begründen wir durch den Umstand, *daß der Kreis erstlich* (was wir bisher noch nicht besonders erwähnten) *eine „stetige" Linie ist, und weiter, daß derselbe in jedem Punkte eine bestimmte Tangente hat, die, falls der Berührungspunkt stetig und ohne Umkehrung der Richtung über den Kreis hingeführt wird, ihre Richtung selbst „stetig" und immer*

im „gleichen Drehungssinne“ (monoton) ändert. Denken wir uns die Tangente als einen biegsamen, aber nicht dehnbaren Faden, so erscheint es möglich, ein Stück des Fadens längs eines Kreisbogens aufzuwickeln, der dann die Länge s des Stückes als „Bogenlänge“ erhält. Wir können auch umgekehrt den Kreisbogen auf einem Geradenstück abwickeln, wie man sagt, *„rektifizieren“* und sprechen dann die Länge s des Geradenstückes dem Kreisbogen als „Bogenlänge“ zu.

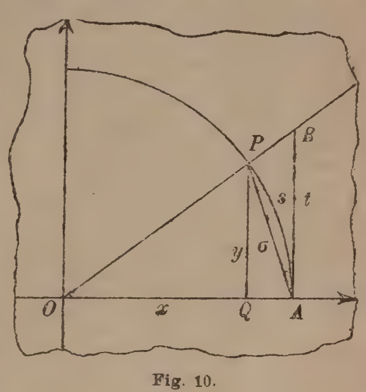


Fig. 10.

In Fig. 10 sei $\widehat{AP}$ irgend ein von 0 verschiedener Bogen, der kleiner als ein Quadrant ist. Es sei s die in der Längeneinheit gemessene Länge des Bogens $\widehat{AP}$[1]), x und y seien die Koordinaten von P, σ die Länge der Sehne $\overline{AP}$ und endlich t die Länge des Stückes $\overline{AB}$ der Kreistangente im Punkte A, welches durch die Verlängerung des Radius OP abgeschnitten wird. Wenn man nun die Strecke t von A aus nach oben hin auf der Peripherie aufwickelt, so schreitet bei dieser Operation der Punkt B stets senkrecht zur jeweiligen Lage der Tangente fort. Der Punkt B beschreibt dabei eine stetige Kurve, welche ganz *oberhalb* des Radius OP und seiner Verlängerung liegt, nur daß natürlich die Anfangslage von B sich *auf* dieser Verlängerung findet.[2]) Es ist demnach klar, daß $s < t$ gilt; und da übrigens nach einem bekannten Grundsatze $\sigma < s$ ist, so erscheint die Bogenlänge s zwischen den beiden Geradenlängen σ und t als Schranken eingeschlossen:

(3) $$\sigma < s < t.$$

Hierauf gründet sich das bekannte Verfahren der Elementarmathematik, die Länge der ganzen Kreisperipherie wieder als gemeinsame Grenze zweier Zahlenreihen $A_3, A_4, \ldots$ und $B_3, B_4, \ldots$ darzustellen, indem nämlich A_n und B_n die Umfänge des eingeschriebenen und des umgeschriebenen n-Ecks sind. Doch können wir die Durchführung dieser neuen Grenzbetrachtung auch durch folgende Überlegung ersetzen, die wir ohnehin ausführen müssen:

Da $\overline{OA} = 1$ sein sollte, so gilt $y : x = t : 1$ oder $t = y \cdot x^{-1}$. Wir haben demnach (Fig. 10) die Ungleichungen:

$$y < \sigma < s < y \cdot x^{-1}$$

1) Die Längeneinheit ist in den Figuren 9 und 10 gleich 3 cm gewählt.
2) Der Kürze und Anschaulichkeit halber mag die mechanische Betrachtung des Textes bei Begründung der Bogenlänge des Kreises zugelassen werden.

oder nach Division durch die *positive* Zahl y:

(4) $$1 < \frac{\sigma}{y} < \frac{s}{y} < x^{-1}.$$

Lassen wir nun s stetig gegen die Grenze 0 abnehmen, so gilt $\lim x = 1$ und also auch $\lim x^{-1} = 1$. Aus (4) ergibt sich daraufhin der wichtige Satz: *Nähert sich s von „rechts" her*[1]) *der Grenze* 0, *so nähert sich der Quotient der Sehne σ und der Ordinate y und ebenso der Quotient des Bogens s und der Ordinate y von „rechts" her der Grenze* 1:

(5) $$\lim_{s=0}\left(\frac{\sigma}{y}\right) = 1, \quad \lim_{s=0}\left(\frac{s}{y}\right) = 1,$$

woraus sich dann weiter mit Rücksicht auf $\sigma < s$ ergibt, daß sich der Quotient der Sehne σ und des Bogens s von „links" her der Grenze 1 *annähert:*

(6) $$\lim_{s=0}\left(\frac{\sigma}{s}\right) = 1.$$

Zur Erläuterung dieser Angaben haben wir für die Zentriwinkel der ersten zehn Grade die zugehörigen Werte von y, σ und s, auf vier Dezimalstellen gekürzt, tabellarisch zusammengestellt:

ϑ	y	σ	s
1°	0,0175	0,0175	0,0175
2°	0,0349	0,0349	0,0349
3°	0,0523	0,0524	0,0524
4°	0,0698	0,0698	0,0698
5°	0,0872	0,0872	0,0873
6°	0,1045	0,1047	0,1047
7°	0,1219	0,1221	0,1222
8°	0,1392	0,1395	0,1396
9°	0,1564	0,1569	0,1571
10°	0,1737	0,1743	0,1745

Selbst bei $\vartheta = 10^0$ ist die Differenz zwischen Bogen und Sehne noch nicht gleich einem Hundertstel des Wertes von s.

Wir können nun leicht auch die konstanten Faktoren a und b in den Gleichungen (1) feststellen. Der Inhalt S des Sektors OAP ist (vgl. Fig. 10) größer als der Inhalt $\frac{1}{2}y$ des Dreiecks OAP und kleiner als der Inhalt $\frac{1}{2}y \cdot x^{-1}$ des Dreiecks OAB. Da aber $S = a \cdot s$ ist, so folgt $y < 2as < y \cdot x^{-1}$ oder bei Division durch y:

$$1 < 2a\frac{s}{y} < x^{-1}.$$

Hieraus folgt für $\lim s = 0$ und also für $\lim x^{-1} = 1$:

$$\lim_{s=0}\left(2a \cdot \frac{s}{y}\right) = 2a \cdot \lim_{s=0}\left(\frac{s}{y}\right) = 1,$$

so daß sich aus (5) sofort $2a = 1$ ergibt: *Die zum Bogen s gehörende Sektorfläche hat den Inhalt $S = \frac{1}{2}s$, so daß sich der ganzen Kreisfläche $S = \pi$ entsprechend der Kreisumfang zu $s = 2\pi$ berechnet.*

1) D. h. (im Anschluß an die gewohnte Lage der Zahlenlinie) „von größeren Werten her".

Die zweite Gleichung (1) schreiben wir in $s = c \cdot \vartheta$ um und bezeichnen auch wohl s als den zum Winkel von ϑ^0 gehörenden Bogen oder „*Arcus*" durch $s = \operatorname{arc} \vartheta^0$. Da $\vartheta^0 = 180^0$ den Bogen $s = \pi$ liefert, so ist $c = \pi : 180$, was für c oder $\operatorname{arc} 1^0$ den in der Tabelle (S. 50) angegebenen Wert 0,0175 liefert. Genauere Näherungswerte für $\operatorname{arc} 1^0$ und für die einer Minute und einer Sekunde entsprechenden Bogen sind:

$$\operatorname{arc} 1^0 = 0{,}017\,453\,293,$$
$$\operatorname{arc} 1' = 0{,}000\,290\,888,$$
$$\operatorname{arc} 1'' = 0{,}000\,004\,848.$$

Zur Ergänzung der obigen Tabelle, welche die zehn Werte $\operatorname{arc} 1^0, \operatorname{arc} 2^0, \ldots, \operatorname{arc} 10^0$ gibt, stellen wir noch die folgenden Werte $\operatorname{arc} \vartheta$ zu späterem Gebrauche zusammen:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{arc} 10^0 = 0{,}1745, & \operatorname{arc} 40^0 = 0{,}6981, & \operatorname{arc} 70^0 = 1{,}2217, \\ \operatorname{arc} 20^0 = 0{,}3491, & \operatorname{arc} 50^0 = 0{,}8727, & \operatorname{arc} 80^0 = 1{,}3963, \\ \operatorname{arc} 30^0 = 0{,}5236, & \operatorname{arc} 60^0 = 1{,}0472, & \operatorname{arc} 90^0 = 1{,}5708. \end{array}$$

Zwischen 50^0 und 60^0 liegt derjenige Winkel ϑ, dessen Bogen $\operatorname{arc} \vartheta^0 = 1$ ist:

$$\vartheta = 57^0 \quad 17' \quad 44{,}806''.$$

Da es bei den Funktionen des Winkels zweckmäßig sein wird, das Argument als Abszisse und also als eine Länge deuten zu können, *so benutzen wir fortan als Maß der Winkel nicht die in Graden bestimmte Zahl* ϑ, *sondern die zugehörige Bogenlänge* $s = \operatorname{arc} \vartheta$ *des Kreises vom Radius* 1. Die vorstehenden numerischen Angaben ermöglichen es, das „Gradmaß" eines Winkels in das jedenfalls noch in der dritten Dezimalstelle gesicherte „Bogenmaß" umzurechnen.

Für gelegentliche Anwendungen stellen wir noch fest, wie sich die Bogenlänge und die Sektorfläche ändern, wenn wir von dem hier zugrunde liegenden Kreise des Radius 1 zu einem Kreise mit beliebigem Radius r übergehen. An Stelle der oben benutzten Figuren treten dann einfach ähnliche Figuren, in denen alle geraden Strecken im Verhältnis $r : 1$ abgeändert sind. Es gilt der Satz: *Zum Zentriwinkel* s *des Kreises vom Radius* r *gehört der Bogen* $r \cdot s$ *und der Sektor* $\frac{1}{2} r^2 \cdot s$.

16. Die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$. Die in § 15 betrachteten Größen, in ihren gegenseitigen Abhängigkeiten aufgefaßt, liefern die „*Kreisfunktionen*", unter welcher Benennung wir die „*trigonometrischen Funktionen*" der Elementarmathematik und ihre inversen, die „*zyklometrischen Funktionen*" zusammenfassen wollen. Wir gewinnen den herkömmlichen Zugang zu diesen Funktionen, wenn wir die Bogenlänge s oder, was auf dasselbe hinauskommt, die doppelte Sektor-

fläche $2S$ zur unabhängigen variabelen Größe machen, die wir dann im Sinne von S. 47 als unbegrenzt variabel ansehen.[1]) Um x und y sogleich in anderer Bedeutung gebrauchen zu können, bezeichnen wir die Koordinaten des Endpunktes P vom Bogen $\widehat{AP}$ in Fig. 10 mit ξ, η; im übrigen behalten wir die Bezeichnungen von § 15 bei. Die Trigonometrie nennt nun die Variablen η und ξ in ihrer Abhängigkeit vom Bogen oder Zentriwinkel s den *„Sinus“* und den *„Kosinus“* von s, und sie bezeichnet die Quotienten $\frac{\eta}{\xi} = t$ und $\frac{\xi}{\eta} = t^{-1}$ in Abhängigkeit von s als *„den Tangens“*[2]) und *„den Kotangens“* von s; abkürzende Symbole für diese vier *„trigonometrischen Funktionen“* sind:

(1) $$\eta = \sin s, \quad \xi = \cos s, \quad \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} s, \quad \frac{\xi}{\eta} = \operatorname{cotg} s.$$

Einige Wiederholungen und Ergänzungen zu den Betrachtungen der Elementarmathematik über die vier Funktionen (1) sind hier zunächst einzuschalten. Sind s_1 und $s_2 > s_1$ zwei Zahlen des Intervalles

$$0 \leqq s \leqq \frac{\pi}{2},$$

so gehören diesen beiden Argumenten s_1 und s_2 zwei bestimmte Zahlen $\sin s_1$ und $\sin s_2$ und ebenso zwei bestimmte Zahlen $\cos s_1$ und $\cos s_2$ zu, und es gilt (vgl. Fig. 10):

$$0 \leqq \sin s_1 < \sin s_2 \leqq 1,$$
$$1 \geqq \cos s_1 > \cos s_2 \geqq 0.$$

Unsere Funktionen $\sin s$ und $\cos$ sind demnach *im Intervall*

$$0 \leqq s \leqq \frac{\pi}{2}$$

eindeutig und monoton, und zwar ist bei wachsendem s die Funktion $\sin s$ in jenem Intervalle *beständig wachsend* und $\cos s$ *beständig abnehmend*. Da umgekehrt zu *jedem* Werte η des Intervalles $0 \leqq \eta \leqq 1$ ein bestimmter Bogen s des Intervalles $0 \leqq s \leqq \frac{\pi}{2}$ gehört, so sind $\sin s$ und entsprechend auch $\cos s$ im fraglichen Intervall *stetig*.[3]) Zu gleichem Argumente s gehörende Werte $\sin s$ und $\cos s$ sind stets durch die Relation:

(2) $$\cos^2 s + \sin^2 s = 1$$

1) Das Verfahren von § 10, S. 31 ff., auf den Kreis der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ (an Stelle der damaligen Hyperbel) angewandt, würde uns zuerst zu den zyklometrischen Funktionen führen, die demnach der Funktion $\ln x$ entsprechen.

2) Die Sprechweise „die Tangente von s“ vermeiden wir, um „den Tangens eines Winkels“ nicht mit „der Tangente einer Kurve“ zu verwechseln.

3) wie unten auch noch auf anderem Wege gezeigt werden wird.

verbunden[1]), und für zwei einander zum Quadranten $\frac{\pi}{2}$ ergänzende, sogenannte „komplementäre“ Bogen s und $\left(\frac{\pi}{2} - s\right)$ gilt:

(3) $$\cos s = \sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right), \quad \sin s = \cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right).$$

Deuten wir s als Abszisse x und den Funktionswert $\sin s = \sin x$ oder $\cos s = \cos x$ als Ordinate y in einem neuen Koordinatensysteme, so gelangen wir zur Versinnlichung unserer Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ durch die zugehörigen Kurven, welche in Fig. 11 zunächst wieder für das Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ dargestellt sind. Als neuen Nullpunkt haben wir den bisherigen

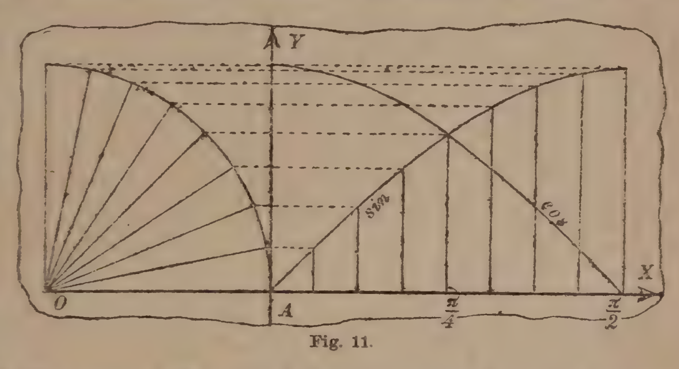


Fig. 11.

Punkt A gewählt, die neuen Achsen sind den bisherigen ξ- und η-Achsen parallel und gleichgerichtet, und die Längeneinheit ist gleich 4 cm gewählt. Um die *„Sinuskurve“* zu zeichnen, markiere man auf der x-Achse zunächst die Stelle $\frac{\pi}{2} = 1{,}571$, teile durch fortgesetzte Winkelhalbierung den Kreisquadranten in 2^n gleiche Bogen (in der Figur ist $n = 3$ gewählt) und zerlege die von den Punkten 0 und $\frac{\pi}{2}$ begrenzte Strecke der x-Achse gleichfalls in 2^n gleiche Teile. Man hat dann nur noch nötig, die von den Bogenendpunkten gelieferten Ordinaten η als Ordinaten y an die richtige Stelle x zu verschieben (wie dies Fig. 11 näher andeutet), um 2^{n+1} Punkte der Sinuskurve zu gewinnen. Aus ihr ergibt sich weiter die *„Kosinuskurve“* einfach auf Grund der ersten Regel (3).

Fassen wir jetzt s als unbeschränkte Variable im Sinne von S. 47 auf, so gehört zu jedem positiven oder negativen Werte s ein bestimmter Bogen, den wir von A aus in der durch das Vorzeichen von s gegebenen Richtung abtragen, demnach auch ein Bogenendpunkt P und damit ein bestimmtes Zahlenpaar $\eta = \sin s$ und $\xi = \cos s$. Dabei liefern je zwei

1) Statt der genaueren Schreibweise $(\sin s)^2$, $(\cos s)^2$, ... für die Potenzen der trigonometrischen Funktionen gebrauchen wir die üblichen Abkürzungen $\sin^2 s$, $\cos^2 s$, ...

solche s, die um ein Multiplum der Peripherielänge 2π verschieden sind, den gleichen Endpunkt P und also die gleichen Werte $\sin s$ und $\cos s$. *Die Funktionen* $\sin s$ *und* $\cos s$ *sind bei unbeschränkt veränderlichem s „eindeutige" Funktionen, die die Eigenschaft haben, ihre Werte unverändert zu erhalten, falls das Argument s um ein Multiplum* $2n\pi$ *von* 2π *geändert wird:*

$$(4)\quad \sin(x+2n\pi)=\sin x,\quad \cos(x+2n\pi)=\cos x,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots.$$

Wir nennen die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ dieserhalb „*periodisch*" und bezeichnen 2π als ihre „*Periode*".

Zu zwei Argumenten s und $s'=-s$ gehören Bogenendpunkte P und P', die zur x-Achse symmetrisch liegen, also gleiche ξ, aber entgegengesetzte η und $\eta'=-\eta$ haben. Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ der unbeschränkten Variablen x genügen den Gleichungen:

$$(5)\qquad \sin(-x)=-\sin x,\quad \cos(-x)=+\cos x,$$

so daß nach S. 26 die Funktion $\sin x$ eine „*ungerade*" Funktion, $\cos x$ aber eine „*gerade*" Funktion ist. Zu zwei Bogen s und $s'=s+\pi$ gehören diametrale Endpunkte P und P', deren Koordinaten in der Beziehung $\xi'=-\xi$, $\eta'=-\eta$ stehen. Bei Veränderung des Arguments x um π gehen die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ in ihre entgegengesetzten Werte über:

$$(6)\qquad \sin(x+\pi)=-\sin x,\quad \cos(x+\pi)=-\cos x.$$

Setzen wir hier $-x$ an Stelle von x ein, so folgt bei Benutzung von (5):

$$(7)\qquad \sin(\pi-x)=\sin x,\quad \cos(\pi-x)=-\cos x$$

und damit der Satz: „Supplementäre" Argumente x und $(\pi-x)$ haben gleiche Sinus und entgegengesetzte Kosinus. Schreibt man endlich $s=-x$ in (3) und benutzt (5), so ergeben sich die mehrfach anzuwendenden Gleichungen:

$$(8)\qquad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x.$$

Die Gleichungen (3) ff. geben uns einfache Mittel, die Kurven unserer Funktionen über das in Fig. 11 behandelte Intervall hinaus fortzusetzen. Wir gelangen zu den bekannten in Fig. 12 dargestellten Bildern, denen als Längeneinheit 1 cm zugrunde liegt. Alle vorstehenden Formeln (3) ff. kommen am Verlaufe dieser Kurven zum Ausdruck; so entspricht es z. B. der ersten Formel (8), daß die Sinuskurve durch Verschiebung um die Strecke $\frac{\pi}{2}$ nach links in die Kosinuskurve übergeht. Selbstverständlich ist nun auch folgender Satz: *Die eindeutigen Funktionen sin und cos sind in jedem endlichen Intervalle „abteilungsweise monoton" (vgl.* S. 16*) und stetig.*

Ein bemerkenswerter Unterschied gegenüber den früher betrachteten Funktionen aber tritt zutage, wenn sich das Argument etwa als stetige

Variable einer der Grenzen $\pm\infty$ nähert. Während z. B. für die natürliche Exponentialfunktion $\lim\limits_{x=-\infty} e^x = 0$ war, und also das Argument $-\infty$, dem der Funktionswert 0 entsprach, noch zugelassen werden konnte, nähern sich weder bei $\lim x = +\infty$ noch bei $\lim x = -\infty$ die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ einer Grenze, da sie ja fortdauernd zwischen ihren Extremwerten $+1$ und -1 hin und her schwanken. *Bei den Funktionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *ist demnach weder* $+\infty$ *noch* $-\infty$ *als Argument zulässig.*

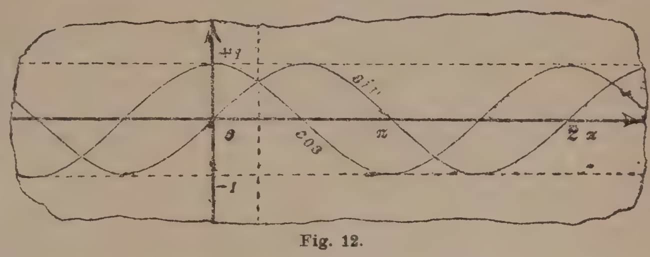


Fig. 12.

Die Eigenschaften der beiden Funktionen $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ können auf Grund ihrer Darstellungen durch $\sin x$ und $\cos x$:

$$(9) \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

leicht aus denen der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ abgeleitet werden. Doch kann man zunächst im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ die Untersuchung von $\operatorname{tg} x$ auch an die Länge $t = \operatorname{tg} s$ der Geraden AB in Fig. 10, S. 49, anknüpfen und sich dann auf die Darstellung $\operatorname{cotg} s = t^{-1}$ der Funktion cotg berufen. Hieraus folgt, wie bei den Funktionen $\sin x$ und $\cos x$, *daß* $\operatorname{tg} x$ *in jedem Intervalle* $0 \leqq x \leqq b < \frac{\pi}{2}$ *eindeutig, monoton, stetig und mit wachsendem* x *beständig wachsend ist, und daß, falls sich* x *von links her der Grenze* $\frac{\pi}{2}$ *nähert,* $\lim \operatorname{tg} x = +\infty$ *wird.* Ebenso ergibt sich, *daß* $\operatorname{cotg} x$ *in jedem Intervalle* $0 < a \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ *eindeutig, monoton, stetig und mit wachsendem* x *beständig abnehmend ist, sowie daß* $\lim \operatorname{cotg} x = +\infty$ *ist, falls sich* x *von rechts her der Grenze* 0 *nähert.*

Aus (5) ergibt sich:

$$(10) \qquad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x,$$

so daß $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ *„ungerade“* Funktionen sind. Weiter liefert (6)

$$(11) \qquad \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg} x;$$

die Funktionen $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ sind demnach gleichfalls periodisch, und zwar ist ihre *Periode* gleich π. Aus (3), (7) und (8) gehen endlich die Regeln hervor:

$$
(12)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cotg}x, & \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}x, \\ \operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg}x, & \operatorname{cotg}(\pi-x)=-\operatorname{cotg}x, \\ \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{cotg}x, & \operatorname{cotg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}x, \end{cases}
$$

welche man leicht in Worte kleidet.

Die „*Tangenskurve*" $y = \operatorname{tg} x$ können wir zunächst im Intervalle

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

nach der bei der Sinuskurve in Fig. 11, S. 53, befolgten Methode zeichnen, indem wir die zu den einzelnen Bogen s gehörenden Längen t als Ordinaten $y = t$ nach den zugehörigen Punkten $x = s$ verschieben. Fig. 13 gibt die Kurven unserer beiden Funktionen sogleich im Maßstab der Fig. 12 (Längeneinheit = 1 cm). Wir lesen aus ihnen ab: „*Unendlichkeitspunkte*" *der Funktion* $\operatorname{tg} x$ *sind* $x = \pm\frac{\pi}{2}, \ \pm 3\frac{\pi}{2}, \ \pm 5\frac{\pi}{2}, \ldots,$ *solche der Funktion* $\operatorname{cotg} x$ *aber* $x = 0, \ \pm\pi, \ \pm 2\pi, \ \pm 3\pi, \ldots;$ *zwischen je zwei Unendlichkeitspunkten sind unsere Funktionen eindeutig, monoton und stetig, und zwar ist bei wachsendem* x *die Funktion* $\operatorname{tg} x$ *beständig wachsend und* $\operatorname{cotg} x$ *beständig abnehmend.*

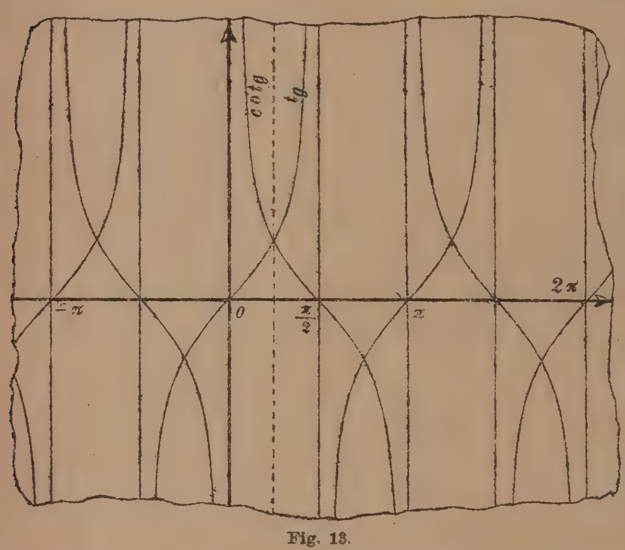


Fig. 13.

Auf die numerische Berechnung der trigonometrischen Funktionen kommen wir unten zurück.

17. Die Additionstheoreme der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. Für die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ bestehen „Additionstheoreme", die wir genau nach der S. 35ff. bei den Funktionen $\ln x$ und e^x befolgten Methode behandeln können. Die Überlegung gründet sich auf den selbstverständlichen Satz, daß der Kreis um seinen Mittelpunkt in sich drehbar ist, und daß hierbei die Bogenlängen unverändert bleiben.

Es ist nun die Drehung der Ebene um den Nullpunkt O, bei der der Punkt A der Koordinaten $(1, 0)$ in den Endpunkt des beliebig gewählten Bogens s_0 übergeht, allgemein durch:

(1) $$\xi' = \xi \cdot \cos s_0 - \eta \cdot \sin s_0, \quad \eta' = \xi \cdot \sin s_0 + \eta \cdot \cos s_0$$

dargestellt.[1]) In der Tat ist durch diese Transformation der Nullpunkt $(0, 0)$ sich selbst zugeordnet, der Punkt $(1, 0)$ rückt an die gewünschte Stelle $(\cos s_0, \sin s_0)$ und der Punkt $(0, 1)$ an die Stelle $(-\sin s_0, \cos s_0)$ und also zufolge (8), S. 54, wie es sein muß, in den Endpunkt des Bogens $\left(s_0 + \frac{\pi}{2}\right)$. Gehen aber allgemein die beiden Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) bei der Transformation (1) in (ξ_1', η_1') und (ξ_2', η_2') über, so folgt aus (1):

$$\xi_1' - \xi_2' = (\xi_1 - \xi_2) \cos s_0 - (\eta_1 - \eta_2) \sin s_0,$$
$$\eta_1' - \eta_2' = (\xi_1 - \xi_2) \sin s_0 + (\eta_1 - \eta_2) \cos s_0$$

und also durch Quadrieren, Addieren und Wurzelziehen mit Rücksicht auf (2), S. 52:

$$+\sqrt{(\xi_1' - \xi_2')^2 + (\eta_1' - \eta_2')^2} = +\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}.$$

Nach einer bekannten Regel der analytischen Geometrie lehrt diese Gleichung, daß die Entfernung irgend zweier Punkte bei der Transformation (1) unverändert bleibt. Die Kreisperipherie, bestehend aus allen Punkten, die vom festbleibenden Punkte O die Entfernung 1 haben, wird also in sich transformiert, und zwar derart, daß alle Sehnenlängen unverändert bleiben. Mit Rücksicht auf die schon festgestellte Verschiebung der Punkte $(1, 0)$ und $(0, 1)$ erkennt man somit, daß in (1) tatsächlich die gewünschte Drehung dargestellt ist.

Durch unsere Drehung wird nun der Endpunkt (ξ, η) eines beliebigen Bogens s in den Endpunkt (ξ', η') des Bogens $(s + s_0)$ übergeführt. Es gilt also, wenn wir für ξ, η, ξ', η' ihre Ausdrücke als Kosinus und Sinus dieser Bogen in (1) eintragen:

$$\cos(s + s_0) = \cos s \cdot \cos s_0 - \sin s \cdot \sin s_0,$$
$$\sin(s + s_0) = \cos s \cdot \sin s_0 + \sin s \cdot \cos s_0.$$

Setzen wir hier $s = x_1$ und $s_0 = \pm x_2$, so folgen mit Benutzung von (5), S. 54, die *Additionstheoreme der Funktionen Sinus und Kosinus*:

(2) $$\begin{cases} \sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2, \\ \cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2. \end{cases}$$

Aus diesen Grundformeln entwickelt die Trigonometrie eine große

1) Es handelt sich hier um eine bekannte Regel der analytischen Geometrie; doch geben wir im Texte einen unabhängigen Beweis für ihre Richtigkeit.

Reihe von Folgerungen, denen wir insbesondere die beiden bekannten Formeln entnehmen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \sin x_2 - \sin x_1 = +2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}, \\ \cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen setzen uns jetzt leicht in den Stand, die Stetigkeit der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ auch nach dem S. 17 aufgestellten Satze zu beweisen. Es sei $x_2 > x_1$, und beide Argumente seien bereits einander so nahe, daß der Bogen $s = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$ dem Intervalle $0 < s < \frac{\pi}{2}$ angehört. Unter Benutzung der Abkürzung s können wir die erste Formel (3) in die neuen Gestalten:

$$\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1)\cos\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\frac{\sin s}{s},$$

$$\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1)\cos\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\cos\frac{x_2-x_1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg} s}{s}$$

setzen und erinnern uns übrigens (S. 49 ff.), daß für $0 < s < \frac{\pi}{2}$ stets:

$$\frac{\sin s}{s} < 1, \qquad \frac{\operatorname{tg} s}{s} > 1$$

ist. Hieraus folgt, wenn $\cos\frac{x_2+x_1}{2} \geqq 0$ ist:

$$(4)\quad (x_2 - x_1)\cos\frac{x_2+x_1}{2}\cos\frac{x_2-x_1}{2} \leqq \sin x_2 - \sin x_1 \leqq (x_2 - x_1)\cos\frac{x_2+x_1}{2}$$

und, wenn $\cos\frac{x_2+x_1}{2} \leqq 0$ gilt:

$$(5)\quad (x_2 - x_1)\cos\frac{x_2+x_1}{2} \leqq \sin x_2 - \sin x_1 \leqq (x_2 - x_1)\cos\frac{x_2+x_1}{2}\cos\frac{x_2-x_1}{2},$$

wobei die Gleichheitszeichen nur im Falle $\sin x_2 = \sin x_1$, $\cos\frac{x_2+x_1}{2} = 0$ eintreten. In jedem Falle ist also, da $x_2 > x_1$ gilt:

$$|\sin x_2 - \sin x_1| < |x_2 - x_1|,$$

woraus nach S. 17 die Stetigkeit von $\sin x$ folgt. Für die Funktion $\cos x$ ergeben sich aus der zweiten Formel (3) entsprechend die Ungleichungen:

$$(6)\qquad -(x_2 - x_1)\sin\frac{x_2+x_1}{2}\cos\frac{x_2-x_1}{2} \leqq \cos x_2 - \cos x_1 \\ \leqq -(x_2 - x_1)\sin\frac{x_2+x_1}{2}$$

für $\sin\frac{x_2+x_1}{2} \leqq 0$ und:

$$(7)\qquad -(x_2 - x_1)\sin\frac{x_2+x_1}{2} \leqq \cos x_2 - \cos x_1 \\ \leqq -(x_2 - x_1)\sin\frac{x_2+x_1}{2}\cos\frac{x_2-x_1}{2}$$

für $\sin\frac{x_2+x_1}{2} \geqq 0$, woraus dann wieder leicht die Stetigkeit der Funktion $\cos x$ folgt.

Additionstheoreme für die Funktionen $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ ergeben sich leicht aus der Division der Formeln (2) durcheinander.

18. Die zyklometrischen Funktionen arc sin x, arc cos x, arc tg x und arc cotg x. Die zum Sinus inverse Funktion stellt (bei Gebrauch der Bezeichnungen von S. 49ff.) die Abhängigkeit des Bogens s von der Ordinate $\eta = \sin s$ dar. Als Bezeichnung dieser Funktion benutzen wir das Symbol $s = \operatorname{arc} \sin \eta$, welches wir „Arcus-Sinus" lesen, und welches eben zum Ausdruck bringt, daß s ein Bogen (Arcus) ist, dessen Sinus den Wert η hat. Gebrauchen wir gleich wieder x und y als Bezeichnungen der unabhängigen und der abhängigen Variablen, so schreiben wir $y = \operatorname{arc} \sin x$ und haben also $\operatorname{arc} \sin x$ als die zu $\sin x$ inverse Funktion zu bezeichnen. Die Abhängigkeiten des Bogens s von der Abszisse $\xi = \cos s$, von der Tangentenlänge $t = \operatorname{tg} s$ und von dem reziproken Werte derselben $t^{-1} = \operatorname{cotg} s$ führen in genau derselben Art zu den inversen Funktionen $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ und $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$ der Funktionen $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$. Insofern bei der ursprünglichen Bedeutung diese Funktionswerte allemal als Bogen s auf dem Kreise abzumessen waren, bezeichnet man $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ und $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$ als die „*zyklometrischen*" Funktionen.

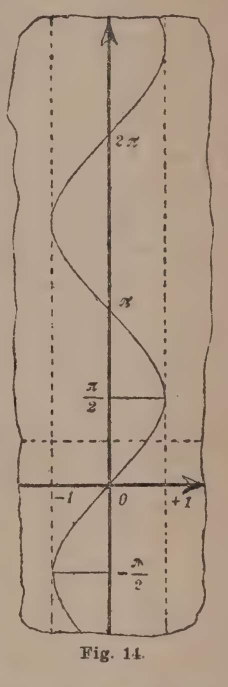


Fig. 14.

Die Kurve der Funktion $y = \operatorname{arc} \sin x$ wird nach S. 28 durch Spiegelung der Sinuskurve (Fig. 12, S. 55) an der Winkelhalbierenden des Koordinatenkreuzes erhalten und hat die in Fig. 14 skizzierte Gestalt. Die Kurve gehört vollständig dem Streifen der Ebene an, welcher durch zwei rechts und links je im Abstande 1 zur y-Achse parallel laufende Gerade eingegrenzt wird. Zu jedem x des Intervalles $-1 \leqq x \leqq +1$ gehören aber unendlich viele Ordinaten y, deren gegenseitige Beziehungen aus den Entwicklungen von § 16 leicht ableitbar sind. Zunächst haben wir für jedes x des Intervalles $-1 \leqq x \leqq +1$ eine und nur eine Ordinate, die dem Intervalle $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$ angehört; sie liefere uns den „*Hauptwert*" der Funktion $\operatorname{arc} \sin x$. *Diese Hauptwerte stellen im Intervall*

$$-1 \leqq x \leqq +1$$

eine eindeutige, stetige und mit wachsendem x beständig wachsende, ungerade

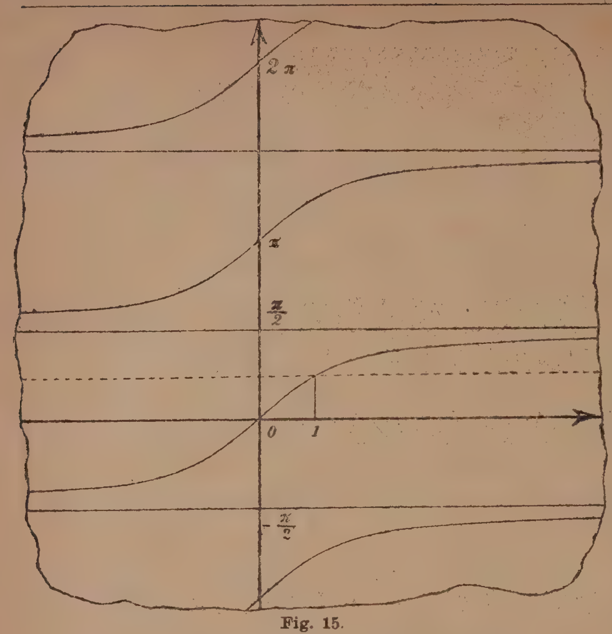


Fig. 15.

Funktion dar. Die übrigen beim einzelnen x eintretenden Ordinaten können aber auf Grund der Regeln

$$\sin(\pi - y) = \sin y$$

und

$$\sin(y + 2\pi) = \sin y$$

aus dem Hauptwerte sofort berechnet werden: *Die im Intervall*

$$-1 \leqq x \leqq +1$$

erklärte Funktion $\arcsin x$ *ist daselbst unendlich-vieldeutig, und ihre gesamten beim einzelnen* x *eintretenden Werte* $\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots$ *stellen sich im Hauptwerte* y_0 *nach der Regel dar:*

$$(1) \qquad \ldots, y_{-2} = y_0 - 2\pi, \quad y_{-1} = -y_0 - \pi, \quad y_0, \quad y_1 = -y_0 + \pi,$$
$$y_2 = y_0 + 2\pi, \quad y_3 = -y_0 + 3\pi, \quad \ldots,$$

so daß allgemein gilt:

$$(2) \qquad y_n = (-1)^n y_0 + n\pi, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Hinzuzusetzen ist nur noch, daß für $x = 1$ allemal $y_{2m} = y_{2m+1}$ wird und für $x = -1$ stets $y_{2m} = y_{2m-1}$ gilt.

In Fig. 15 ist die Kurve der Funktion $y = \operatorname{arc\,tg} x$ in der üblichen Art aus der Tangenskurve (Fig. 13, S. 56) gewonnen. Diese Kurve besteht aus unendlich vielen übereinander gelagerten kongruenten Zweigen, deren einzelner in einem parallel zur x-Achse angeordneten Streifen der Breite π verläuft. Der durch den Nullpunkt O hindurchlaufende Zweig mit seinen im Intervall

$$-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$$

gelegenen Ordinaten y möge beim einzelnen x den „*Hauptwert*" der Funktion $\operatorname{arc\,tg} x$ liefern. *Diese Hauptwerte setzen dann eine für unbeschränktes* x *erklärte Funktion zusammen, welche eindeutig, stetig, ungerade und mit wachsendem* x *stets wachsend ist.* Bemerkenswert ist, *daß hier auch* $+\infty$ *und* $-\infty$ *als Argumente zulässig sind*; als Funktionswerte gehören

diesen Argumenten $\frac{\pi}{2}$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ zu. *Alle Werte* $\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots$ *der für unbeschränktes x erklärten, unendlich-vieldeutigen Funktion* arc tg x *berechnen sich beim einzelnen x aus dem Hauptwerte y_0 nach der Regel:*

(3) $$y_n = y_0 + n\pi, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Die Funktionen arc cos x und arc cotg x können entweder genau so behandelt werden, wie arc sin x und arc tg x, oder durch einen einfachen Kunstgriff auf diese Funktionen zurückgeführt werden. In den Fig. 12 und 13 (S. 55ff.) ist die im Punkte $x = \frac{\pi}{4}$ zur x-Achse senkrecht verlaufende Gerade angedeutet. Durch Spiegelung an dieser Geraden geht die Sinuskurve in die Kosinuskurve über, die Tangenskurve aber in die Kotangenskurve. Führt man entsprechend in den Fig. 14 und 15 (S. 59 und 60) die im Punkte $y = \frac{\pi}{4}$ zur y-Achse senkrechte Gerade ein (in den Figuren punktiert), so gehen die Kurven der Funktionen arc sin x und arc tg x durch Spiegelung an dieser Geraden in die Kurven der Funktionen arc cos x und arc cotg x über. Aber bei dieser Spiegelung geht allgemein der Punkt (x, y) in den Punkt $\left(x, \frac{\pi}{2} - y\right)$ über. *Demnach stellen sich die Funktionen* arc cos x *und* arc cotg x *in den* arc sin x *und* arc tg x *des gleichen Argumentes x einfach in den Gestalten:*

(4) $$\text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sin}\, x, \quad \text{arc cotg}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\, x$$

dar. Auf Grund dieser Darstellungen überträgt man die obigen Ausführungen über arc sin x und arc tg x leicht auf arc cos x und arc cotg x. So mögen z. B. die „*Hauptwerte*“ arc cos x und arc cotg x vermöge (4) den Hauptwerten arc sin x und arc tg x entsprechen. Die Hauptwerte arc cos x liefern dann eine im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ erklärte, eindeutige, stetige und mit wachsendem x von arc cos$(-1) = \pi$ bis arc cos$(+1) = 0$ beständig abnehmende Funktion. Man wird eine entsprechende Aussage leicht über die Hauptwerte arc cotg x hinzufügen.

Die Hilfsmittel, mit denen die numerische Berechnung der Kreisfunktionen, wie sie in den Tafelwerken vorliegt, durchgeführt wurde, lernen wir später kennen. Es ist indessen nützlich, auch mit den uns schon jetzt zur Verfügung stehenden Mitteln einen Versuch der numerischen Berechnung der Kreisfunktionen zu unternehmen. Da tg x und cotg x als Quotienten von sin x und cos x darstellbar sind, so beschränken wir uns auf sin x und cos x. Auch ist es ausreichend, wie man in bekannter Weise aus den Formeln von § 16 abliest, die Berechnung von sin x und cos x auf das Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ zu beschränken. Unter Berufung

auf die Gleichung $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ wird es sogar genügen, nur die Werte von $\sin x$ für jenes Intervall zu berechnen.

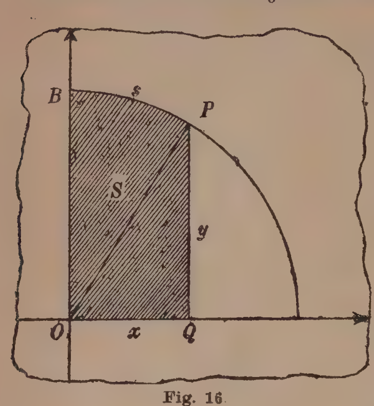


Fig. 16

Gebrauchen wir nun die durch Fig. 16 im Kreise des Radius 1 näher dargelegten Bezeichnungen und Anordnungen, so gilt:

$$x = \sin s = \sin(2\,S), \quad y = +\sqrt{1-x^2},$$

und also ist die doppelte Sektorfläche $2\,S = \arcsin x$, wo natürlich der Hauptwert gemeint ist. Legen wir zu $2\,S$ noch $x\sqrt{1-x^2}$, d.h. die doppelte Fläche des Dreiecks OPQ hinzu, so ist $(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$ der doppelte Inhalt der in Fig. 16 schraffierten Fläche. Bezeichnen wir den einfach genommenen Flächeninhalt dieses Stückes in Abhängigkeit von x durch $f(x)$, so ergibt sich:

$$\text{(5)} \qquad \arcsin x = 2\,f(x) - x\sqrt{1-x^2} = 2\,f(x) - xy.$$

Für die Berechnung von Näherungswerten der Funktion $f(x)$ haben wir nun die Methoden von S. 23 ff. zur Hand. Wir stellen uns z. B. für einige besondere Abszissen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mit Hilfe der Quadratwurzeltafel leicht die nebenstehenden zusammengehörigen Werte von x, y und xy auf. Das von den beiden Ordinaten $y_{2\nu-2}$ und $y_{2\nu}$, der x-Achse und dem Kreise eingegrenzte Flächenstück des Inhaltes $\left(f\left(\frac{\nu}{10}\right) - f\left(\frac{\nu-1}{10}\right)\right)$ schließen wir nun, entsprechend den Betrachtungen von S. 33, zwischen zwei Trapeze ein und finden hier:

ν	x_ν	y_ν	$x_\nu \cdot y_\nu$
0	0	1	0
1	0,05	0,99875	0,04994
2	0,1	0,99499	0,09950
3	0,15	0,98868	0,14830
4	0,2	0,97980	0,19596
5	0,25	0,96825	0,24206
6	0,3	0,95394	0,28618
7	0,35	0,93675	0,32786
8	0,4	0,91652	0,36661

$$\frac{1}{20}(y_{2\nu} + y_{2\nu-2}) < f\left(\frac{\nu}{10}\right) - f\left(\frac{\nu-1}{10}\right) < \frac{1}{10}\,y_{2\nu-1}.$$

Wir gewinnen so für die Anfangswerte $f(0{,}1)$, $f(0{,}2)$, $f(0{,}3)$, $f(0{,}4)$ je zwei einander ziemlich nahe gelegene Schranken und berechnen weiter auf Grund von (5):

$$\begin{aligned} 0{,}1 &< \arcsin(0{,}1) < 0{,}10025, \\ 0{,}20102 &< \arcsin(0{,}2) < 0{,}20153, \\ 0{,}30417 &< \arcsin(0{,}3) < 0{,}30496, \\ 0{,}41079 &< \arcsin(0{,}4) < 0{,}41188. \end{aligned}$$

Nehmen wir jedesmal das auf vier Stellen gekürzte arithmetische Mittel

der Schranken als Näherungswert, so folgt bei Übergang zur Funktion sin:

$$\sin 0{,}1001 = 0{,}1,$$
$$\sin 0{,}2013 = 0{,}2,$$
$$\sin 0{,}3046 = 0{,}3,$$
$$\sin 0{,}4113 = 0{,}4.$$

In den trigonometrischen Tafeln sind die Argumente der Funktionen in „Gradmaß“ angegeben. Da nach S. 51 der Winkel vom Bogenmaß 1 in Gradmaß $57{,}29577\cdots^0$ groß ist, so muß man die Argumente der vier eben genannten Sinuswerte mit 57,2958 multiplizieren, um die Schreibweise der Tafeln zu erhalten:

$$\sin\ 5{,}7353^0 = 0{,}1,$$
$$\sin 11{,}5336^0 = 0{,}2,$$
$$\sin 17{,}4523^0 = 0{,}3,$$
$$\sin 23{,}5658^0 = 0{,}4.$$

Um hieraus z. B. den Wert $\sin 8^0$ zu berechnen, nehmen wir an, daß im Intervall von $5{,}7353^0$ bis $11{,}5336^0$ die Änderungen der Funktion Sinus den Änderungen des Argumentes proportional seien.[1]) Es gilt dann, falls $\sin 8^0 = y$ gesetzt wird, die Proportion:

$$(y - 0{,}1) : 0{,}1 = (8 - 5{,}7353) : (11{,}5336 - 5{,}7353),$$

woraus sich $\sin 8^0 = 0{,}13906$ berechnet. Der auf fünf Stellen gekürzte Wert von $\sin 8^0$ ist nun, wie man aus den Tafeln entnimmt, 0,13917, so daß der von uns erhaltene Wert um etwas mehr als eine Einheit der „vierten“ Stelle zu klein ist.

Aufgaben. 1) Bei der Drehung des Kreises um seinen Mittelpunkt ändert sich die Länge $(s_2 - s_1)$ des von den beiden Punkten (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) eingegrenzten Bogens nicht. Man kleide daraufhin entsprechend der Formel (2) S. 35 auf Grund von (1) S. 57 das Additionstheorem der Funktionen arc sin x und arc cos x in die allgemeinen Gestalten:

$$\operatorname{arc\,sin} \eta_2 - \operatorname{arc\,sin} \eta_1 = \operatorname{arc\,sin} (\xi_2 \sin s_0 + \eta_2 \cos s_0) - \operatorname{arc\,sin} (\xi_1 \sin s_0 + \eta_1 \cos s_0),$$
$$\operatorname{arc\,cos} \xi_2 - \operatorname{arc\,cos} \xi_1 = \operatorname{arc\,cos} (\xi_2 \cos s_0 - \eta_2 \sin s_0) - \operatorname{arc\,cos} (\xi_1 \cos s_0 - \eta_1 \sin s_0).$$

2) Man leite aus den vorstehenden Formeln die besonderen Gestalten des Additionstheorems ab:

$$\operatorname{arc\,sin} x_1 \pm \operatorname{arc\,sin} x_2 = \operatorname{arc\,sin} \left(x_1 \sqrt{1 - x_2^2} \pm x_2 \sqrt{1 - x_1^2}\right),$$
$$\operatorname{arc\,cos} x_1 \pm \operatorname{arc\,cos} x_2 = \operatorname{arc\,cos} \left(x_1 x_2 \mp \sqrt{1 - x_1^2}\sqrt{1 - x_2^2}\right).$$

---

1) Dies läuft darauf hinaus, daß wir die Sinuskurve zwischen den beiden nahe beieinander gelegenen Punkten der Abszissen 0,1001 und 0,2013 durch die diese beiden Punkte verbindende Sehne ersetzen.

3) Man beweise die Gleichungen:

$$\operatorname{arc}\sin x = \operatorname{arc}\cos\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

$$\operatorname{arc}\cos x = \operatorname{arc}\sin\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right),$$

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \operatorname{arc}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arc}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right),$$

wobei man Genaueres über die Vorzeichenbestimmung der Quadratwurzeln feststellen wolle.

19. Die hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Cof}\, x$, $\mathfrak{Tg}\, x$ und $\mathfrak{Cotg}\, x$. Bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte P des Kreises vom Radius 1 um O wieder mit ξ und η und behalten im übrigen alle bisherigen Bezeichnungen bei, so gilt:

$$(1) \qquad \xi = \cos(2S), \quad \eta = \sin(2S),$$

unter der Variablen S den Inhalt der Sektorfläche verstanden.

Wir können nun leicht die Entwicklungen von S. 31 ff. über die Funktionen $\ln x$ und e^x einer solchen Umgestaltung unterziehen, daß volle Analogie zu den Formeln (1) und den ihnen zugrunde liegenden geometrischen Vorstellungen hervortritt. Wir werden hierbei aus der natürlichen Exponentialfunktion die „*hyperbolischen*“ Funktionen herstellen, welche den trigonometrischen Funktionen entsprechen. Ihre inversen Funktionen, welche sich in einfacher Weise durch den natürlichen Logarithmus $\ln x$ darstellen lassen werden, entsprechen in derselben Weise den zyklometrischen Funktionen. Als gemeinsame Benennung für die hyperbolischen Funktionen und ihre inversen reihen wir an die Bezeichnung „Kreisfunktionen“ diejenige der „*Hyperbelfunktionen*“ an.

In Fig. 17 gehen wir zunächst auf die Erklärung der natürlichen Exponentialfunktion zurück. Die Kurve ist der eine Zweig der gleichseitigen Hyberbel der Gleichung $x \cdot y = 1$; S sei der Inhalt des Flächenstücks, welches durch die Ordinaten 1 und y der Abszissen $\overline{OB} = 1$ und $\overline{OQ} = x$, die Hyperbel und die x-Achse begrenzt ist, mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen, je nachdem $x > 1$ oder $0 < x < 1$ gilt. Dann ist nach der Erklärung der natürlichen Exponentialfunktion:

$$x = e^S, \quad y = x^{-1} = e^{-S}.$$

Die halbe Hauptachse $\overline{OA}$ der Hyperbel ist gleich $\sqrt{2}$. Üben wir jetzt auf die Ebene die Transformation:

$$x' = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

aus, so geht die Kurve in die in Fig. 18 stärker ausgezogene Hyperbel der Gleichung $x' \cdot y' = \frac{1}{2}$ über, deren halbe Hauptachse $OA' = 1$ ist. Nach dem Schlußsatze von § 8 (S. 26) hat die transformierte Fläche $A'B'Q'P'$ den Inhalt $S' = \frac{1}{2} S$. Die Koordinaten x', y' des einzelnen Punktes P' vom

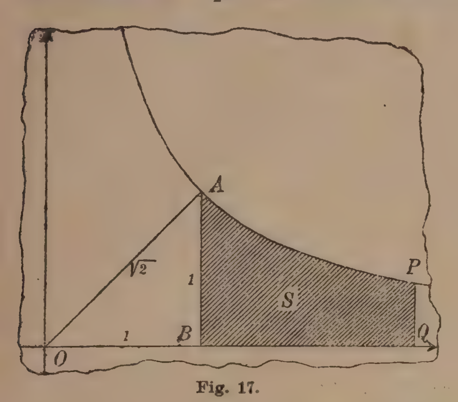


Fig. 17.

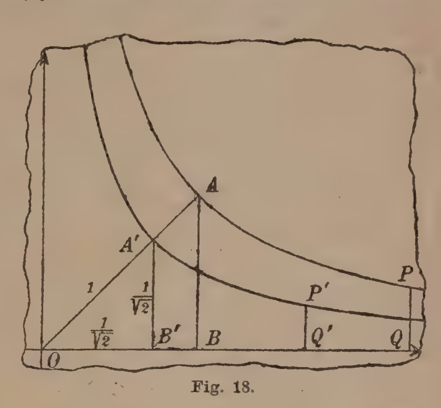


Fig. 18.

neuen Hyperbelzweige stellen sich nun als Funktionen der mit dem richtigen Zeichen versehenen Maßzahl S' der Fläche in der Gestalt dar:

$$(2) \qquad x' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2S'}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2S'}.$$

Die Kurvengleichung[1]) $x \cdot y = \frac{1}{2}$ können wir geometrisch dahin deuten, daß das Dreieck OPQ in Fig. 19 für jeden Hyperbelpunkt P den konstanten Inhalt $\frac{1}{4}$ hat. Insbesondere ist also auch $\triangle OPQ = \triangle OAB$. Legen wir demnach zur Fläche S zunächst $\triangle OAB$ hinzu und nehmen sodann $\triangle OPQ$ fort[2]), so ergibt sich, daß der zum Punkte P gehörende „Hyperbelsektor“ OAP (in Fig. 19 schraffiert) gleichfalls den Inhalt S hat; natürlich ist nach wie vor S positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem P rechts vom Scheitelpunkte A oder oberhalb desselben liegt. Die Koordinaten x, y der Hyperbelpunkte stellen sich also als Funktionen der mit dem richtigen Vorzeichen versehenen Sektorfläche S so dar:

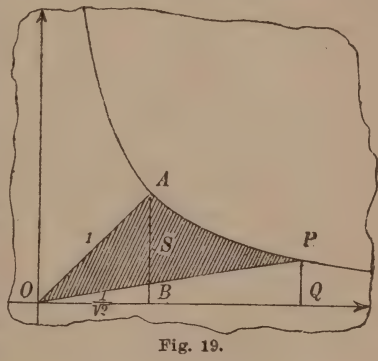


Fig. 19.

$$(3) \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2S}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2S}.$$

1) Da wir nur noch mit der neuen Hyperbel zu arbeiten haben, so dürfen wir die Indizes an den Bezeichnungen weiterhin fortlassen.

2) Gilt $0 < x < 1$, so wolle man zuerst $\triangle OPQ$ zufügen und dann $\triangle OAB$ fortnehmen.

Wir verlegen nun die halbe Hauptachse OA der Hyperbel auf die positive Abszissenachse, indem wir die ganze Fig. 19 um 45^0 nach unten (Richtung abnehmender y) um O herumdrehen, und nehmen sodann noch eine Spiegelung an der Abszissenachse vor. Die Spiegelung dient dem Zwecke, daß die Sektoren mit „positiven" Maßzahlen S auf der Seite der „positiven" Ordinaten y liegen. Die Drehung wird durch die Gleichungen (1) S. 57 dargestellt, wenn wir $s_0 = -\frac{\pi}{4}$ setzen; die Spiegelung bewirkt dann noch einen Zeichenwechsel der rechten Seite der zweiten Gleichung, so daß der Punkt (x, y) in den Punkt der Koordinaten:

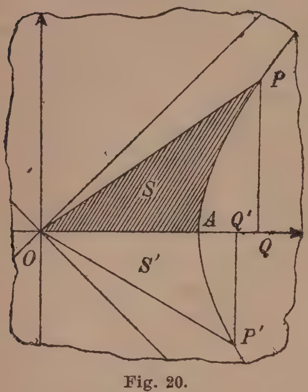


Fig. 20.

$$\xi = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \tag{4}$$

übergeführt wird.

Die neue Anordnung der Figur ist hierneben (Fig. 20) gegeben. Die gleichseitige Hyperbel hat nun die Gleichung $\xi^2 - \eta^2 = 1$, welche der Kreisgleichung $\xi^2 + \eta^2 = 1$ entspricht; der in der Figur schraffierte Sektor OAP hat positive Maßzahl S, der Sektor OAP' negative Maßzahl S'. Die Koordinaten ξ und η des einzelnen Hyperbelpunktes stellen sich zufolge (3) und (4) als Funktionen der doppelten Sektorfläche $2S$ in der Gestalt dar:

$$\xi = \frac{e^{+2S} + e^{-2S}}{2}, \quad \eta = \frac{e^{+2S} - e^{-2S}}{2}. \tag{5}$$

Hiermit ist nun die volle Analogie zu den Gleichungen (1) und ihren geometrischen Grundlagen erreicht. Um dies auch in den Bezeichnungen zum Ausdruck zu bringen, nennt man ξ und η als Funktionen von $2S$ den *„hyperbolischen Kosinus"* und *„hyperbolischen Sinus"* und schreibt:

$$\xi = \mathfrak{Cos}\,(2S), \quad \eta = \mathfrak{Sin}\,(2S). \tag{6}$$

Setzen wir wieder x an Stelle des Argumentes $2S$, so erscheinen die beiden erklärten hyperbolischen Funktionen in der natürlichen Exponentialfunktion so darstellbar:

$$\mathfrak{Cos}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathfrak{Sin}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{7}$$

Ihre Eigenschaften gehen aus denen von e^x leicht hervor: *Es sind* $\mathfrak{Cos}\,x$ *und* $\mathfrak{Sin}\,x$ *für unbeschränktes* x *eindeutig und stetig, und es ist* $\mathfrak{Cos}\,x$ *eine gerade,* $\mathfrak{Sin}\,x$ *eine ungerade Funktion; insbesondere gilt für* $\lim x = \pm\infty$:

$$\lim_{x=\pm\infty} \mathfrak{Cos}\,x = +\infty, \quad \lim_{x=\pm\infty} \mathfrak{Sin}\,x = \pm\infty.$$

Die Kurven unserer Funktionen ergeben sich leicht aus den Kurven der beiden Funktionen $e^{\pm x}$ (s. Fig. 7, S. 38); in Fig. 21 sind beide Kurven unter Zugrundelegung von 1 cm als Längeneinheit dargestellt. In den

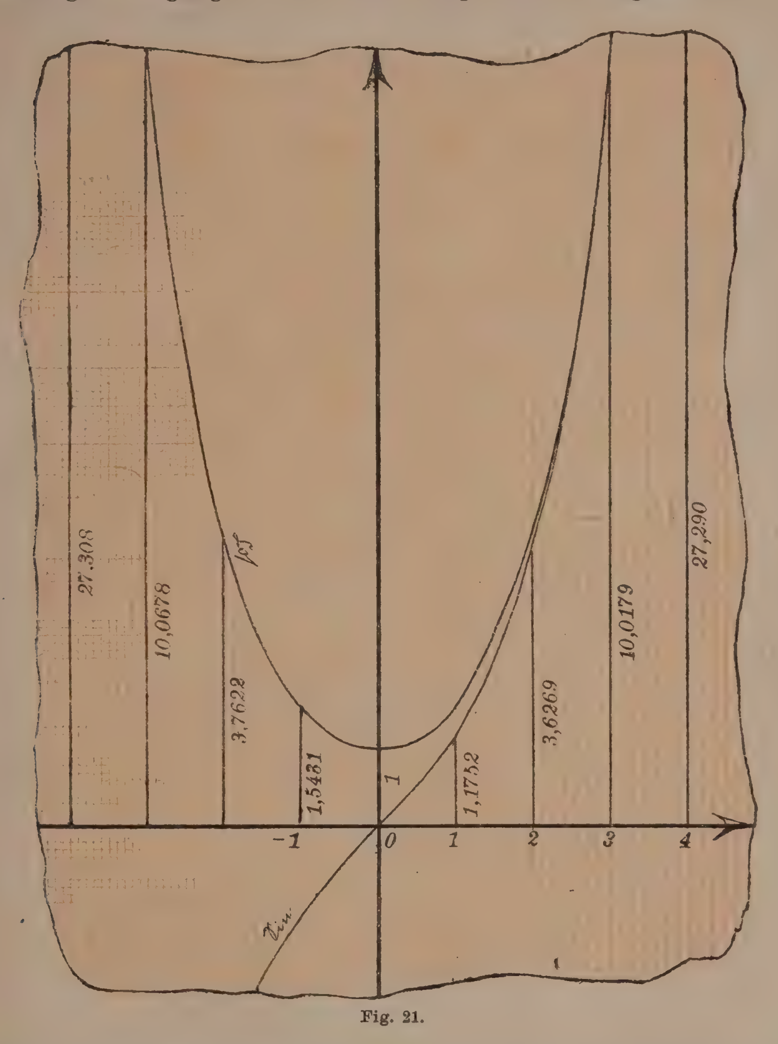


Fig. 21.

Tafeln sind die Werte der Funktionen Sin x und Cof x gewöhnlich nur für kleine positive Argumente x zusammengestellt. So findet man z. B. in dem S. 27 genannten Buche eine Tafel, welche die Werte Sin x und Cof x auf vier bzw. drei Stellen für $0 \leqq x \leqq 5{,}09$ angibt, und zwar fortschreitend nach Hundertsteln des Argumentes. Der Grund, warum die Tafeln nicht weiter ausgedehnt sind, ist der, daß e^{-x} bei wachsendem x

sich schnell dem Werte 0 nähert; so ist bereits für $x \geqq 5$ der Wert $e^{-x} \leqq 0{,}008$, so daß für $x \geqq 5$ bis auf Bruchteile eines Hundertstel $\mathfrak{Cos}\, x = \mathfrak{Sin}\, x = \frac{1}{2} e^x$ zu setzen ist, und also die Logarithmentafel zur Berechnung der hyperbolischen Funktionen unmittelbar benutzbar wird. In Fig. 21 läuft denn auch rechter Hand die Sin-Kurve alsbald dicht unter der Cos-Kurve.

Die Funktion $\mathfrak{Sin}\, x$ ist mit wachsendem x beständig wachsend, und von $\mathfrak{Cos}\, x$ gilt wenigstens für $x > 0$ dasselbe. Die Eigenschaft der Periodizität von $\sin x$ und $\cos x$ kehrt also hier bei den hyperbolischen Funktionen nicht wieder. Im übrigen aber herrscht eine weitgehende Analogie zwischen beiden Funktionsarten. An (2) S. 52 schließt sich hier die entsprechende Relation:

$$(8) \qquad \mathfrak{Cos}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1$$

an. Vor allem aber besteht auch für die hyperbolischen Funktionen ein „*Additionstheorem*“, welches wir auf Grund der Relationen:

$$(9) \qquad e^x = \mathfrak{Cos}\, x + \mathfrak{Sin}\, x, \quad e^{-x} = \mathfrak{Cos}\, x - \mathfrak{Sin}\, x$$

leicht aus dem Additionstheorem der Exponentialfunktion (vgl. (3) S. 39) ableiten. Schreiben wir nämlich die Gleichung:

$$e^{\pm(x_1 + x_2)} = e^{\pm x_1} \cdot e^{\pm x_2}$$

nach (9) in den Funktionen Cos und Sin, so folgt:

$$\mathfrak{Cos}\,(x_1 + x_2) \pm \mathfrak{Sin}\,(x_1 + x_2) = (\mathfrak{Cos}\, x_1 \pm \mathfrak{Sin}\, x_1)(\mathfrak{Cos}\, x_2 \pm \mathfrak{Sin}\, x_2).$$

Multipliziert man rechts aus und schreibt das Resultat gesondert für die oberen und die unteren Zeichen, so folgt durch Addition und Subtraktion beider Gleichungen das *Additionstheorem der hyperbolischen Funktionen:*

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathfrak{Cos}\,(x_1 + x_2) = \mathfrak{Cos}\, x_1 \cdot \mathfrak{Cos}\, x_2 + \mathfrak{Sin}\, x_1 \cdot \mathfrak{Sin}\, x_2, \\ \mathfrak{Sin}\,(x_1 + x_2) = \mathfrak{Sin}\, x_1 \cdot \mathfrak{Cos}\, x_2 + \mathfrak{Cos}\, x_1 \cdot \mathfrak{Sin}\, x_2. \end{cases}$$

Setzt man $-x_2$ an Stelle von $+x_2$ und beachtet, daß Cos eine gerade und Sin eine ungerade Funktion ist, so folgt aus (10) weiter:

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathfrak{Cos}\,(x_1 - x_2) = \mathfrak{Cos}\, x_1 \cdot \mathfrak{Cos}\, x_2 - \mathfrak{Sin}\, x_1 \cdot \mathfrak{Sin}\, x_2, \\ \mathfrak{Sin}\,(x_1 - x_2) = \mathfrak{Sin}\, x_1 \cdot \mathfrak{Cos}\, x_2 - \mathfrak{Cos}\, x_1 \cdot \mathfrak{Sin}\, x_2. \end{cases}$$

Genau so wie in der Trigonometrie sind diese Gleichungen die Quelle für eine große Anzahl weiterer Relationen zwischen den hyperbolischen Funktionen. Wir notieren z. B. die beiden Gleichungen:

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathfrak{Sin}\, x_2 - \mathfrak{Sin}\, x_1 = 2\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x_2 + x_1}{2} \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{x_2 - x_1}{2}, \\ \mathfrak{Cos}\, x_2 - \mathfrak{Cos}\, x_1 = 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x_2 + x_1}{2} \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{x_2 - x_1}{2}, \end{cases}$$

welche den Gleichungen (3) S. 58 genau entsprechen und wie diese abgeleitet werden.

Mit Hilfe der Gleichungen (12) ist es leicht, die Stetigkeit der Funktionen $\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Cos}\, x$ in jedem endlichen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ auch nach der S. 17 angegebenen Regel zu beweisen. Eine kleine Zwischenbetrachtung schließen wir vorerst an Fig. 22 an, in welcher P ein beliebiger Hyperbelpunkt mit $\eta > 0$ sei. Offenbar ist der Inhalt des Dreiecks OAB kleiner als S, und weiter ist S kleiner als die Fläche des Dreiecks OAP. Da man $\overline{OA} = 1$ und $\overline{AB} = \frac{\eta}{\xi}$ hat, so folgt:

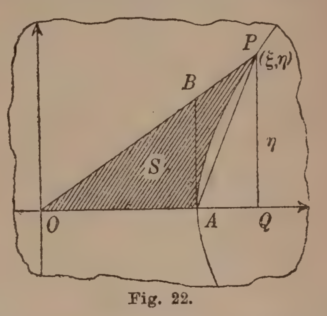


Fig. 22.

$$\frac{\eta}{\xi} < 2S < \eta, \quad \frac{1}{\xi} < \frac{2S}{\eta} < 1$$

oder, wenn wir $2S = x$, $\eta = \mathfrak{Sin}\, x$, $\xi = \mathfrak{Cos}\, x$ einsetzen:

$$(13) \qquad 1 < \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{x} < \mathfrak{Cos}\, x,$$

gültig für jedes $x > 0$. Sind nun x_1 und $x_2 > x_1$ irgend zwei Argumente, so ist $x = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0$. Die erste Gleichung (12) in der Gestalt:

$$\mathfrak{Sin}\, x_2 - \mathfrak{Sin}\, x_1 = (x_2 - x_1) \cdot \mathfrak{Cos}\, \frac{x_2 + x_1}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{x},$$

liefert also, da alle Werte der $\mathfrak{Cos}$-Funktion positiv sind, zufolge (13) die Ungleichungen:

$$(14) \quad (x_2 - x_1)\, \mathfrak{Cos}\, \frac{x_2 + x_1}{2} < \mathfrak{Sin}\, x_2 - \mathfrak{Sin}\, x_1 < (x_2 - x_1)\, \mathfrak{Cos}\, \frac{x_2 + x_1}{2}\, \mathfrak{Cos}\, \frac{x_2 - x_1}{2}.$$

Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (12), falls $\mathfrak{Sin}\, \frac{x_2 + x_1}{2} \geqq 0$ ist:

$$(15) \quad (x_2 - x_1)\, \mathfrak{Sin}\, \frac{x_2 + x_1}{2} \leqq \mathfrak{Cos}\, x_2 - \mathfrak{Cos}\, x_1 \leqq (x_2 - x_1)\, \mathfrak{Sin}\, \frac{x_2 + x_1}{2}\, \mathfrak{Cos}\, \frac{x_2 - x_1}{2},$$

während man für $\mathfrak{Sin}\, \frac{x_2 + x_1}{2} \leqq 0$ an Stelle dieser Ungleichung die folgende findet:

$$(16) \quad (x_2 - x_1)\, \mathfrak{Sin}\, \frac{x_2 + x_1}{2}\, \mathfrak{Cos}\, \frac{x_2 - x_1}{2} \leqq \mathfrak{Cos}\, x_2 - \mathfrak{Cos}\, x_1 \leqq (x_2 - x_1)\, \mathfrak{Sin}\, \frac{x_2 + x_1}{2}.$$

Die Stetigkeit unserer Funktionen ergibt sich hieraus für irgendein endliches Intervall $a \leqq x \leqq b$ leicht, wie wir etwa am Beispiele der $\mathfrak{Sin}$-Funktion erläutern. Die beiden dem Intervall entnommenen Zahlen x_1 und $x_2 > x_1$ sollen jedenfalls der Ungleichung $0 < x_2 - x_1 < 2$ genügen, so daß (vgl. Fig. 21, S. 67) die Ungleichung $\mathfrak{Cos}\, \frac{x_2 - x_1}{2} < 1{,}6$ besteht. Da weiter $a < \frac{x_1 + x_2}{2} < b$ gilt, so ist mindestens eine der beiden Zahlen

$\mathfrak{Cof}\, a$ und $\mathfrak{Cof}\, b$ (wir wollen sie mit c bezeichnen) größer als $\mathfrak{Cof}\,\frac{x_2+x_1}{2}$. Aus (14) folgt somit:

$$|\mathfrak{Sin}\, x_2 - \mathfrak{Sin}\, x_1| < 1{,}6 \cdot c \cdot |x_2 - x_1|.$$

Soll nun der links stehende Betrag kleiner als die beliebig klein gewählte positive Zahl δ sein, so setzen wir $\lambda = \frac{5}{8} \cdot c^{-1} \cdot \delta$ oder, falls dieser Wert noch größer als 2 sein sollte, $\lambda = 2$. Dann ist in der Tat für je zwei der Bedingung

$$|x_2 - x_1| \leqq \lambda$$

genügende Argumente x_1, x_2 des fraglichen Intervalls stets

$$|\mathfrak{Sin}\, x_2 - \mathfrak{Sin}\, x_1| < \delta,$$

woraus nach S. 17 die Stetigkeit der Funktion $\mathfrak{Sin}\, x$ folgt.

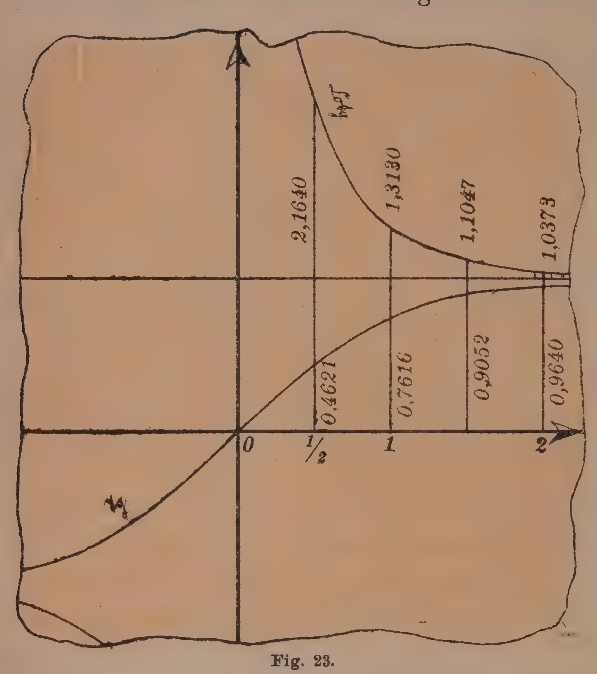


Fig. 23.

Wie bei den trigonometrischen Funktionen erklären wir noch zwei weitere hyperbolische Funktionen, nämlich den *„hyperbolischen Tangens"* und den *„hyperbolischen Kotangens"* durch:

$$\text{(17)} \qquad \mathfrak{Tg}\, x = \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Cof}\, x} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 x}}, \quad \mathfrak{Cotg}\, x = \frac{\mathfrak{Cof}\, x}{\mathfrak{Sin}\, x} = \frac{1}{\mathfrak{Tg}\, x}.$$

Die Darstellung dieser Funktionen durch die natürliche Exponentialfunktion ist:

$$\text{(18)} \qquad \mathfrak{Tg}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \mathfrak{Cotg}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Beide Funktionen sind ungerade, und $\mathfrak{Cotg}\, x$ hat bei $x = 0$ einen Unendlichkeitspunkt; im übrigen wolle man sich die Eigenschaften der Funktionen $\mathfrak{Tg}\, x$ und $\mathfrak{Cotg}\, x$ an der Hand ihrer Kurven veranschaulichen, die in Fig. 23 unter Auswahl von 2 cm als Längeneinheit dargestellt sind.

20. Die Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Ar\,Sin}\, x$, $\mathfrak{Ar\,Cof}\, x$, $\mathfrak{Ar\,Tg}\, x$ und $\mathfrak{Ar\,Cotg}\, x$. Bei Inversion der Funktion $\eta = \mathfrak{Sin}\,(2S)$ ist der Wert η gegeben oder als unabhängig anzusehen, und die doppelte Sektorfläche

(area) $2S$ gesucht bzw. in Abhängigkeit von η betrachtet. Man bezeichnet diese Funktion $2S$ von η durch das Symbol $2S = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\eta$, welches als „Area-Sinus" zu lesen ist. Gebrauchen wir wieder die üblichen Bezeichnungen x und y für Argument und Funktion, so ist $y = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x$ die inverse Funktion zu $\mathfrak{Sin}\,x$. Entsprechend sind die drei Funktionen $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,x$ als die zu $\mathfrak{Cof}\,x$, $\mathfrak{Tg}\,x$ und $\mathfrak{Cotg}\,x$ inversen Funktionen zu erklären.

Durch Spiegelung der Kurven der hyperbolischen Funktionen an der Winkelhalbierenden des Koordinatenkreuzes erhält man die Kurven der Funktionen $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x$ usw.[1]) Aus den entstehenden Figuren liest man leicht ab: *Die Funktion* $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x$ *ist für unbeschränkt veränderliches* x *erklärt und eindeutig;* $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x$ *ist für* $x \geqq 1$ *erklärt und ist zweideutig für* $x > 1$ *und eindeutig, nämlich gleich* 0, *für* $x = 1$; $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x$ *ist für* $-1 < x < +1$ *und* $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,x$ *für* $x < -1$ *und* $x > +1$ *erklärt, beide Funktionen sind, soweit sie erklärt sind, eindeutig; übrigens gilt:*

$$(1)\qquad \lim_{x=\pm 1} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x = \pm\infty, \quad \lim_{x=\pm 1} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,x = \pm\infty, \quad \lim_{x=\pm\infty} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,x = 0.$$

Alle vier Funktionen drücken sich in einfacher Weise durch den natürlichen Logarithmus aus, und zwar so:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), & \\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right), & x \geqq +1, \\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), & -1 < x < +1. \\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), & x < -1 \text{ und } x > +1. \end{cases}$$

Die Quadratwurzeln $\sqrt{1-x^2}$ und $\sqrt{x^2-1}$ in den beiden ersten Gleichungen sind positiv zu nehmen. Es wird genügen, eine dieser Gleichungen, etwa die erste zu zeigen. Aus (7) S. 66 und (8) S. 68 folgt:

$$x = \mathfrak{Sin}\,y = \frac{e^{+y} - e^{-y}}{2}, \quad +\sqrt{1+x^2} = \mathfrak{Cof}\,y = \frac{e^{+y} + e^{-y}}{2},$$

woraus sich durch Addition ergibt:

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2}.$$

Also ist umgekehrt y oder $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x$ gleich $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Aufgaben. 1) Man zeige, daß sich das Additionstheorem für die Funktionen $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x$ in die folgende Gestalt kleidet:

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x_1 + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x_2 = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(x_1\sqrt{1+x_2^2} + x_2\sqrt{1+x_1^2}\right),$$
$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x_1 + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x_2 = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(x_1 x_2 + \sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\right),$$

wo die Wurzeln durchweg positiv genommen werden sollen.

---

1) Man benutze gleich die Figuren 21 und 23, indem man die bisherige y-Achse als x-Achse auffaßt und die Figuren an dieser Achse gespiegelt denkt.

2) Man beweise die folgenden Relationen:

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,(\sqrt{1+x^2}) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right),$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,(\sqrt{x^2-1}) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right),$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

wobei man Genaueres über die Vorzeichenbestimmung der Quadratwurzeln feststellen wolle.

21. Die ganzen rationalen Funktionen. Die Potenz x^n mit einem ganzen positiven Exponenten n ist in jedem endlichen Intervall eine eindeutige und stetige Funktion von x, die S. 26 ff. näher betrachtet wurde. Ist a_n eine endliche Konstante, so ist mit x^n auch $a_n x^n$ eindeutig und stetig (s. S. 20). Bilden wir nun die Summe einer *endlichen* Anzahl verschiedener Funktionen dieser Art, so können wir den Stetigkeitssatz von S. 20 anwenden, den man leicht von zwei Summanden auf eine beliebige endliche Anzahl von Summanden ausdehnt. Fassen wir die Potenzen mit gleichen Exponenten zusammen und ordnen die Summe nach ansteigenden Potenzexponenten oder, wie wir kurz sagen, nach „steigenden Potenzen“, so gelangen wir zu einem Ausdrucke der folgenden Art:

(1) $$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Wir bezeichnen diesen Ausdruck als eine *„ganze rationale Funktion“* oder kurz als eine *„ganze Funktion“* von x; *sie ist für unbeschränktes x erklärt, stets eindeutig und in jedem endlichen Intervalle, wie wir schon feststellten, stetig.* Ist der Koeffizient a_n des „höchsten“ Gliedes in (1) von 0 verschieden, d. h. tritt die Potenz x^n, aber keine höhere wirklich auf, so heißt die Funktion *vom n^{ten} Grade*; ist $n = 1$, so spricht man auch von einer *„linearen“ Funktion.* Auch der Fall $n = 0$, wo die Funktion mit der Konstanten a_0 gleich ist, braucht nicht ausgeschlossen zu werden.

Die Funktion verdankt ihren Namen dem Umstande, daß sie durch eine bestimmte Anzahl von *„ganzen“ rationalen Rechnungen* (Addition, Subtraktion und Multiplikation) aus x und den gegebenen Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ berechenbar ist. Das zur Bezeichnung benutzte Symbol $G(x)$ soll an ihren Namen erinnern. Die Ordnung der Glieder nach steigenden Potenzen hat natürlich nur formale Bedeutung; gegenüber irgendeiner Gliederanordnung nennt man auch wohl die Schreibweise (1) *„Normalform“* der ganzen Funktion n^{ten} Grades.

Summen oder Differenzen zweier oder mehrerer ganzer rationaler Funktionen sind offenbar wieder solche Funktionen; auch Produkte von

zwei oder mehreren Funktionen dieser Art ergeben stets wieder ganze rationale Funktionen, da sie nach Ausmultiplizieren der Faktoren leicht wieder in die Gestalt (1) gesetzt werden können. Es ergibt sich hieraus, *daß überhaupt ganze rationale Rechnungen, ausgeübt auf Funktionen unserer Art, stets wieder ganze rationale Funktionen als Ergebnis liefern.* Wir hätten sogar folgende Erklärung an die Spitze stellen können: *Als „ganze rationale Funktion" bezeichnet man jede Funktion, die aus x und gegebenen Konstanten durch irgendeine Anzahl ganzer rationaler Rechnungen berechenbar ist.*

Auf die Frage nach der Monotonie der ganzen rationalen Funktionen können wir erst später eingehen. Es fehlen uns zur Behandlung dieser Frage hier noch die Mittel, die wir zum Teil erst im nächsten Abschnitt gewinnen, zum Teil freilich schon hier nennen müssen. Das wesentlichste Hilfsmittel zur Untersuchung der ganzen Funktionen ist nämlich der „Fundamentalsatz der Algebra": *Für jede algebraische Gleichung:*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0 \tag{2}$$

mit $n \geqq 1$ und $a_n \neq 0$ existiert mindestens eine reelle oder komplexe Zahl α, welche, für x eingetragen, die Gleichung befriedigt; diese Zahl α wird eine „Wurzel" der Gleichung oder auch der auf der linken Seite der Gleichung stehenden ganzen rationalen Funktion genannt. Der Satz gilt auch, falls die Koeffizienten der Gleichung komplexe Zahlen sind; doch nehmen wir ihn nur für *reelle* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in Anspruch Unter dieser Voraussetzung gilt weiter der Satz: *Ist:*

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' \sqrt{-1} = \alpha' + \alpha'' i$$

eine komplexe Wurzel der Gleichung, ist also in α der Koeffizient α'' der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ nicht gleich 0, so ist auch die zu α „konjugiert komplexe" Zahl $\bar{\alpha} = \alpha' - \alpha'' i$ eine Wurzel der Gleichung.[1])

---

1) Wir können hier den vorübergehenden Gebrauch der komplexen Zahlen, auf die wir erst später eingehen, nicht vermeiden. Auch der Beweis der angegebenen Sätze bewegt sich im Gebiete der „komplexen Variablen" und „komplexen Funktionen", wenn er auch im übrigen nur mit Überlegungen arbeitet, die uns bereits bekannt sind. Wegen der grundsätzlichen Bedeutung des „Fundamentalsatzes" seien einige Andeutungen über seinen Beweis gestattet, wobei wir uns auf den Fall reeller Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ beschränken.

In die linke Seite $G(x)$ der Gleichung (2) setzen wir die komplexe Variable $(x + iy)$ als Argument ein und berechnen den absoluten Betrag von $G(x + iy)$:

$$|G(x + iy)| = + \sqrt{G(x + iy) \cdot G(x - iy)}. \tag{3}$$

Jeder komplexen Zahl $(x + iy)$ ist hierdurch eine nicht-negative reelle Zahl $|G(x+iy)|$ zugeordnet. Das System dieser reellen Zahlen besitzt eine nicht-negative untere Grenze g (vgl. die Betrachtungen von S. 5 ff.), und man kann auf Grund des Umstandes, daß die Funktion $G(x + iy)$ auch im komplexen Gebiete stetig

22. Faktorenzerlegung der ganzen rationalen Funktionen. Eine erste wichtige Folgerung des Fundamentalsatzes ist die „Faktorenzerlegung“ der ganzen rationalen Funktionen. Hat erstlich die ganze Funktion $G(x)$ die *reelle* Wurzel α, so dividiere man $G(x)$ durch die lineare Funktion $(x-\alpha)$, und zwar so lange, bis man einen x nicht mehr enthaltenden Rest c erhält:

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{x-\alpha} = a_n x^{n-1} + a'_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a'_0 + \frac{c}{x-\alpha},$$

wobei rechts a_n die bisherige Bedeutung hat und die weiter auftretenden Koeffizienten $a'_{n-2}, \ldots, a'_0$ jedenfalls reell sind. Nennen wir die rechts als Quotient auftretende ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $G_1(x)$, so folgt nach Multiplikation mit $(x-\alpha)$:

$$G(x) = (x-\alpha) \cdot G_1(x) + c$$

als Darstellung von $G(x)$ und damit als eine in x identisch bestehende, d. h. für alle x gültige, Gleichung. Setzt man aber $x = \alpha$ ein, so folgt, da α eine Wurzel von $G(x)$ ist, $0 = c$ und damit der Satz: *Hat $G(x)$ die reelle Wurzel α, so ist die Funktion $G(x)$ „ohne Rest“ teilbar durch $(x-\alpha)$ und gestattet die Zerlegung:*

$$G(x) = (x-\alpha) \cdot G_1(x) \tag{1}$$

in das Produkt des „linearen Faktors“ $(x-\alpha)$ und einer ganzen Funktion $G_1(x)$ vom Grade $(n-1)$ mit reellen Koeffizienten, deren „höchster“ wieder a_n ist.

Ehe wir dieses Ergebnis weiter verfolgen, wollen wir uns mit einer entsprechenden Zerlegung für ein Paar komplexer Wurzeln $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ und $\bar{\alpha} = \alpha' - i\alpha''$ versehen. Durch Multiplikation der beiden linearen Funktionen $(x-\alpha)$ und $(x-\bar{\alpha})$ ergibt sich eine *reelle* Funktion zweiten

---

ist, streng beweisen (s. die Betrachtungen von S. 17 ff.), daß mindestens eine Stelle $(x_0 + iy_0)$ existiert, an der der Betrag (3) die untere Grenze g erreicht:

$$|G(x_0 + iy_0)| = g. \tag{4}$$

Kein anderer Betrag (3) kann demnach $< g$ sein.

Es ist nun aber auf Grund der Bauart von $G(x+iy)$ ziemlich leicht einzusehen, daß, *sofern $g > 0$ ist*, dicht bei $(x_0 + iy_0)$ Argumente $(x+iy)$ vorkommen, für welche:

$$|G(x+iy)| < |G(x_0+iy_0)| = g$$

zutrifft. Die Annahme $g > 0$ führt demnach auf einen Widerspruch, so daß $g = 0$ sein muß und also zufolge (4) in $\alpha = x_0 + iy_0$ eine Wurzel der algebraischen Gleichung (2) gewonnen ist.

Da übrigens die beiden Werte $G(x \pm iy)$ zufolge der Realität der $a_0, a_1, \ldots, a_n$ stets gleiche absolute Beträge haben, so folgt aus $G(x_0+iy_0) = 0$ stets auch $G(x_0 - iy_0) = 0$, womit der zweite im Texte genannte Satz bewiesen ist.

Grades oder „quadratische“ Funktion, für welche wir die abkürzende Schreibweise:

(2) $$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - 2\alpha' x + \alpha'^2 + \alpha''^2 = x^2 + \beta x + \gamma$$

gebrauchen wollen. Dividieren wir nun $G(x)$ durch diese quadratische Funktion so lange, bis wir zu einem in x linearen Reste kommen, so erhalten wir als Ergebnis mit durchweg reellen Koeffizienten:

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^2 + \beta x + \gamma} = a_n x^{n-2} + a'_{n-3} x^{n-3} + \cdots + a'_0 + \frac{cx+d}{x^2+\beta x+\gamma},$$

woraus wir durch Multiplikation mit dem Nenner:

$$G(x) = (x^2 + \beta x + \gamma) \cdot G_2(x) + (cx + d)$$

als neue Darstellung von $G(x)$ ableiten. Es ist nun wieder leicht zu sehen, daß c und d verschwinden müssen. Da nämlich sowohl für $x = \alpha$ als für $x = \bar{\alpha}$ das erste Glied rechts und auch $G(x)$ verschwinden, so folgt

$$c\alpha + d = 0 \quad \text{und} \quad c\bar{\alpha} + d = 0,$$

woraus man durch Subtraktion auf das Verschwinden von c und damit auch auf das von d schließt. *Hat die ganze rationale Funktion $G(x)$ das Paar der komplexen Wurzeln α und $\bar{\alpha}$, so ist sie „ohne Rest“ teilbar durch die zugehörige reelle quadratische Funktion* (2) *und gestattet die Zerlegung:*

(3) $$G(x) = (x^2 + \beta x + \gamma) \cdot G_2(x)$$

in das Produkt des „quadratischen Faktors“ $(x^2 + \beta x + \gamma)$ und einer ganzen Funktion $(n-2)^{ten}$ Grades $G_2(x)$ mit reellen Koeffizienten, deren „höchster“ wieder a_n ist.

Man kann auf die Funktion $G_1(x)$ in (1), falls $n-1>0$ ist, und auf die Funktion $G_2(x)$ in (3), falls $n-2>0$ ist, die Zerlegungssätze erneut anwenden und in derselben Weise fortfahren, so lange als letzter Faktor noch eine ganze Funktion mindestens ersten Grades übrig bleibt. Da sich bei Abspaltung eines linearen Faktors der Grad der zurückbleibenden Funktion stets um 1 verringert, bei Abspaltung eines quadratischen Faktors aber um 2, so führt der Prozeß spätestens nach n Schritten zu einer Funktion $G_n(x)$ „nullten Grades“ mit dem „höchsten“ Koeffizienten a_n, die also konstant gleich a_n ist. *Die Summe der Grade der abgespaltenen linearen und quadratischen Faktoren ist dann auf n gewachsen, und wir haben die beabsichtigte „Faktorenzerlegung“ der ganzen Funktion n^{ten} Grades erreicht.*

Mit Rücksicht auf weitere Verwendungen wollen wir die verschiedenen Fälle der Faktorenzerlegung der ganzen Funktion $G(x)$ noch ausdrücklich durch Formeln kennzeichnen. Erstlich seien *alle Faktoren vom*

ersten Grade und durchweg verschieden; wir bedienen uns dann der Schreibweise:

(4) $$G(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n).$$

Wir wollen zweitens annehmen, daß zwar *alle Faktoren vom ersten Grade* sind, aber *nicht mehr alle voneinander verschieden* seien. Um gleich zu einer für lineare Faktoren allgemeinen (auch den Fall (4) umfassenden) Gleichung zu gelangen, nennen wir die „voneinander verschiedenen" Faktoren $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2)$, ..., $(x-\alpha_m)$, deren Anzahl m also irgendeine Zahl des Intervalles $1 \leq m \leq n$ sein kann. Der erste Faktor trete im Verlaufe der Zerlegung ν_1 Male auf, der zweite ν_2 Male usw. *Wir haben dann für die ganze Funktion $G(x)$ vom n^{ten} Grade im Falle von nur „linearen" Faktoren die Zerlegung in der allgemeinen Gestalt:*

(5) $$G(x) = a_n(x-\alpha_1)^{\nu_1}(x-\alpha_2)^{\nu_2}\ldots(x-\alpha_m)^{\nu_m}$$

anzuschreiben, wobei natürlich für die Anzahl der Faktoren:

(6) $$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m = n$$

gilt. Kommen neben linearen Faktoren auch quadratische vor oder stellen sich vielleicht nur quadratische ein, *so wollen wir uns gleich der „allgemeinsten Gestalt" der Faktorenzerlegung der ganzen Funktion n^{ten} Grades bedienen:*

(7) $$G(x) = a_n(x-\alpha_1)^{\nu_1}(x-\alpha_2)^{\nu_2}\ldots(x-\alpha_k)^{\nu_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{\mu_1}\ldots \\ \ldots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{\mu_l}$$

wo für die Exponenten an Stelle von (6) *nun die Regel gilt:*

(8) $$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + 2\mu_l = n.$$

Im Falle (4) hat $G(x)$ jede der reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ zur Wurzel. Irgendein von diesen n Zahlen verschiedener reeller oder komplexer Wert x läßt aber keinen der Faktoren in (4) rechter Hand verschwinden, und also ist für jedes solche x auch $G(x)$ von 0 verschieden: *In diesem Falle hat also die ganze Funktion $G(x)$ genau n voneinander verschiedene reelle Wurzeln.* Rechnet man in (5) bzw. (7) die Wurzel α_1 entsprechend den ν_1 Linearfaktoren ν_1-fach und ebenso in (7) die einzelne komplexe Wurzel von $(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)$ entsprechend den μ_1 quadratischen Faktoren $(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)$ μ_1-fach, und verfährt man genau so bei den übrigen Wurzeln, so ergibt sich der bekannte Satz: *Eine ganze Funktion n^{ten} Grades $G(x)$ hat immer genau n reelle oder komplexe Wurzeln, jede in der richtigen Vielfachheit gezählt.*

Hat $G(x)$ die ν-fache reelle Wurzel α, so sagt man, *die ganze Funktion $G(x)$ der „reellen" Veränderlichen x habe einen „Nullpunkt ν^{ter} Ordnung" an der Stelle $x = \alpha$.* Einleuchtend ist dann folgender Satz: *Eine ganze*

rationale Funktion n^{ten} Grades $G(x)$ der unbeschränkten (reellen) Veränderlichen x hat höchstens n verschiedene Nullpunkte, und die Summe der Ordnungen aller Nullpunkte ist $\leqq n$; ist n ungerade, so muß $G(x)$ mindestens „einen" Nullpunkt haben; ist n gerade, so kann $G(x)$ frei von Nullpunkten sein, wenn nämlich $G(x)$ nur Paare komplexer Wurzeln hat.

23. Die gebrochenen rationalen Funktionen. Den Quotienten zweier ganzer Funktionen mit beliebigen (reellen) Koeffizienten:

$$R(x) = \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n} \tag{1}$$

nennen wir eine *„gebrochene rationale Funktion"*, falls der Nenner mindestens vom *ersten* Grade ist. Als Symbol zur Bezeichnung einer solchen Funktion benutzen wir, wie schon in (1) geschah, $R(x)$. Unter der Benennung *„rationale Funktionen"* fassen wir die ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen zusammen; die ganzen Funktionen können wir dem Ansatze (1) in der Art unterordnen, daß wir den Nenner vom „nullten Grade" annehmen.

Die Summe, die Differenz, das Projekt und nunmehr auch den Quotienten zweier rationaler Funktionen können wir mittels elementarer Rechnungen wieder auf die Gestalt (1) bringen. Es ergibt sich hieraus, *daß überhaupt rationale Rechnungen, ausgeübt auf Funktionen unserer Art, immer wieder rationale Funktionen als Ergebnis liefern.* Entsprechend hätten wir auch folgende Erklärung an die Spitze stellen können: *Als eine „rationale Funktion" bezeichnet man jede Funktion von x, die aus x und gegebenen Konstanten durch eine gewisse Anzahl rationaler Rechnungen berechenbar ist.* Die für jede solche Funktion erreichbare Gestalt (1) nennen wir dann *„Normalform"* der rationalen Funktion.

Zerlegen wir in (1) sowohl den Zähler als den Nenner in die reellen Faktoren ersten und zweiten Grades, so können gemeinsame Faktoren von Zähler und Nenner fortgehoben werden. Wir nehmen an, daß dies von vornherein geschehen sei, *daß also die in* (1) *rechts stehenden ganzen Funktionen m^{ten} und n^{ten} Grades weder eine reelle, noch ein Paar komplexer Wurzeln gemein haben.* Insbesondere wird dann ein Nullpunkt des Nenners nicht zugleich ein solcher des Zählers sein können. Der *„Grad"* der rationalen Funktion (1) wird durch die größere der beiden ganzen Zahlen m und n oder, falls sie gleich sind, durch jede von ihnen gegeben; eine rationale Funktion ersten Grades heißt auch *„linear"*.

Die im Nenner der Funktion (1) stehende ganze rationale Funktion n^{ten} Grades hat höchstens n Nullpunkte. Für jedes von einem dieser Nullpunkte verschiedene Argument x hat die Funktion (1) einen eindeutig bestimmten (endlichen) Wert. Auf das Verhalten von $R(x)$ in den Null-

punkten des Nenners kommen wir zurück; zunächst merken wir den Satz an: *Eine rationale Funktion $R(x)$ ist, abgesehen von etwaigen Nullpunkten ihres Nenners, als eine für „unbeschränkt" variables x „eindeutige" Funktion erklärt; sie ist überdies in jedem abgeschlossenen Intervalle, dem kein Nullpunkt des Nenners angehört, eine „stetige" Funktion.* Der letzte Teil des Satzes ergibt sich nach S. 20 aus der Stetigkeit der ganzen Funktionen.

Die Funktion (1) heißt *„echt gebrochen"* oder *„unecht gebrochen"*, je nachdem für die Grade m und n von Zähler und Nenner $m < n$ oder $m \geqq n$ gilt. Im letzeren Falle dividiere man mit dem Nenner in den Zähler so lange, als noch ein Divisionsrest von höherem als $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade übrig bleibt. Das Ergebnis der Division ist eine ganze Funktion $G(x)$ vom Grade $(m-n)$, der Rest eine ganze Funktion höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. *Jede unecht gebrochene rationale Funktion ist als Summe einer ganzen Funktion und einer „echt gebrochenen" rationalen Funktion darstellbar:*

$$(2) \qquad R(x) = G(x) + \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}.$$

Auch hier können Zähler und Nenner rechter Hand keinen linearen oder quadratischen Faktor gemein haben, da ein solcher bei Rückgang zur Gestalt (1) von $R(x)$ auch in dieser Gleichung rechts vorliegen würde. Da übrigens a_n als von 0 verschieden vorauszusetzen ist (damit der Grad n der echt gebrochenen Funktion auch wirklich vorliegt), so können wir durch „Erweiterung" des Bruches mit a_n^{-1} den höchsten Koeffizienten im Nenner gleich 1 machen. *Wir dürfen demnach auch gleich die Darstellung* (2) *unserer Funktion $R(x)$ in die Gestalt kleiden:*

$$(3) \qquad R(x) = G(x) + \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + x^n}.$$

Diese Darstellung umfaßt auch den Fall, daß $R(x)$ von vornherein echt gebrochen war; dann ist einfach $G(x)$ identisch mit 0.

24. Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen. Die in Formel (3) rechts verbleibende echt gebrochene Funktion gestattet eine wichtige Weiterentwicklung, welche zum Ziele hat, die Funktion als eine Summe sogenannter *„Teilbrüche"* oder *„Partialbrüche"* darzustellen.

Abkürzend bezeichnen wir den Nenner der echt gebrochenen Funktion mit $g(x)$, den Zähler mit $h(x)$ und nehmen zunächst an, daß $g(x)$ den reellen linearen Faktor $(x-\alpha)$ in der höchsten Potenz ν habe; nach (7) S. 76 gilt dann die Zerlegung:

$$g(x) = (x-\alpha)^\nu \cdot g_1(x), \qquad g_1(x) = a_0' + a_1' x + \cdots + x^{n-\nu},$$

wobei die als zweiter Faktor auftretende ganze Funktion $(n-\nu)^{\text{ten}}$ Grades

für $x = \alpha$ nicht verschwindet. Dann besteht folgender wichtiger Satz: *Versteht man unter A die endliche und von 0 verschiedene Zahl:*

(1) $$A = \frac{h(\alpha)}{g_1(\alpha)},$$

so gilt für unsere echt gebrochene Funktion die Darstellung:

(2) $$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^\nu} + \frac{h_1(x)}{(x-\alpha)^{\nu-1} g_1(x)},$$

wo das erste Glied rechter Hand einen ersten „Partialbruch" und das zweite Glied wieder eine echt gebrochene Funktion darstellt. Zunächst gilt nämlich für jede Zahl A als identische Gleichung:

$$\frac{h(x)}{(x-\alpha)^\nu g_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^\nu} + \frac{h(x) - A g_1(x)}{(x-\alpha)^\nu g_1(x)}.$$

Setzt man insbesondere den Wert (1) für A ein, so gewinnt der Zähler des zweiten Gliedes rechts, dessen Grad höchstens $(n-1)$ ist, die Wurzel α und also den linearen Faktor $(x-\alpha)$, dessen Forthebung uns zur Darstellung (2) hinführt.

Auf die in (2) rechts verbleibende echt gebrochene Funktion können wir nun, falls $\nu > 1$ ist, eine entsprechende Zerlegung anwenden:

$$\frac{h_1(x)}{(x-\alpha)^{\nu-1} g_1(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\nu-1}} + \frac{h_2(x)}{(x-\alpha)^{\nu-2} g_1(x)},$$

wobei wir nur hinzuzusetzen haben, daß jetzt A_1 auch gleich 0 sein kann, nämlich wenn $h_1(\alpha) = 0$ ist und sich also der Faktor $(x-\alpha)$ sogleich noch ein zweites Mal fortheben läßt. Indem wir die Entwicklung in gleicher Art fortsetzen, *gelangen wir zu einer Zerlegung:*

(3) $$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^\nu} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{A_{\nu-1}}{x-\alpha} + \frac{h_\nu(x)}{g_1(x)}$$

der echt gebrochenen Funktion in ν „Partialbrüche" und eine echt gebrochene Funktion, deren Nenner $g_1(x)$ die Wurzel α nicht mehr besitzt; von den ν konstanten „Partialzählern" ist der erste, A, sicher von 0 verschieden.

Offenbar besteht die Möglichkeit, für die jetzt etwa noch vorliegenden *linearen* Faktoren von $g_1(x)$ entsprechende Zerlegungen vorzunehmen. Ehe wir aber den Abschluß des Verfahrens betrachten, haben wir zu überlegen, wie sich für die etwaigen *quadratischen* Faktoren des Nenners eine „Partialbruchzerlegung" durchführen läßt. Hat $g(x)$ den quadratischen Faktor $(x^2 + \beta x + \gamma)$, und zwar im ganzen μ-fach, so setzen wir:

$$g(x) = (x^2 + \beta x + \gamma)^\mu \cdot g_1(x)$$

und haben anzunehmen, daß weder $h(x)$ noch die ganze Funktion $(n-2\mu)^{\text{ten}}$ Grades $g_1(x)$ die dem quadratischen Faktor zugehörigen kon-

jugiert komplexen Wurzeln α und $\bar{\alpha}$ haben. Es gilt nun offenbar zunächst für *jedes* Zahlenpaar B, C die identische Gleichung:

$$(4)\qquad \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^\mu} + \frac{h(x) - (Bx + C)\, g_1(x)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^\mu \cdot g_1(x)},$$

wo rechts im zweiten Gliede eine echt gebrochene Funktion steht. Wir versuchen jetzt B und C als *reelle* Größen so zu bestimmen, daß der Zähler dieser Funktion den Faktor $(x^2 + \beta x + \gamma)$ gewinnt. Zu diesem Zwecke berechnen wir uns etwa für die erste komplexe Wurzel

$$\alpha = \alpha' + i\alpha''$$

die von 0 verschiedene komplexe oder reelle Zahl:

$$(5)\qquad \frac{h(\alpha)}{g_1(\alpha)} = D + iE$$

und haben B und C aus:

$$D + iE = B\alpha + C = (B\alpha' + C) + iB\alpha''$$

als *reelle* Zahlen zu berechnen, was:

$$(6)\qquad B = \frac{E}{\alpha''}, \quad C = D - E \cdot \frac{\alpha'}{\alpha''}$$

ergibt; B und C sind hierdurch eindeutig bestimmt und endlich, und sie können nicht zugleich verschwinden, da sonst auch $D = E = 0$ sein müßte. Tragen wir die berechneten Werte B und C in (4) ein, so bekommt die im Zähler des letzten Gliedes stehende reelle Funktion die komplexe Wurzel α und also auch die konjugierte Wurzel $\bar{\alpha}$ und damit den quadratischen Faktor $(x^2 + \beta x + \gamma)$, der sich nunmehr einfach aus jenem Gliede wegheben läßt. *Berechnet man die reellen und nicht zugleich verschwindenden Zahlen B, C aus* (5) *und* (6), *so gilt für die gegebene echt gebrochene Funktion die Darstellung:*

$$(7)\qquad \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^\mu} + \frac{h_1(x)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{\mu - 1} \cdot g_1(x)}$$

als Summe eines „Partialbruches" und einer wieder echt gebrochenen Funktion.

Hierdurch ist wieder ein „Rekursionsverfahren" eingeleitet, welches uns *zu einer Partialbruchzerlegung der Gestalt:*

$$(8)\qquad \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^\mu} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{\mu - 1}} + \cdots$$
$$+ \frac{B_{\mu-1} x + C_{\mu-1}}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{h_\mu(x)}{g_1(x)}$$

hinführt; von den Koeffizienten der linearen Partialzähler sind mindestens die beiden ersten nicht zugleich 0, und übrigens steht im letzten Gliede wieder eine echt gebrochene Funktion.

Man überlege nun, wie bei Anwendung der Gleichungen (3) und (8) auf die verschiedenen Faktoren von $g(x)$ sich der Abschluß des ganzen Verfahrens gestaltet. Ist in (2) der Exponent $\nu = 2$ und $g_1(x)$ konstant gleich 1, so ist auch $h_1(x)$ konstant und werde durch A' bezeichnet. Die Gleichung (2) lautet dann:

$$\frac{h(x)}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{A'}{x-\alpha};$$

sie liefert also bei Berechnung des vorletzten Partialbruches als übrigbleibende echt gebrochene Funktion sogleich den letzten Partialbruch. Eine entsprechende Betrachtung schließt man an (7) für $\mu = 2$ und $g_1(x) = 1$ an. Die Entwicklung schließt sich demnach bei Bearbeitung des letzten Faktors von $g(x)$ stets von selbst; wir gewinnen den Satz: *Ist die Faktorenzerlegung des Nenners $g(x)$ der echt gebrochenen rationalen Funktion:*

$$(9)\quad g(x) = (x-\alpha_1)^{\nu_1}(x-\alpha_2)^{\nu_2}\cdots(x-\alpha_k)^{\nu_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{\mu_1}\cdots \cdots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{\mu_l},$$

so läßt sich die rationale Funktion als die Summe von

$$(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k + \mu_1 + \cdots + \mu_l)$$

Partialbrüchen darstellen, und zwar haben wir k Aggregate der Gestalt:

$$(10)\qquad \frac{A}{(x-\alpha)^\nu} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{A_{\nu-1}}{x-\alpha}$$

mit konstanten Partialzählern und l Aggregate der Gestalt:

$$(11)\qquad \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^\mu} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{\mu-1}} + \cdots + \frac{B_{\mu-1}x + C_{\mu-1}}{x^2+\beta x+\gamma}$$

mit linearen Partialzählern.

Die vorstehenden Entwicklungen gestatten uns, das Verhalten einer rationalen Funktion in einem Nullpunkte ihres Nenners zu kennzeichnen. Jedenfalls sind in der Zerlegung (3) S. 78 von $R(x)$ die ganze Funktion $G(x)$ und unter den Partialbrüchen der echt gebrochenen Funktion alle Aggregate (11) in jedem endlichen abgeschlossenen Intervalle eindeutig und stetig. Im einzelnen Nullpunkte α des Nenners aber ist das zugehörige Aggregat (10) nicht mehr mit einer bestimmten endlichen Zahl gleich, während sich die etwa sonst noch auftretenden Aggregate der Gestalt (10) in der Umgebung von α als eindeutig und stetig erweisen. Schreiben wir das Aggregat (10) in der Gestalt:

$$(12)\qquad \frac{A + A_1(x-\alpha) + A_2(x-\alpha)^2 + \cdots + A_{\nu-1}(x-\alpha)^{\nu-1}}{(x-\alpha)^\nu}$$

und erinnern uns, daß $A \neq 0$ ist, so zeigt sich, daß bei stetiger Annäherung des x an die Stelle α von rechts oder links her der Wert des Quotienten (12) sich „stetig“ der Grenze $+\infty$ oder $-\infty$ nähert (vgl. das Verhalten von x^{-n} bei $x = 0$, das S. 30 besprochen wurde). *Die Nullpunkte des Nenners unserer rationalen Funktion, deren Anzahl k der Bedingung $0 \leq k \leq n$ genügt, sind „Unendlichkeitspunkte“ der Funktion.*

25. Die elementaren algebraischen Funktionen. Zur ganzen Funktion (1) S. 72 ist diejenige Funktion y von x invers, die „unentwickelt“ durch die Gleichung des n^{ten} Grades:

$$(1) \qquad a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + (a_0 - x) = 0$$

gegeben ist; desgleichen ist die zur rationalen Funktion n^{ten} Grades[1]):

$$R(x) = \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}$$

inverse Funktion y von x „implizite“ durch:

$$(2) \qquad (a_n x - b_n) y^n + (a_{n-1} x - b_{n-1}) y^{n-1} + \cdots \\ \cdots + (a_1 x - b_1) y + (a_0 x - b_0) = 0$$

gegeben. Die Gleichungen (1) und (2) sind besondere Fälle der allgemeineren Gleichung:

$$(3) \qquad g_0(x) y^n + g_1(x) y^{n-1} + \cdots + g_{n-1}(x) y + g_n(x) = 0,$$

deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von x sind. Es gilt folgende Erklärung: *Genügt y als Funktion von x einer „algebraischen“ Gleichung n^{ten} Grades, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von x sind, so heißt y eine „algebraische“ Funktion von x.* Für den niedersten Fall $n = 1$ gewinnen wir die rationalen Funktionen von x wieder, die sich demnach der umfassenderen Gattung der algebraischen Funktionen unterordnen. Schreibt man die Gleichung (3) nach „abfallenden“ Potenzen von x um, so erkennt man, *daß die zu einer algebraischen Funktion inverse Funktion stets wieder eine algebraische Funktion ist.*

Für die Theorie der algebraischen Funktionen ist der Fundamentalsatz der Algebra eine wesentliche Grundlage. Im übrigen nimmt diese Theorie erst dann ihre einfachste Gestalt an, wenn wir x und y als komplexe Variable auffassen, was indessen hier nicht weiter verfolgt wird. Auch noch in anderer Hinsicht soll eine wesentliche Beschränkung eintreten. In besonderen Fällen (z. B. immer dann, wenn $n < 5$ ist) kann

1) Handelt es sich um eine „echt“ gebrochene Funktion n^{ten} Grades, so ist $b_n = 0$ und $a_n \neq 0$; bei einer „unecht“ gebrochenen Funktion n^{ten} Grades aber gilt $b_n \neq 0$.

die Gleichung (3) durch Radizierungen und übrigens rationale Rechnungen nach y aufgelöst werden. Wir wollen die rationalen Rechnungen und die Radizierung zusammenfassen als *„algebraische Rechnungen"* und geben dann folgende Erklärung: *Eine Funktion y von x, welche aus x und den gegebenen Konstanten durch eine endliche Kette „algebraischer Rechnungen" berechnet werden kann, soll eine „elementare" algebraische Funktion von x heißen.*[1]) Wir lassen dabei wie früher nur die reellen Werte y als Funktionswerte zu.

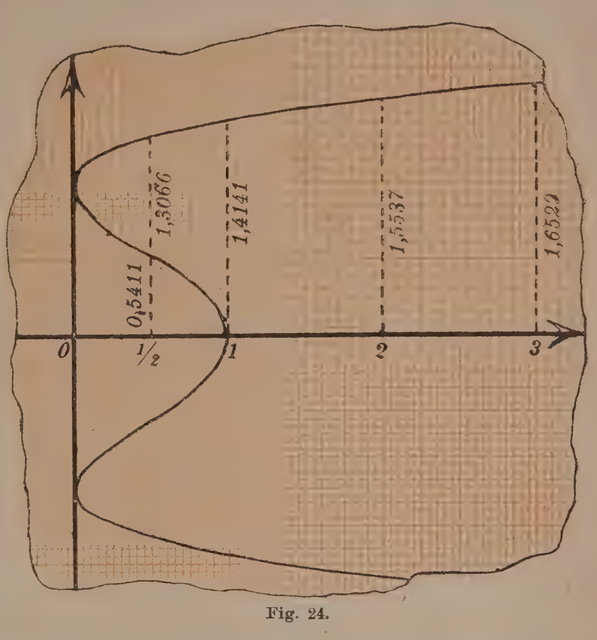


Fig. 24.

Einfachste Beispiele hierher gehöriger Funktionen sind die S. 28 ff. betrachteten Wurzeln $\sqrt[n]{x}$ für irgendwelche ganzzahligen n. Im Falle einer geraden Zahl n hatten wir in $\sqrt[n]{x}$ für $x > 0$ eine *zweideutige* Funktion, für $x < 0$ aber eine *nulldeutige* Funktion erkannt. Sind zur Berechnung einer elementaren algebraischen Funktion wiederholt Wurzeln geraden Grades zu ziehen, so gelangt man zu Funktionen, deren *„Mehrdeutigkeit"* wenigstens innerhalb gewisser Intervalle entsprechend groß sein kann. So ist z. B. die Funktion $\sqrt{1+\sqrt{x}}$, welche der biquadratischen Gleichung:

$$y^4 - 2y^2 + (1 - x) = 0$$

genügt und also der ganzen Funktion vierten Grades $(x^4 - 2x^2 + 1)$ invers ist, für $0 < x < 1$ *vierdeutig*, da jedem x dieses Intervalles zwei verschiedene positive Werte $(1 + \sqrt{x})$ und also vier verschiedene reelle Werte $\sqrt{1+\sqrt{x}}$ zugehören; für $x = 1$ hat die Funktion die *drei* Werte 0 und $\pm\sqrt{2}$, für $x = 0$ und $x > 1$ ist sie *zweideutig* und endlich für $x < 0$ *nulldeutig*. Die Kurve der Funktion $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, welche in Fig. 24 unter Auswahl von 2 cm als Längeneinheit dargestellt ist, mag diese Verhältnisse näher erläutern.

1) Daß jedes solches y einer Gleichung der Gestalt (3) genügt, ist nicht schwer zu zeigen; doch übergehen wir im Texte diesen Beweis.

26. Die elementaren transzendenten Funktionen. Alle Funktionen $f(x)$, welche nicht algebraisch sind, heißen „*transzendent*“, d. h. das Gebiet der Algebra übersteigend. Es tritt die Frage auf, ob vielleicht die Funktionen ${}^b\log x$, b^x, die Kreisfunktionen und die Hyperbelfunktionen transzendent sind. Daß diese Funktionen nicht als algebraische Funktionen „erklärt“ sind, würde uns noch nicht gestatten, sie als transzendent zu bezeichnen; denn es könnte ja sein, daß die einzelne jener Funktionen auf irgendeinem noch nicht erkannten Wege auch als „algebraische“ Funktion erklärbar sei. Daß aber z. B. die Funktion $\operatorname{arc}\sin x$ nicht algebraisch ist, können wir leicht aus dem Umstande schließen, daß diese Funktion in dem Intervalle ihrer Erklärung „∞-deutig“ ist; eine algebraische Funktion ist aber stets nur „endlichdeutig“. Indessen gewinnt man einen abschließenden Einblick in diese Verhältnisse erst innerhalb einer allgemeinen Theorie der sogenannten „analytischen“ Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Dabei zeigt sich in der Tat, *daß die Funktionen* ${}^b\log x$, b^x, *die Kreisfunktionen und die Hyperbelfunktionen „transzendent“ sind.* Es sei gestattet, schon hier diesen Namen für die fraglichen Funktionen zu gebrauchen, und zwar nennen wir sie genauer *die „elementaren“ transzendenten Funktionen*, weil sie sämtlich bereits in der Elementarmathematik auftreten.

Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei elementare algebraische Funktionen, so gilt offenbar dasselbe von jeder der Funktionen:

$$(1) \qquad \varphi(x)+\psi(x), \quad \varphi(x)-\psi(x), \quad \varphi(x)\cdot\psi(x), \quad \varphi(x):\psi(x);$$

denn jede dieser Funktionen ist wieder durch eine Anzahl algebraischer Rechnungen berechenbar. Üben wir ferner die in dem Symbol φ zusammengefaßte Kette von Operationen nicht auf x sondern auf $\psi(x)$ aus, so gewinnen wir auch in:

$$(2) \qquad f(x)=\varphi(\psi(x))$$

eine elementare algebraische Funktion; denn wieder ist $\varphi(\psi(x))$ durch eine Anzahl rationaler Rechnungen und Wurzelziehungen berechenbar. *Demgegenüber gelangen wir zu neuen transzendenten Funktionen sowohl in* (1) *wie in* (2), *falls wenigstens eine der beiden Funktionen* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *eine unserer transzendenten Funktionen* ${}^b\log x$, b^x, $\sin x, \ldots$ *war.* Wir können auch eine rationale Verbindung (1) zweier Funktionen oder die Herstellung (2) der „Funktion einer Funktion“ wiederholen oder beide Operationen kombinieren und auf diese Weise eine unbegrenzte Anzahl neuer „elementarer transzendenter Funktionen“ herstellen: wir wollen sie als „*zusammengesetzte*“ *Funktionen* bezeichnen und ihnen gegenüber

$${}^b\log x,\ b^x,\ \sin x, \ldots \operatorname{Ar\,Cotg} x$$

„*einfache*“ *transzendente Funktionen* nennen.

Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetig, *so gilt nach S. 20 dasselbe für die drei ersten Funktionen* (1), *für die vierte Funktion jedoch nur unter der Voraussetzung, daß der Nenner $\psi(x)$ nicht im Intervalle verschwindet.* Ist $\psi(x)$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetig, und liegen die daselbst eintretenden Funktionswerte $\psi(x)$ zwischen den Schranken $c \leqq \psi(x) \leqq d$, so folgt aus der Erklärung der Stetigkeit (S. 17) leicht, *daß auch $\varphi(\psi(x))$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetig ist, falls $\varphi(x)$ diese Eigenschaft im Intervalle $c \leqq x \leqq d$ besitzt.* Auf gelegentliche Unterbrechungen der Stetigkeit im Gebiete elementarer transzendenter Funktionen kommen wir noch zurück.

Als wichtige Beispiele zusammengesetzter Funktionen seien erstlich *die dekadischen Logarithmen der trigonometrischen Funktionen* genannt:

$$\log \sin x, \quad \log \cos x, \quad \log \operatorname{tg} x, \quad \log \operatorname{cotg} x,$$

deren Bedeutung für numerische Rechnungen bekannt ist. Wir stellen uns ferner mit drei Konstanten A, μ, ν die Funktion:

(3) $$y = A \cdot \sin(\mu x + \nu)$$

her, die wir durch Entwicklung von $\sin(\mu x + \nu)$ nach dem Additionstheorem unter Gebrauch der Abkürzungen:

$$A \cdot \cos \nu = a, \quad A \cdot \sin \nu = b$$

auch in die Gestalt kleiden können:

(4) $$y = a \sin \mu x + b \cos \mu x.$$

Die Funktion (3) hat die Periode $\frac{2\pi}{\mu}$. Ihre Kurve kann man nach dem in Fig. 11 (S. 53) bei der „Sinuskurve“ $y = \sin x$ befolgten Verfahren zeichnen. Man hat hier vom Kreise des Radius A auszugehen, teile dessen Peripherie vom Endpunkte des zum Zentriwinkel ν gehörenden Bogens in 2^n gleiche Teile und nehme die entsprechende Teilung in 2^n gleiche Teile mit der von den Punkten 0 und $\frac{2\pi}{\mu}$ begrenzten Strecke der Abszissenachse vor. Die beim einzelnen Teilpunkte vorliegende Kreisordinate ist dann gerade wie in Fig. 11 (S. 53) nach der richtigen Stelle der Abszissenachse zu verschieben. Es ist sehr nützlich, wenn der Leser einige besondere Beispiele dieser „verallgemeinerten Sinuskurve“ zeichnet.

Für gewisse Schwingungsvorgänge ist eine Funktion wichtig, welche aus (3) oder (4) durch Zusatz des „Exponentialfaktors“ e^{-cx} mit positiver Konstanten c hervorgeht:

(5) $$y = A \cdot e^{-cx} \sin(\mu x + \nu).$$

Um den Charakter dieser Funktion zu erläutern, ist in Fig. 25 (S. 86) das spezielle Beispiel:

(6) $$y = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sin \pi x$$

unter Auswahl von 1 cm als Längeneinheit in der Nähe des Nullpunktes gezeichnet. Die obere punktiert angedeutete Kurve entspricht der Gleichung $y = e^{-\frac{1}{2}x}$, die untere ist ihr Spiegelbild bezüglich der x-Achse. Die Kurve der Funktion (6) verläuft zwischen diesen beiden Kurven, indem sie immer diese Kurven abwechselnd berührt, und zwar in den Punkten

$$\pm \tfrac{1}{2}, \pm \tfrac{3}{2}, \pm \tfrac{5}{2}, \ldots;$$

in den Punkten ganzzahliger x durchneidet sie die x-Achse.

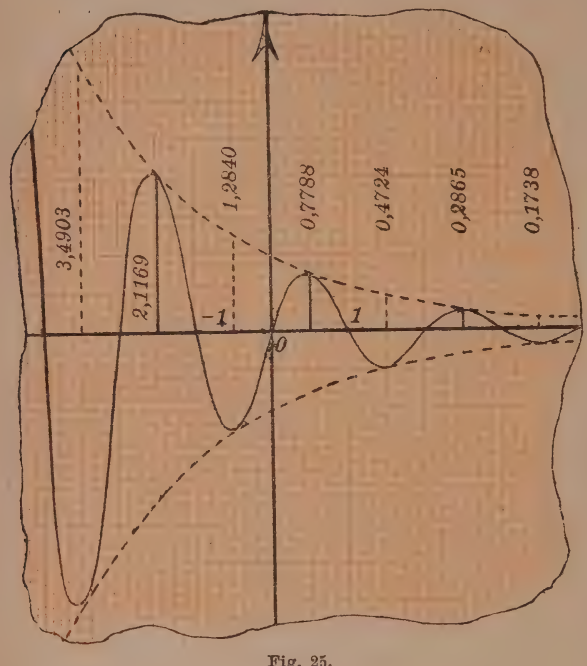


Fig. 25.

Gelegentlich trifft man auf Funktionen, die, wenn sie auch ihrer Erklärung nach als „elementar" zu bezeichnen sind, sich scheinbar unserem Ansatze der „zusammengesetzten transzendenten" Funktionen nicht einfügen. Ist a irgendeine rationale Zahl, so ist für $x > 0$ oben (S. 28 ff.) die Funktion $y = x^a$ erklärt, und zwar als „eindeutige" Funktion, wenn wir $y > 0$ vorschreiben. Ist hingegen a eine *irrationale* Zahl, so kann x^a aus dem Potenzbegriff nicht erklärt werden; indessen folgt aus der Erklärung der Exponentialfunktion (S. 39 ff.), daß x^a auch dann noch für jedes positive x eine bestimmte positive Zahl y darstellt, so daß hier scheinbar eine neue Funktion $y = x^a$ auftritt. Nun lehrt aber die Umkehrung der Exponentialfunktion mit Zuhilfenahme der Regel (8) S. 87, daß für die beiden durch die Beziehung $y = x^a$ verknüpften positiven Zahlen x, y die Gleichung besteht:

$$a = {}^{x}\log y = \left(\frac{1}{\ln x}\right) \cdot \ln y.$$

Hieraus ergibt sich umgekehrt:

$$(7) \qquad \ln y = a \cdot \ln x, \quad y = e^{a \cdot \ln x},$$

wodurch unsere Funktion $y = x^a$ bei irrationalem a als zusammengesetzte

transzendente Funktion erkärt ist. Als Zusatz folgern wir: *Auch bei irrationalem a gilt für den Logarithmus von* x^a:

(8) $$\ln(x^a) = a \cdot \ln x \quad \textit{und also} \quad {}^b\log(x^a) = a \cdot {}^b\log x,$$

eine Regel, die aus dem Additionstheorem des Logarithmus unmittelbar nicht entnommen werden kann.

Hier sei auch die Funktion $y = x^x$ erwähnt, die für $x > 0$ durch die Forderung $y > 0$ eindeutig festgelegt ist. Auf Grund der Regel (8)

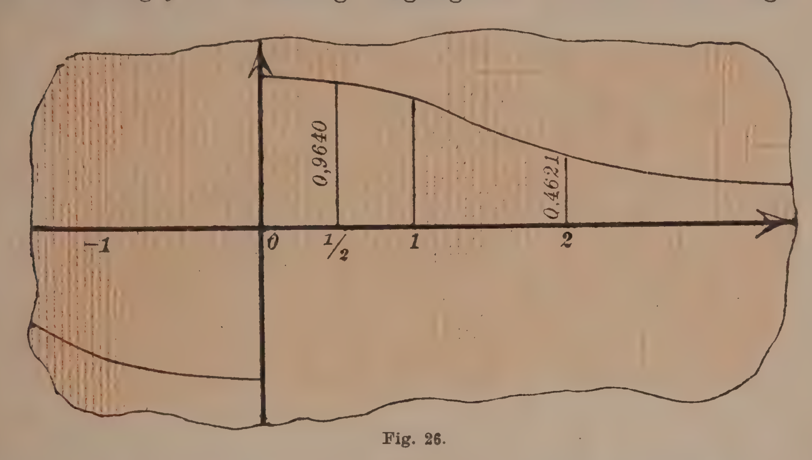


Fig. 26.

findet man leicht, *daß sich diese für* $x > 0$ *erklärte Funktion* $y = x^x$ *als zusammengesetzte transzendente Funktion in der Gestalt:*

(9) $$y = e^{x \cdot \ln x}$$

schreiben läßt. Sind allgemeiner $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ eindeutige Funktionen, so ist für solche Argumente x, bei denen $\varphi(x) > 0$ ist, auch $y = \varphi(x)^{\psi(x)}$ durch die Forderung $y > 0$ eindeutig erklärt. Für diese Funktion schließt sich an (9) die Darstellung an:

(10) $$y = e^{\psi(x) \cdot \ln \varphi(x)}.$$

Im Laufe der letzten Entwicklungen sind die Fragen nach der Stetigkeit und der Monotonie unserer Funktionen zurückgetreten; doch sollen dieselben späterhin, soweit erforderlich, behandelt werden. Es bietet sich übrigens schon hier die Gelegenheit, an ein paar Beispielen zu zeigen, daß im Gebiete der zusammengesetzten transzendenten Funktionen gelegentlich „Stetigkeitsunterbrechungen“ und auch Funktionen, die nicht mehr „abteilungsweise monoton“ sind, auftreten können.

Die Funktion $y = \mathfrak{Tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ ist für unbeschränkt veränderliches x, unter Einschluß von $\pm\infty$, jedoch zunächst unter Ausschluß von $x = 0$, als eindeutige ungerade Funktion von x erklärt. In Fig. 26 ist die Kurve

dieser Funktion gezeichnet (Längeneinheit = 2 cm); man erhält die Kurve leicht aus Fig. 23, S. 70, indem man die in dieser Figur vorliegende Kurvenordinate $y = \mathfrak{Tg}\, x$ an die Stelle $\frac{1}{x}$ versetzt. Hier findet man nun bei Annäherung an den Nullpunkt 0 von rechts her (man schreibt dafür $\lim x = +0$) den Grenzwert $\lim \mathfrak{Tg}\left(\frac{1}{x}\right) = +1$, während sich bei Annäherung von links her $\lim \mathfrak{Tg}\left(\frac{1}{x}\right) = -1$ ergibt. *Die Funktion $\mathfrak{Tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ ändert sich demnach, wenn x stetig wachsend den Wert 0 durchläuft, plötzlich um den Wert 2, so daß wir $x = 0$ als einen „Unstetigkeitspunkt" der Funktion bezeichnen wollen.* Ob es zweckmäßig ist, der Funktion im Unstetigkeitspunkt einen bestimmten Wert zu erteilen, vielleicht das „arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte", muß dahingestellt bleiben.

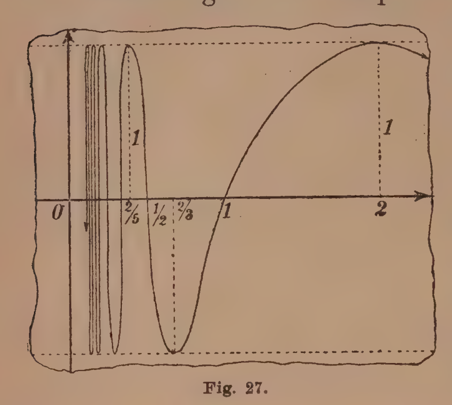


Fig. 27.

Sehr lehrreich ist auch das Beispiel der Funktion $y = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, die gleichfalls für unbeschränkt veränderliches x, unter Einschluß von $\pm\infty$, *jedoch unter Ausschluß von* $x = 0$, als eindeutige ungerade Funktion erklärt ist. Die Kurve dieser Funktion, welche man aus der Sinuskurve (Fig. 12, S. 55) einfach wieder dadurch herstellt, daß man die Ordinate $y = \sin x$ nach der Stelle $\frac{\pi}{x}$ der Abszissenachse verlegt, ist für positive x in Fig. 27 skizziert. Diese Kurve zeigt gegen den Nullpunkt hin ein abnormes Verhalten; sie schneidet die x-Achse unendlich oft, nämlich an den Stellen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, sie erreicht den größten Wert $y = 1$ unendlich oft, nämlich für die Argumente $2, \frac{2}{5}, \frac{2}{9}, \frac{2}{13}, \frac{2}{17}, \ldots$, und ebenso den kleinsten Wert $y = -1$ unendlich oft, nämlich bei $\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{2}{11}, \frac{2}{15}, \ldots$. Die Funktion ist in jedem Intervalle $\frac{2}{2n+1} \leqq x \leqq \frac{2}{2n-1}$ monoton und mit wachsendem x wachsend oder abnehmend, je nachdem die ganze positive Zahl n ungerade oder gerade ist. *Die Funktion* $y = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ *ist demnach zwar in jedem Intervall* $0 < a \leqq x \leqq b$ *„abteilungsweise monoton", aber dies gilt nicht mehr für das Intervall* $0 \leqq x \leqq b$. *Auch nähert sich die Funktion für* $\lim x = +0$ (*und also auch für* $\lim x = -0$) *nicht mehr einer Grenze an;* denn sie schwankt, wenn sich x stetig dem Werte 0

nähert, unaufhörlich zwischen ihren Extremwerten $+1$ und -1 hin und her.

Wir haben endlich in Fig. 28 die Kurve der eindeutigen geraden Funktion $y = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ in der Nähe des Nullpunktes gezeichnet Ohne genauer auf den Verlauf dieser Kurve einzugehen, erkennen wir jedenfalls, daß auch sie wieder die x-Achse in den unendlich vielen Punkten ± 1, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{1}{4}$, ... schneidet, *und daß demnach die Funktion in keinem, den Nullpunkt als Innen- oder Endpunkt enthaltenden Intervalle abteilungsweise monoton ist.* Aber hier ist allemal $|y| \leqq |x|$; die Kurve erscheint zwischen den beiden Winkelhalbierenden des Koordinatenkreuzes eingeschlossen, die sie abwechselnd in den Punkten $x = \pm 2$, $\pm \frac{2}{3}$, $\pm \frac{2}{5}$, $\pm \frac{2}{7}$, ... erreicht. Wir erkennen, *daß die Funktion sich auch für* lim $x = \pm 0$ *einer Grenze, nämlich dem Werte* 0 *annähert, den wir demnach als Funktionswert im Nullpunkte erklären.*

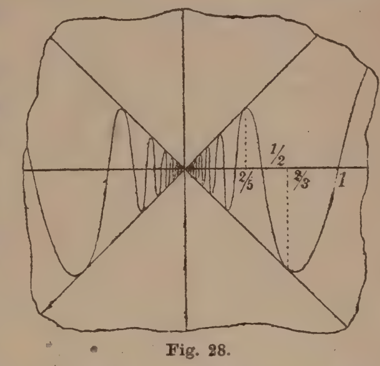
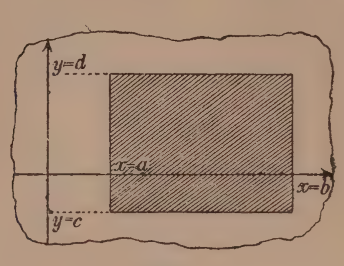


Fig. 28.

27. Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen. Sind x und y zwei voneinander unabhängige (reelle) variable Größen, so können wir zur geometrischen Deutung der Wertepaare x, y die Punkte einer Ebene, der „*Zahlenebene*", zugrunde legen, in welcher ein rechtwinkliges Koordinatensystem ausgewählt ist; der Punkt der Koordinaten x, y oder, wie wir kurz schreiben, der Punkt (x, y) erscheint dabei als „Bildpunkt" des Zahlenpaares x, y. An Stelle des „Intervalles" $a \leqq x \leqq b$ einer einzelnen Variablen auf der Zahlenlinie tritt hier der Begriff des „*Bereiches*", d. i. eines irgendwie gewählten Teiles der Zahlenebene, auf den der Punkt (x, y) beschränkt sein soll. Dabei soll der Fall nicht ausgeschlossen sein, daß der Bereich aus allen endlichen Punkten der Zahlenebene besteht, wo alsdann x und y „unbeschränkt" variabel sind. Es genügt für unsere Zwecke, einige einfachste Beispiele solcher Bereiche zu nennen. Es seien erstlich alle Zahlenpaare x, y zugelassen, welche die Ungleichungen $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ befriedigen. Der Bereich hat dann die Gestalt eines Rechtecks, dessen Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind (Fig. 29, S. 90); es handelt sich dabei um einen „abgeschlossenen" Bereich, der neben den Innenpunkten auch noch die Randpunkte des Rechtecks enthält. Durch die Vorschrift $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqq 0$ ist ein „abgeschlossener" Bereich festgelegt, der nach außen durch eine Ellipse berandet ist. Die beiden Un-

gleichungen $x \leqq 2$, $x - y^2 \geqq 0$ erklären einen „abgeschlossenen“ Bereich (Fig. 30), der durch ein Parabelstück und eine gerade Strecke begrenzt ist. Die besondere Einfachheit unserer Beispiele besteht darin, daß jedesmal *alle* Innenpunkte des umgrenzten Ebenenstücks dem Bereiche zugehören sollen, und daß derselbe überdies „abgeschlossen“ sein soll, d. h.



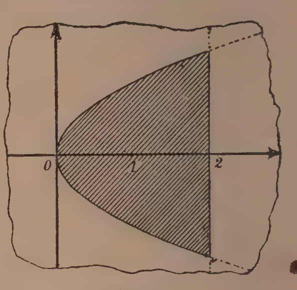




Fig. 29.

Fig. 30.

daß auch *alle Randpunkte* dem Bereiche angehören. Nur liefert der aus allen „endlichen“ Punkten der Zahlenebene bestehende Bereich das Beispiel eines „*nichtabgeschlossenen*“ Bereiches.

Ist eine dritte Variable z von den beiden unabhängigen Variablen x und y in der Art abhängig, daß jedem Punkte (x, y) eines vorgelegten Bereiches eine bestimmte Zahl z zugeordnet ist, *so ist hierdurch z in diesem Bereiche als eine eindeutige „Funktion“ der beiden „Argumente“ x, y erklärt.* Entsprechend dem bisherigen Brauche bezeichnen wir eine solche Funktion der beiden unabhängigen Variablen symbolisch durch $z = f(x, y)$ und benutzen erforderlichenfalls zur Bezeichnung verschiedener Funktionen dieser Art die Symbole φ, ψ, F, g usw. Auch sagen wir wieder, in der Gestalt $z = f(x, y)$ sei die Funktion „*entwickelt*“ oder „*explizite*“ gegeben, und sprechen von einer „*implizite*“ oder „*unentwickelt*“ gegebenen Funktion, wenn z als Funktion von x und y durch eine noch nicht nach z aufgelöste Gleichung erklärt ist.

Grundsätzliche Bedeutung hat folgender Satz: *Eine in einem abgeschlossenen Bereiche erklärte Funktion $f(x, y)$ heißt daselbst „gleichmäßig stetig“, wenn nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl δ stets eine von 0 verschiedene Zahl λ derart angebbar ist, daß für je zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) des Bereiches die Bedingung $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \delta$ erfüllt ist, sobald nur $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leqq \lambda^2$ zutrifft.* Der Ausdruck auf der linken Seite der letzten Ungleichung bedeutet geometrisch das Quadrat der Entfernung der beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2).

Diese Erklärung wird zum Ausgangspunkte einer Theorie der *stetigen* Funktionen $f(x, y)$, welche genau den Entwicklungen von S. 17 ff. entspricht. Wir gehen auf diese Untersuchungen nicht ein und beschränken

uns nur noch auf die Übertragung des an (1) S. 20 angeschlossenen Satzes: *Auch jetzt werden wieder mit zwei in einem abgeschlossenen Bereiche gleichmäßig stetigen Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$:*

$$(1) \qquad \varphi(x, y) \pm \psi(x, y), \quad \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y), \quad \varphi(x, y) : \psi(x, y)$$

ebenda gleichmäßig stetige Funktionen sein, der Quotient freilich im allgemeinen nur dann, wenn der Nenner im Bereiche nicht verschwindet. Der Beweis ergibt sich wie oben (S. 20).

Sehr wichtig ist *die Deutung einer Funktion $z = f(x, y)$ durch eine Fläche,* welche wir einfach dadurch bewerkstelligen, daß wir nach Art der analytischen Geometrie des Raumes z als dritte rechtwinklige Koordinate betrachten („A. G.", § 55). Im „Zusammenhange" der Punkte dieser natürlich nur für den jeweils zugrunde liegenden Bereich erklärten Fläche kommt die Stetigkeit der Funktion zum Ausdruck.

Es hat keine Schwierigkeit, *die „der Elementarmathematik entstammenden" Funktionen $f(x, y)$* nach den Grundsätzen von S. 82 ff. näher zu klassifizieren. Eine *„elementare algebraische Funktion"* $f(x, y)$ wird aus x, y und gegebenen Konstanten durch eine endliche Kette algebraischer Operationen berechnet; sind indessen bei der Berechnung von $f(x, y)$ neben etwaigen algebraischen Rechnungen auch elementare transzendente Funktionen von x oder y oder von einem in x und y schon berechneten Ausdrucke mit heranzuziehen, so sprechen wir von einer *„elementaren transzendenten Funktion"* $f(x, y)$. Auch das Auftreten *„mehrdeutiger" Funktionen* $f(x, y)$, bei deren Berechnung Radizierungen oder zyklometrische Funktionen zur Verwendung kommen, macht keine Schwierigkeit.

Ein paar weitere Ausführungen schließen wir noch über *rationale* Funktionen an. Eine *ganze rationale Funktion* $G(x, y)$ ist ein Aggregat aus endlich vielen Gliedern der Gestalt $a x^m y^n$ mit ganzen, nichtnegativen Exponenten m, n. Irgendeine *rationale Funktion* $R(x, y)$ läßt sich stets als Quotient zweier ganzer rationaler Funktionen darstellen. Aus der Gleichung:

$$x_2^m y_2^n - x_1^m y_1^n = y_2^n (x_2^m - x_1^m) + x_1^m (y_2^n - y_1^n)$$

folgt mit Rücksicht auf die Stetigkeit von x^m und y^n leicht diejenige von $x^m y^n$ und damit auch die *Stetigkeit von $G(x, y)$ in jedem endlichen abgeschlossenen Bereiche.* Hieraus folgt weiter: *Eine rationale Funktion, die als Quotient der beiden ganzen Funktionen $h(x, y)$ und $g(x, y)$ darstellbar sei, ist in jedem endlichen abgeschlossenen Bereiche, in welchem der Nenner $g(x, y)$ nicht verschwindet, eindeutig und stetig.*

Verschwindet $g(x, y)$ in einem Punkte des Bereiches und ist daselbst $h(x, y)$ nicht auch gleich 0, so liegt dort ein *„Unendlichkeitspunkt"* der Funktion $R(x, y)$ vor. Verschwinden aber in einem Punkte des Bereiches

Zähler und Nenner $h(x, y)$ und $g(x, y)$ zugleich, so treten Verhältnisse ein, die wir sogleich an dem Beispiele der rationalen Funktion:

$$(2) \qquad R(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

bei welcher im Nullpunkte des Koordinatensystems Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden, erläutern wollen. Wir führen neben rechtwinkligen Koordinaten x, y auch noch Polarkoordinaten r, ϑ ein, indem wir in bekannter Weise $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ setzen. Die Funktion nimmt dann die höchst einfache Gestalt an:

$$R(x, y) = \sin 2\vartheta.$$

Daraus geht hervor, daß die Funktion $R(x, y)$, falls wir uns dem Nullpunkte längs der Geraden von der „Amplitude" ϑ annähern, im Nullpunkte den „Grenzwert" $\sin 2\vartheta$ annimmt; *der Grenzwert ist also von der Annäherungsrichtung ϑ abhängig und kann allen möglichen dem Intervalle*

$$-1 \leqq z \leqq +1$$

angehörenden Zahlen z gleich werden. Man nennt die im allgemeinen „eindeutige" Funktion (2) im Nullpunkte *„stetig vieldeutig"*. Die Fläche der betrachteten Funktion hat zwar für jeden vom Nullpunkte verschiedenen Punkt (x, y) nur *eine* Koordinate z, zieht sich indessen an den Nullpunkt in der Art heran, daß die durch die Punkte $z = +1$ und $z = -1$ begrenzte Strecke der z-Achse *ganz* auf der Fläche liegt.

Sind drei unabhängige Variable x, y, z vorgelegt, so kann man zur Deutung der Wertsysteme x, y, z die Punkte des Raumes heranziehen, in dem man ein rechtwinkliges Koordinatensystem festgelegt hat. Ein irgendwie ausgewählter Teil des Raumes mag dann wieder als ein *„Bereich"* bezeichnet werden. Die Erklärung einer *„Funktion"* $w = f(x, y, z)$ für einen solchen Bereich ist wie in den beiden bisher betrachteten Fällen zu geben. Die Erklärung der *„Stetigkeit"*, die daraus entspringenden Folgerungen, die Klassifikation der „elementaren" Funktionen $f(x, y, z)$ in *„ganze"*, *„rationale"*, *„transzendente"* usw. ist wie in den behandelten Fällen durchzuführen. Eine geometrische Deutung der Funktionen $w = f(x, y, z)$, welche sich an die Deutung einer stetigen Funktion $y = f(x)$ durch eine Kurve und einer stetigen Funktion $z = f(x, y)$ durch eine Fläche anschließt, ist nicht möglich, da wir nicht imstande sind, einen Raum von vier Dimensionen anzuschauen. Doch bietet die Mechanik reale Beispiele, bei denen es sich um drei oder auch um mehr als drei unabhängige Variable und um Funktionen dieser Variablen handelt.

Sind unabhängige Variable in irgendeiner nicht näher bestimmten Anzahl n vorgelegt, so bezeichnet man dieselben zweckmäßig alle durch x und unterscheidet sie durch untere Indizes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Man behält

hier gern die Sprechweise der Geometrie bei, spricht für ein einzelnes System von Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von einem „*Punkte*" $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und nennt die Gesamtheit aller endlichen Systeme von Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den „*Zahlenraum*", in dem dann z. B. der Ausdruck:

$$+\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \cdots + (x_n - x_n')^2}$$

die „*Entfernung*" der beiden Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ heißt. Für die Bezeichnungen der „*Funktionen*" der n Argumente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist dann die Schreibweise $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ am nächsten liegend. Die Erklärung der „*Stetigkeit*" usw. hat nach Analogie der Fälle $n = 1$ und $n = 2$ zu geschehen.

Abschnitt I.

Grundlagen der Differentialrechnung.

Kapitel I. Die Differentiation der Funktionen einer Variablen.

1. Der Begriff der abgeleiteten Funktion. Um die Grundaufgabe der Differentialrechnung zu entwickeln, denken wir in einem endlichen und abgeschlossenen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ eine eindeutige und stetige und demnach (S. 20) daselbst auch überall endliche Funktion $y = f(x)$ gegeben. Zwei verschiedenen dem Intervall angehörenden Argumenten x und x_1 mögen die Funktionswerte $y = f(x)$ und $y_1 = f(x_1)$ zugehören. Wir bilden die Differenzen $(x_1 - x)$ und $y_1 - y = f(x_1) - f(x)$ und führen für dieselben die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$(1) \qquad x_1 - x = \varDelta x, \quad y_1 - y = f(x_1) - f(x) = \varDelta y = \varDelta f(x).$$

Diese Symbole $\varDelta x$ und $\varDelta y$ bedeuten also die „*Differenz der Argumente*" und die „*Differenz der Funktionswerte*" und sollen keineswegs etwa als Produkte $\varDelta \cdot x$ und $\varDelta \cdot y$ angesehen werden. Da der Annahme nach $x_1 \neq x$ sein sollte, so ist $\varDelta x$ von 0 verschieden, und also ist es statthaft, den Quotienten:

$$(2) \qquad \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

zu bilden, den wir als einen „*Differenzenquotienten*" unserer Funktion bezeichnen.

Wir wollen nun zunächst x an seiner Stelle festhalten, während x_1 natürlich abgesehen von der Stelle x selbst im Intervall noch frei variabel sein soll. Im Differenzenquotienten haben wir dann eine Funktion von x_1 vor uns, die in jedem abgeschlossenen Intervalle, das die Stelle x nicht enthält, zufolge der Stetigkeitssätze (S. 20) selbst eindeutig und stetig ist. Der Punkt $x_1 = x$ freilich ist hier zunächst auszuschließen. Eben auf diesen Punkt aber bezieht sich nun unsere Grundfrage: *Hat vielleicht die in* (2) *gegebene Funktion des Argumentes x_1, falls sich x_1 entweder von rechts her oder von links her stetig der Grenze x nähert, selbst einen Grenzwert?*

Die Antwort aber, welche wir für unsere *elementaren* Funktionen werden geben können, ist folgende: *Abgesehen von gewissen Fällen, auf die wir zwar hinweisen werden, die aber für uns nicht weiter in Betracht kommen, gelten die Tatsachen:*

1. *Die Funktion (2) des Argumentes x_1 hat bei stetiger Annäherung von x_1 an die Stelle x von rechts her sowie von links her je einen eindeutig bestimmten Grenzwert;*

2. *Die beiderseits zu erreichenden Grenzwerte sind einander gleich;*

3. *Dies gilt für jede Stelle x des Intervalles, wobei übrigens selbstverständlich ist, daß wir uns dem einzelnen Endpunkte a oder b des Intervalles je nur von der einen Seite mit x_1 stetig annähern können.*

Ist diese Aussage zutreffend, so finden wir in dem fraglichen Grenzwerte jeder Stelle x des Intervalles einen bestimmten Wert zugeordnet und können offenbar alle diese Zahlwerte als eine neue im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ erklärte Funktion von x zusammenfassen: *Wir bezeichnen diese Funktion, da sie aus $f(x)$ durch die beschriebenen Grenzübergänge „abgeleitet" ist, durch $f'(x)$ und nennen sie die „abgeleitete Funktion" oder die „Ableitung" von $f(x)$.* Die abgeleitete Funktion ist im fraglichen Intervalle eindeutig; ob sie daselbst auch stetig ist, und welches sonst ihre Eigenschaften sein mögen, ob sie vielleicht wieder eine elementare Funktion ist, muß der näheren Untersuchung vorbehalten bleiben.

Wir beweisen die aufgestellten Sätze sogleich für einige einfache Funktionen. Ist erstlich $f(x) = x^n$ mit einem positiven ganzzahligen Exponenten $n > 1$, so gilt zunächst für irgend zwei nicht-negative, verschiedene x, x_1 zufolge (1) S. 26:

$$(3) \quad nx^{n-1} < \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} < nx_1^{n-1} \quad \text{oder} \quad nx_1^{n-1} < \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} < nx^{n-1},$$

je nachdem $x < x_1$ oder $x > x_1$ ist. Der Differenzenquotient liegt demnach zwischen den Schranken nx_1^{n-1} und nx^{n-1}. Dies gilt auch noch, wenn x und x_1 zwei verschiedene nicht-positive Zahlen sind, da bei gleichzeitigem Zeichenwechsel von x und x_1 der Quotient und die Schranken unverändert bleiben oder zugleich Zeichenwechsel erfahren, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Für $\lim x_1 = x$ werden beide Schranken gleich $n \cdot x^{n-1}$; dies ist demnach auch der Grenzwert des Differenzenquotienten. Das Ergebnis gilt auch für $x = 0$, wo man sowohl von rechts her als von links her den Grenzwert 0 findet. *Die Funktion $f(x) = x^n$ hat in jedem endlichen Intervalle eine Ableitung, nämlich $f'(x) = nx^{n-1}$. Diese Regel, nach der die Ableitung der Potenz x^n gleich dem Produkte des Exponenten n und der „nächst niederen" Potenz x^{n-1} ist, wollen wir kurz als „Potenzregel" bezeichnen; sie bleibt, wie man sich noch besonders überzeugen wolle, auch für $n = 1$, wo der Differenzenquotient und damit die Ableitung konstant gleich 1 sind, sowie auch für $n = 0$, wo $f(x)$ konstant gleich 1 ist und also die Ableitung den konstanten Wert 0 hat, erhalten.*

Zufolge der Erklärung des natürlichen Logarithmus $\ln x$ mittels der gleichseitigen Hyperbel (vgl. S. 32 ff. und S. 39) war die Differenz

$(\ln x_1 - \ln x)$ für irgend zwei positive x und $x_1 > x$ gleich dem Inhalte der Fläche, welche durch die gleichseitige Hyperbel, deren Ordinaten x^{-1} und x_1^{-1} und das zwischenliegende Stück der x-Achse begrenzt ist. Die Fläche ist ein Teil des Rechtecks der Grundlinie $(x_1 - x)$ und der Höhe x^{-1}, und sie enthält selbst als Teil das Rechteck der gleichen Grundlinie $(x_1 - x)$ und der Höhe x_1^{-1}:

$$(x_1 - x) \cdot x_1^{-1} < \ln x_1 - \ln x < (x_1 - x) \cdot x^{-1}.$$

Hieraus folgt: $$\frac{1}{x_1} < \frac{\ln x_1 - \ln x}{x_1 - x} < \frac{1}{x},$$

und es ist, da der Differenzenquotient bei Austausch von x und x_1 unverändert bleibt, einleuchtend, daß für $x_1 < x$ dieselbe Ungleichung mit ausgetauschten Schranken gilt. Auch hier werden die Schranken für $\lim x_1 = x$ gleich, und zwar gleich $\frac{1}{x}$; es gilt also der Satz: *Der natürliche Logarithmus, d. h. die für $x > 0$ erklärte Funktion $f(x) = \ln x$, besitzt eine Ableitung, nämlich $f'(x) = \frac{1}{x}$.*

Wir prüfen unseren Satz ferner für die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. Aus den Ungleichungen (4) und (5) S. 58 folgt, daß:

$$(4) \qquad \cos\frac{x_1 + x}{2} \cdot \cos\frac{x_1 - x}{2} \leqq \frac{\sin x_1 - \sin x}{x_1 - x} \leqq \cos\frac{x_1 + x}{2}$$

für $\cos\frac{x_1 + x}{2} \geqq 0$ zutrifft, während für $\cos\frac{x_1 + x}{2} \leqq 0$ in (4) die beiden Zeichen $\leqq$ in $\geqq$ umzuschreiben sind. Die der damaligen Voraussetzung $x_2 > x_1$ entsprechende Ungleichung $x_1 > x$ braucht nicht aufrechterhalten zu werden, da bei Austausch von x und x_1 die drei in (4) verglichenen Ausdrücke unverändert bleiben. Für $\lim x_1 = x$ erhalten wir:

$$\lim_{x_1 = x} \cos\frac{x_1 + x}{2} = \cos x, \qquad \lim_{x_1 = x} \cos\frac{x_1 - x}{2} = 1,$$

so daß wieder die beiden Schranken in (4) einander gleich, und zwar gleich $\cos x$ werden. Indem wir eine entsprechende Betrachtung an die Ungleichungen (6) und (7) S. 58 anknüpfen, ergibt sich: *Die Funktionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *haben für jedes endliche Argument x Ableitungen; und zwar ist die Ableitung von* $\sin x$ *einfach die Funktion* $\cos x$, *diejenige von* $\cos x$ *aber die Funktion* $-\sin x$.

Genau so ergeben sich die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Cos}\, x$ aus den Ungleichungen (14) ff. S. 69. Erstlich gilt für $\mathfrak{Sin}\, x$, und zwar sowohl bei $x_1 > x$ als bei $x_1 < x$:

$$\mathfrak{Cos}\frac{x_1 + x}{2} < \frac{\mathfrak{Sin}\, x_1 - \mathfrak{Sin}\, x}{x_1 - x} < \mathfrak{Cos}\frac{x_1 + x}{2} \cdot \mathfrak{Cos}\frac{x_1 - x}{2};$$

bei der Funktion $\mathfrak{Cof}\,x$ hat man aber:

$$\mathfrak{Sin}\,\frac{x_1+x}{2} \leqq \frac{\mathfrak{Cof}\,x_1 - \mathfrak{Cof}\,x}{x_1-x} \leqq \mathfrak{Sin}\,\frac{x_1+x}{2}\cdot\mathfrak{Cof}\,\frac{x_1-x}{2}$$

für $\mathfrak{Sin}\,\frac{x_1+x}{2} \geqq 0$, während für $\mathfrak{Sin}\,\frac{x_1+x}{2} \leqq 0$ die Zeichen $\leqq$ in $\geqq$ umzuschreiben sind. Da $\mathfrak{Cof}\,0 = 1$ ist, so folgt: *Die hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Sin}\,x$ und $\mathfrak{Cof}\,x$ haben für jedes endliche x Ableitungen, und zwar ist diejenige von $\mathfrak{Sin}\,x$ gleich $\mathfrak{Cof}\,x$ und die von $\mathfrak{Cof}\,x$ gleich $\mathfrak{Sin}\,x$.*

2. Geometrische und physikalische Deutungen der abgeleiteten Funktion. Für die Funktionen $f(x)$ einer Variablen haben wir oben (S. 21 ff.) mehrere Deutungen besprochen; auch haben wir die transzendenten Funktionen, wie z. B. die Funktion $\ln x$, auf Grund gewisser geometrischer Vorstellungen erklärt. Es ist zu erwarten, daß man in solchen Fällen auch für die etwa zu $f(x)$ gehörende Ableitung $f'(x)$ eine anschauliche Deutung entwickeln kann; und in der Tat zeigt sich das interessante Ergebnis, *daß sich die Ableitung jedesmal in die Gestalt einer Vorstellung kleidet, die uns im Zusammenhang mit der einzelnen Deutung der Funktion $f(x)$ von anderer Seite her längst geläufig ist.*

Wir deuten erstlich die im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ eindeutige und stetige Funktion $y = f(x)$ in rechtwinkligen Koordinaten x, y durch eine „*ebene Kurve*“ und ziehen durch die beiden voneinander verschiedenen Punkte (x, y) und (x_1, y_1), die durch P und P_1 bezeichnet werden mögen, die *Sekante*, der wir eine Pfeilrichtung „*nach rechts*“ erteilen.[1]) Die so gerichtete

Fig. 31.

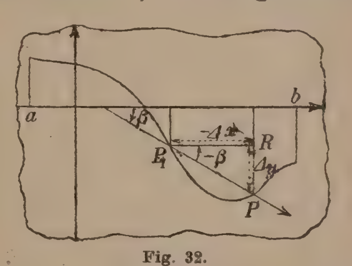


Fig. 32.

Sekante ist für $\Delta y = 0$ mit der x-Achse parallel; für $\Delta y \neq 0$ bildet sie mit der *positiven* Richtung der x-Achse einen *spitzen* Winkel, dessen Maßzahl β wir positiv oder negativ rechnen wollen, je nachdem Δy und Δx gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben oder, wie wir sagen können, je nachdem die Sekantenrichtung „nach oben“ oder „nach unten“ weist.[2]) So ist z. B. in Fig. 31 die Maßzahl $\beta > 0$; in Fig. 32 dagegen gilt $\beta < 0$, so daß hier der spitze Winkel $\sphericalangle PP_1R$ des rechtwinkligen Dreiecks der

1) Da $x_1 \neq x$ ist, so ist die Sekante nicht zur y-Achse parallel.
2) S. die zweite Note S. 27.

Katheten $\overline{P_1 R} = -\Delta x$ und $\overline{PR} = +\Delta y$ durch $(-\beta)$ zu bezeichnen ist. *Der Differenzenquotient ist nun einfach gleich dem Tangens:*

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \operatorname{tg} \beta$$

des Winkels β, den die nach „rechts" gerichtete Sekante durch P und P_1 mit der „positiv" gerichteten x-Achse bildet. In den Figuren 31 und 32 sowie auch für $\Delta y = 0$ ist dies einleuchtend; doch prüfe man auch die sonst etwa noch möglichen Lagen der Kurve und Sekante im Koordinatensystem durch.

Der im § 1 mit x_1 vollzogene Übergang $\lim x_1 = x$ hat nun geometrisch die Bedeutung, daß bei festliegendem Punkte P der Punkt P_1 stetig über die Kurve hin gegen den Punkt P wandern soll. Wie wird sich hierbei die durch den festen Punkt P und den beweglichen Punkt P_1 hindurchlaufende Sekante verhalten? Wir antworten sofort: *Existiert die Ableitung $f'(x)$ im Punkte x, d. h. nähert sich der Differenzenquotient und damit $\operatorname{tg} \beta$ bei Annäherung des Punktes P_1 an den Punkt P sowohl von rechts als von links her einem und demselben bestimmten Grenzwerte $f'(x)$, so nähert sich eben auch die Sekante einer bestimmten Grenzlage; diese Grenzlage der Sekante aber nennt man in der Geometrie die „Tangente" der Kurve im Punkte P.* Die Frage, ob unsere Kurve im Punkte P eine Tangente hat, und welches gegebenenfalls deren Richtung ist, erscheint also geradezu identisch mit unserer Frage, ob $f(x)$ für das Argument x eine Ableitung $f'(x)$ hat, und welchen Wert die Ableitung im Falle ihrer Existenz hat. Die Beziehung zwischen der Tangentenrichtung und dem Werte $f'(x)$ ist aber durch folgenden Satz festgelegt, der sich, wenn wir $\lim \beta = \alpha$ setzen, aus dem an (1) angeschlossenen Satze ergibt: *Deuten wir die Funktion $y = f(x)$, welche im Punkte x eine Ableitung $f'(x)$ besitze, in unserer Art durch eine Kurve, so gilt für $f'(x)$ die Regel:*

$$(2) \qquad f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

d. h. die Ableitung ist gleich dem Tangens des Winkels α, den die nach „rechts" gerichtete Kurventangente im Punkte (x, y) mit der „positiv" gerichteten x-Achse bildet.[1])

Daß die Existenz der Tangente einer Kurve in einem einzelnen Punkte (x, y), auch wenn die Kurve in dessen Umgebung *stetig* verläuft, keines-

---

1) Das Vorzeichen der Maßzahl α des Winkels ist entsprechend der bei β gegebenen Vorschrift zu wählen. Sollte übrigens $\lim \beta = \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ sein, was wir nicht ausschließen dürfen, so kann man nicht mehr von einer nach „rechts" gerichteten Tangente sprechen; in einem solchen Falle liegt ein „Unendlichkeitspunkt" der Ableitung vor, dessen Auftreten uns bei späteren Einzelbeispielen keine Schwierigkeit machen wird.

wegs selbstverständlich ist, mag uns das Beispiel der durch Fig. 28, S. 89, erläuterten Kurve der Funktion $y = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ zeigen. Die Kurve läuft durch den Nullpunkt des Koordinatensystems und ist, wie wir feststellten, in dessen Umgebung stetig. Wählen wir nun den Nullpunkt als Punkt P und lassen P_1 etwa von rechts her auf der Kurve gegen den Punkt P wandern, so wird der Winkel β zufolge der näheren Darlegungen von S. 89 bei diesem Grenzübergange unaufhörlich zwischen den beiden Extremwerten $+\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ hin- und herschwanken, und also nähert sich die Sekante hier keiner Grenzlage: *Die in der Umgebung des Nullpunktes stetige Funktion* $y = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ *hat für* $x = 0$ *keine Ableitung, und entsprechend hat die Kurve ebenda keine Tangente.* Wir haben also hier einen Ausnahmefall vor uns, wie wir solche im Grundtheorem von S. 94 ausdrücklich vorbehielten.

Die Geometrie mag ja bei besonders einfachen Kurven, z. B. beim Kreise, die Erklärung einer Tangente elementar, d. h. ohne Benutzung des Grenzbegriffes, geben können. Allgemein aber verfährt sie genau so, wie es hier in § 1 geschah: Sie zieht eine Sekante der Kurve durch zwei verschiedene Punkte P und P_1 derselben und prüft, ob bei Annäherung von P_1 an P eine Grenzlage der Sekante feststellbar ist, und welches gegebenenfalls diese Grenzlage ist: *Das Problem der Ableitung einer stetigen Funktion und das Tangentenproblem einer stetigen Kurve sind also nicht nur der Sache nach identisch, sondern werden auch hier und dort methodisch in der gleichen Weise behandelt.*

Wir hatten zweitens (S. 22) das Argument t einer stetigen Funktion $s = f(t)$ als „*Maß der Zeit*" gedeutet und s in der ursprünglichen Art als *Punkt der Zahlenlinie;* die stetige Funktion $s = f(t)$ deuteten wir dann als „*geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes*". Gehören zu zwei Argumenten t und $t_1 > t$ die Funktionswerte $s = f(t)$ und $s_1 = f(t_1)$, d. h. hat sich der materielle Punkt in dem von t und t_1 begrenzten Zeitintervalle von der Stelle s nach s_1 bewegt, so nennt man den Quotienten des zurückgelegten Weges $(s_1 - s)$ und der Zeit $(t_1 - t)$ die „*mittlere Geschwindigkeit*" des materiellen Punktes während dieser Zeit[1]). *Der Differenzenquotient unserer Funktion:*

$$\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t} = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$$

liefert also bei der jetzigen physikalischen Deutung von $f(t)$ *den Begriff der*

1) Wir machen darauf aufmerksam, daß der Weg $(s_1 - s)$ negative Maßzahl hat, falls $s_1 < s$ ist.

„mittleren Geschwindigkeit“. Hat nun die Funktion $f(t)$ für das Argument t eine Ableitung $f'(t)$, so hat die mittlere Geschwindigkeit während eines auf den Zeitpunkt t folgenden Zeitintervalles Δt bei einer gegen die Grenze 0 abnehmenden Größe Δt des Intervalles einen Grenzwert; diesen Grenzwert aber nennt man in der Physik *die „Geschwindigkeit“ des materiellen Punktes zur Zeit t, so daß uns die Ableitung der Funktion $f(t)$ zu dem physikalischen Elementarbegriff der Geschwindigkeit zurückführt.*

Ein wichtiges Ergebnis liefert auch die bei der Einführung von $\ln x$ benutzte Methode der Erklärung einer stetigen Funktion $f(x)$ durch einen Flächeninhalt. Es sei $\varphi(x)$ eine für irgend ein endliches Intervall erklärte eindeutige und stetige, sowie abteilungsweise monotone Funktion; a sei ein im Inneren des Intervalles beliebig aber fest gewählter Wert von x. Im Anschluß an die Kurve der Funktion $y = \varphi(x)$ erklären wir dann folgende Funktion $f(x)$: *Es sei $f(x)$ der Inhalt des Flächenstücks oder die Summe der Inhalte der Stücke* (s. Fig. 33)[1]*, die von der x-Achse, der Kurve und deren Ordinaten $\varphi(a)$ und $\varphi(x)$ bei a und x eingeschlossen werden; dabei sollen die Maßzahlen der Flächenstücke „rechts“ von a mit positivem oder negativem Zeichen versehen werden, je nachdem sie über oder unter der x-Achse liegen, „links“ von a aber sollen umgekehrt die oberhalb der x-Achse gelegenen Flächenstücke mit negativen Maßzahlen, die unterhalb gelegenen mit positiven Maßzahlen in Rechnung gestellt werden.* Die Vorschrift ist so zu verstehen, daß *alle* zwischen den beiden Ordinaten $\varphi(a)$ und $\varphi(x)$ gelegenen, von Kurve und x-Achse begrenzten Flächenstücke zur Bildung der „algebraischen“ Summe heranzuziehen sind. So wird z. B. in Fig. 33 für den mit x bezeichneten Punkt $f(x)$ eine dreigliedrige Summe sein, und zwar mit zwei positiven und einem negativen Gliede.

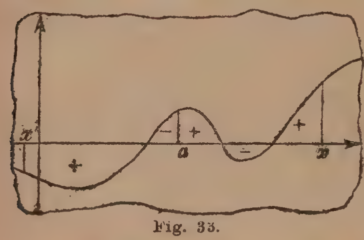


Fig. 33.

Die scheinbar umständliche Vorzeichenregel begründet nun ein sehr einfaches Ergebnis betreffs der Ableitung $f'(x)$, welche im ganzen Intervalle der Erklärung von $\varphi(x)$ existiert. Wir stellen zunächst fest: Ist $x_1 > x$, so ist $(f(x_1) - f(x))$ die Summe aller zwischen den Ordinaten $\varphi(x)$ und $\varphi(x_1)$ gelegenen Flächenteile, wo nun unterschiedslos alle oberhalb der x-Achse gelegenen Teile positiv und alle unterhalb gelegenen negativ zu rechnen sind. Wir wählen x_1 bereits so nahe an x, daß $\varphi(x)$ in dem von x und x_1 eingegrenzten Intervalle monoton ist. Dann haben wir für die Maßzahl $(f(x_1) - f(x))$ zwei Schranken in den Inhalten $y \cdot (x_1 - x)$ und $y_1 \cdot (x_1 - x)$ zweier Rechtecke der gemeinsamen Grundlinie $(x_1 - x)$

1) Für monotone und damit auch für „abteilungsweise monotone“ Funktionen $\varphi(x)$ ist S. 23 ff. die Erklärung des Flächeninhaltes gegeben.

und der Höhen $y = \varphi(x)$ und $y_1 = \varphi(x_1)$.[1]) Für den Differenzenquotienten $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ finden wir daraus unmittelbar die Schranken y und y_1; und zwar bleibt diese Regel auch für $x_1 < x$ bestehen, da der Differenzenquotient bei Austausch von x und x_1 seinen Wert nicht ändert. Nun folgt für $\lim x_1 = x$ einfach $\lim y_1 = y$, d. h. die veränderliche Schranke y_1 wird der festen $y = \varphi(x)$ gleich. Damit aber haben wir den Satz gewonnen: *Die im Anschluß an die eindeutige, stetige und abteilungsweise monotone Funktion $\varphi(x)$ mittelst des Begriffs des Flächeninhaltes erklärte Funktion $f(x)$ besitzt für jedes x des zugrunde liegenden Intervalles eine Ableitung, und zwar ist einfach $f'(x) = \varphi(x)$, d. h. gleich der Funktion $\varphi(x)$, von der wir ausgingen.*[2])

Dieses Resultat ist deshalb von grundlegender Bedeutung, weil wir in der Herstellung der „Inhaltsfunktion" $f(x)$ aus $\varphi(x)$ eine Operation kennen lernen, die durch die Berechnung der Ableitung von $f(x)$ wieder rückgängig gemacht wird. Wir kommen hierauf später ausführlich zurück.

3. Die Differentiale und der Differentialquotient. Es werde jetzt angenommen, daß die im Intervall $a \leq x \leq b$ eindeutige und stetige Funktion $f(x)$ daselbst überall eine endliche Ableitung $f'(x)$ habe. Für das einzelne x hatten wir $f'(x)$ zu berechnen, indem wir x_1 sich als stetige Variable von der einen oder anderen Seite her dem Werte x als Grenze annähern ließen und den Grenzwert des Differenzenquotienten feststellten. Hierbei gewinnt die Differenz $\Delta x = x_1 - x$ den Charakter einer *„variablen" Größe, welche sich von der einen oder anderen Seite her stetig der Grenze 0 annähert, natürlich ohne der Zahl 0 gleich zu werden* (s. die Besprechung einer solchen Veränderlichen S. 15). Um gleich durch die Bezeichnung hervorzuheben, daß wir Δx als eine „veränderliche" Größe der genannten Art ansehen wollen, bedienen wir uns statt Δx auch der Schreibweise dx und nennen $\Delta x = dx$ ein *„Differential"*.[3]) Dem Umstande entsprechend, daß nach Auswahl einer „beliebig" klein gewählten Zahl δ für das Differential dx von einem bestimmten Zeitpunkte an $|dx| < \delta$ gelten soll, sagt man, *das Differential dx werde „unendlich klein"*. Wenn wir sogar kurz von *einer „unendlich kleinen" Größe* sprechen, so soll dadurch nur die eben beschriebene *Veränderlichkeit* von dx angedeutet sein. Eine *konstante* Größe ist immer entweder gleich 0 oder nicht gleich 0; im letzteren Falle kann sie zwar, absolut genommen, „sehr klein" im Vergleich

1) Für das Vorzeichen des einzelnen Rechteckinhaltes gilt dieselbe Regel, die wir eben für die Maßzahlen $(f(x_1) - f(x))$ aussprachen; s. übrigens das Beispiel der Funktion $\ln x$ in § 1, S. 96.

2) Man ziehe als Beispiel wieder die in § 1 behandelte Funktion $\ln x$ heran.

3) Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß dx ebensowenig wie Δx als Produkt $d \cdot x$ aufzufassen ist.

zu sonstigen Zahlen einer gerade vorliegenden Betrachtung sein, aber sie ist nicht in unserem Sinne „unendlich klein“.

Zu jedem x des Intervalles und jedem Werte $\Delta x = dx$ mit einem gleichfalls im Intervalle gelegenen $x_1 = x + \Delta x = x + dx$ gehört nun eine Differenz $\Delta y = \Delta f(x)$ der Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x)$. Die Ableitung, d. i. der Grenzwert des Differenzenquotienten:

(1) $$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

sollte der Annahme gemäß existieren. Wir wollen $\Delta y = \Delta f(x)$ etwas kürzer als „*Differenz der Funktion*“ bezeichnen, die dann natürlich als von *zwei* Größen x und Δx abhängig anzusehen ist.

Hierneben reihen wir jetzt als eine weitere, hinfort oft zu betrachtende Größe das „*Differential der Funktion*“, und zwar durch folgende Erklärung: *Das zum Argumente x und zum Differential dx gehörende „Differential der Funktion“ $dy = df(x)$ sei durch:*

(2) $$dy = df(x) = f'(x) \cdot dx$$

gegeben, ist also das Produkt der Ableitung $f'(x)$ und des Differentials dx der unabhängigen Variablen. Wie die Differenz $\Delta y = \Delta f(x)$, so hängt auch das Differential $dy = df(x)$ von *zwei* Größen, nämlich x und dx, ab. Dabei ist $df(x)$ auch noch bei festgehaltenem x eine *variable*, und zwar „*unendlich kleine*“, d. h. mit dx „unendlich klein werdende“, Größe. Dagegen ist der Quotient des Differentials $dy = df(x)$ der Funktion und des Differentials dx der unabhängigen Variablen, den wir kurz *den „Differentialquotienten“ der Funktion* $f(x)$ nennen wollen, *nur noch von x allein abhängig;* denn aus (2) ergibt sich sofort, daß der Differentialquotient gleich der abgeleiteten Funktion ist:

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Mit Rücksicht auf (1) können wir auch sagen, *der Differentialquotient sei gleich der Grenze des Differenzenquotienten:*

(4) $$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{x_1 = x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Eine anschauliche Deutung des Differentials der Funktion geben wir vorerst nur im Anschluß an die Deutung der Funktion $y = f(x)$ durch eine Kurve, die der Annahme gemäß in jedem Punkte eine Tangente hat. Die Deutung ergibt sich sofort aus Gleichung (2) S. 98: *Für jede Änderung $dx = \Delta x$ der Abszisse ist das zu x und dx gehörende Differential der Funktion durch $dy = df(x) = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx$ gegeben und stellt also die dem*

$dx = \Delta x$ *entsprechende „Änderung der Tangentenordinate"* dar (s. Fig. 34), *während*

$$\Delta y = \Delta f(x)$$

die „Änderung der Kurvenordinate" ist. Man liest dies aus Fig. 34, wo:

$$\overline{P_1'R} = dy = df(x),$$
$$\overline{P_1R} = \Delta y = \Delta f(x)$$

ist, unmittelbar ab; doch überzeuge man sich, daß die Angaben auch bei anderen Lagen der Kurve im Koordinatensysteme sowie sonstigen Werten von $dx = \Delta x$ richtig sind.

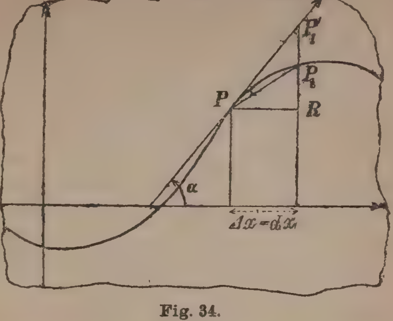


Fig. 34.

Die Rechnung gibt über die Beziehung zwischen Δy und dy folgenden Aufschluß: Bei stehendem x gilt:

$$\lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right) = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Nehmen wir $dx = \Delta x$, so folgt:

(5) $$\lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y - dy}{\Delta x}\right) = 0.$$

Falls der Wert $f'(x)$, der als endlich vorausgesetzt wurde, nicht verschwindet und also auch dy endlich und von 0 verschieden ist, so können wir die letzte Gleichung mit Benutzung von $\Delta x = dx$ in die Gestalt setzen:

$$\lim_{\Delta x = 0} \left(\left(\frac{\Delta y}{dy} - 1\right)\frac{dy}{dx}\right) = f'(x) \cdot \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{dy} - 1\right) = 0$$

und finden wegen $f'(x) \neq 0$ das Ergebnis:

(6) $$\lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{dy}\right) = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta f(x)}{df(x)}\right) = 1.$$

Es gilt hiernach der Satz: *Nähert sich $\Delta x = dx$ der Grenze 0, so wird der Unterschied zwischen der „Differenz der Funktion" $\Delta y = \Delta f(x)$ und dem „Differential" derselben $dy = df(x)$ im Vergleich zu Δx selbst verschwindend klein, so daß insbesondere bei nicht verschwindendem Werte $f'(x)$ der Quotient $\Delta y : dy$ für* lim $\Delta x = 0$ *den Grenzwert* 1 *gewinnt.*

Das Differential einer Funktion $f(x)$ berechnen nennt man *„die Funktion differenzieren"* oder *„die Differentiation der Funktion durchführen"*. Der wesentliche Schritt ist dabei natürlich die Berechnung der Ableitung $f'(x)$, so daß man auch die Berechnung von $f'(x)$ als *„Differentiation"* von $f(x)$ bezeichnet. Sagen wir hinfort, eine Funktion $f(x)$ sei an einer Stelle x oder in einem Intervalle *„differenzierbar"*, so läuft dies darauf hinaus,

daß sie für jenes x bzw. in dem Intervalle eine bestimmte Ableitung besitze. Die Aufgabe der „*Differentialrechnung*" ist, *die Differentiation der Funktionen durchzuführen und die Bedeutung und Verwendung dieser Operation darzulegen.*

Die Bedeutung der Einführung des „*Differentials*" einer Funktion als einer selbständigen Größe neben der Ableitung $f'(x)$ wollen wir im nächsten Paragraphen an einer wichtigen geometrischen Ausführung darlegen. Zunächst verwerten wir nur den formalen Nutzen, daß wir in der Gleichung (3) für den Differentialquotienten oder in der Gleichung (2) für das Differential ein bequemes Mittel haben, *das Ergebnis der Differentiation spezieller Funktionen durch übersichtliche Formeln zum Ausdruck zu bringen.* Wir stellen in dieser Gestalt gleich die Resultate der Rechnungen von § 1 zusammen: *Die „Potenzregel" kleidet sich jetzt in die Gestalt:*

(7) $$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1} \quad \text{oder} \quad d(x^n) = nx^{n-1}dx,$$

gültig für alle nicht-negativen ganzzahligen Exponenten n; die Differentiation des natürlichen Logarithmus ergibt:

(8) $$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{oder} \quad d \ln x = \frac{1}{x}dx = \frac{dx}{x},$$

diejenige der Funktionen $\sin x$ *und* $\cos x$:

(9) $$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

oder in anderer Gestalt:

(10) $$d \sin x = \cos x \, dx, \quad d \cos x = -\sin x \, dx;$$

endlich liefert die Differentiation der hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Sin}\, x$ *und* $\mathfrak{Cof}\, x$:

(11) $$\frac{d\, \mathfrak{Sin}\, x}{dx} = \mathfrak{Cof}\, x, \quad \frac{d\, \mathfrak{Cof}\, x}{dx} = \mathfrak{Sin}\, x$$

oder auch:

(12) $$d\, \mathfrak{Sin}\, x = \mathfrak{Cof}\, x \, dx, \quad d\, \mathfrak{Cof}\, x = \mathfrak{Sin}\, x \, dx.$$

4. Die Bogenlänge und das Bogendifferential einer Kurve. In irgend einem endlichen Intervalle sei eine eindeutige und stetige Funktion $f(x)$ gegeben, welche daselbst überall eine endliche Ableitung $f'(x)$ habe. Von dieser Ableitung wollen wir jetzt weiter voraussetzen, *daß sie im Intervall gleichfalls stetig und abteilungsweise monoton ist;* der Bequemlichkeit halber sei auch angenommen, daß $f'(x)$ in keinem von 0 verschiedenen Teile des Intervalls konstant sei, so daß wir das Gesamtintervall in eine endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegen können, in deren einzelnem $f'(x)$ mit wachsendem x entweder nur zunimmt oder nur abnimmt.

Wir betrachten nun eines der Teilintervalle. Die Kurve der Funktion hat daselbst in jedem Punkte P eine Tangente, die, falls der Punkt P die Kurve stetig im Sinne wachsender x beschreibt, ihre Richtung stetig und immer im gleichen Sinne ändert; und zwar wird der S. 98 erklärte Winkel α, dessen Tangens gleich $f'(x)$ ist, hierbei stets wachsen oder stets abnehmen, je nachdem $f'(x)$ wächst bzw. abnimmt. Hierdurch ist die Möglichkeit gegeben, auf unsere Kurve die S. 48 ff. für den Kreis durchgeführte Betrachtung zu übertragen. Wir können die Tangente, welche wir als einen biegsamen, aber unausdehnbaren Faden denken, längs der Kurve aufwickeln und ein aufgewickeltes Stück des Fadens hernach wieder abwickeln. Es erscheint, wie damals beim Kreise, möglich, *eine „Bogenlänge" der Kurve zu erklären, indem wir irgend ein Bogenstück der Kurve auf eine „gleich lange" gerade Strecke abwickeln und dadurch die Kurve „rektifizieren"*.

Ehe wir weitere Festsetzungen über die Bogenlänge treffen, schieben wir gleich noch folgende grundlegende Betrachtung ein. Es seien P und P_1 zwei Kurvenpunkte in einem Teilintervalle, in dem $f'(x)$ und also der Winkel α bei wachsendem x entweder nur zunehmen oder nur abnehmen. Dann verläuft die Kurve zwischen P und P_1 so, daß sie nach der einen Seite *„konkav"* oder *„gehöhlt"*, nach der anderen aber *„konvex"* oder *„erhaben"* ist. Um eine Ungleichung für die Länge $\widehat{PP_1}$ des von diesen beiden Punkten eingeschlossenen Kurvenbogens aufzustellen, zeichnen wir die Sehne $\overline{PP_1}$ und die beiden Tangenten in P und P_1, welche sich im Punkte Q treffen mögen (s. Fig. 35). Dann gilt nämlich die wichtige Ungleichung:

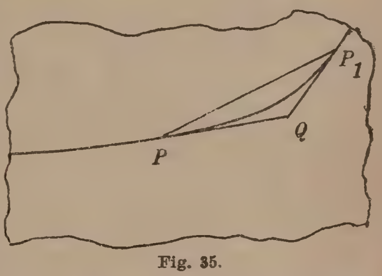


Fig. 35.

$$(1) \qquad \overline{PP_1} < \widehat{PP_1} < \overline{PQ} + \overline{P_1Q}.$$

Daß die Sehne $\overline{PP_1}$ kleiner als der Bogen ist, ist selbstverständlich. Daß aber der Bogen kleiner als die Summe der beiden Tangentenstücke $\overline{PQ}$ und $\overline{P_1Q}$ ist, mache man sich hier, wie beim Kreise (S. 49), durch Aufwickelung dieser beiden Stücke auf die Kurve deutlich; beide Stücke werden bei der Aufwickelung übereinander hinausgeschoben und bedecken schließlich ein Stückchen des Bogens doppelt.

Wir wollen nun von irgend einem Kurvenpunkte, etwa dem der Koordinaten $x = a$ und $y = f(a)$, aus die Bogenlänge der Kurve messen und versehen die Maßzahlen *nach rechts hin, d. h. in der Richtung wachsender x, mit positivem Zeichen, nach links hin mit negativem Zeichen*. Bezeichnen wir die Maßzahl der Bogenlänge bis zu einem beliebigen Kurven-

punkte x, $y = f(x)$ wie beim Kreise wieder mit s, so können wir *s als eine Funktion $s = F(x)$ der Variablen x* auffassen, die in demselben Intervalle wie $f(x)$ erklärt ist und daselbst jedenfalls *eindeutig* und, wie wir gleich sehen werden, auch stetig ist.

Ist nun P ein beliebiger Kurvenpunkt (x, y), in dem $f'(x)$ von 0 verschieden ist, so wähle man den Kurvenpunkt P_1 der Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ so nahe an P, daß $f'(x)$ auch in dem durch x und $(x + \Delta x)$ eingegrenzten Intervalle keinen Nullpunkt hat und monoton ist. Dann ist

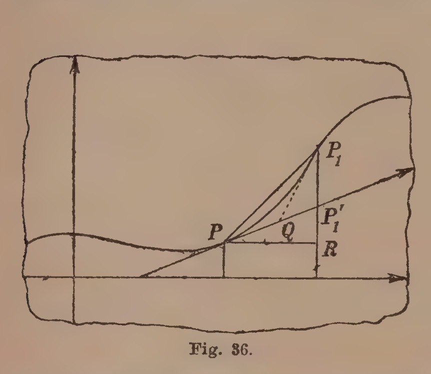


Fig. 36.

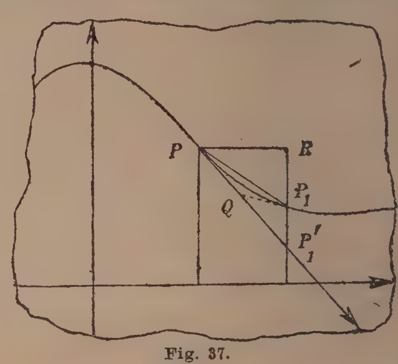


Fig. 37.

die an Fig. 35 angeschlossene Zwischenbetrachtung anwendbar. Ein Paar von den möglichen Lagenverhältnissen sind in Fig. 36 und 37 erläutert. Mit Benutzung von (1) finden wir:

$$\overline{PP_1} < \widehat{PP_1} < \overline{PQ} + \overline{P_1Q} < \overline{PP_1'} + \overline{P_1P_1'}.$$

Nun ist aber $\widehat{PP_1}$ die „Differenz der Funktion $s = F(x)$“, absolut genommen:

$$\widehat{PP_1} = |\Delta s| = |\Delta F(x)| = |F(x + \Delta x) - F(x)|;$$

und es gilt weiter, wenn wir $dx = \Delta x$ nehmen:

$$\overline{PP_1} = +\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = +\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot |\Delta x|,$$

$$\overline{PP_1'} = +\sqrt{dx^2 + dy^2} = +\sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot |\Delta x|.$$

Endlich aber ist $\overline{P_1P_1'}$ in jedem Falle gleich dem absoluten Werte des Unterschiedes zwischen der Differenz Δy und dem Differential dy der Funktion $y = f(x)$. Es gilt demgemäß:

$$+\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot |\Delta x| < |\Delta s| < +\sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot |\Delta x| + |\Delta y - dy|,$$

so daß die Division mit $|\Delta x|$ unter Rücksicht darauf, daß nach der oben über das Vorzeichen der Maßzahl s getroffenen Bestimmung Δx und Δs

stets gleiches Zeichen haben, für den Differenzenquotienten der Funktion $s = F(x)$ die Ungleichung[1]) liefert:

$$+\sqrt{1+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2} < \frac{\varDelta s}{\varDelta x} < +\sqrt{1+f'(x)^2} + \left|\frac{\varDelta y - dy}{\varDelta x}\right|.$$

Zufolge (1) und (5) S. 102ff. haben die beiden Schranken der letzten Ungleichung für $\lim \varDelta x = 0$ einen und denselben Grenzwert, nämlich $+\sqrt{1+f'(x)^2}$. Dieses Ergebnis bleibt auch in dem zunächst ausgeschlossenen Falle $f'(x) = 0$ erhalten. In diesem Falle verläuft die Tangente unserer Kurve im Punkte (x, y) parallel zur x-Achse; man erkennt dann leicht das Zutreffen der Ungleichungen:

$$+\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2} < |\varDelta s| < |\varDelta x| + |\varDelta y|,$$

$$+\sqrt{1+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2} < \frac{\varDelta s}{\varDelta x} < 1 + \left|\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right|.$$

Die beiden Schranken der letzten Ungleichung haben aber für $\lim \varDelta x = 0$ in der Tat übereinstimmend den Grenzwert $1 = +\sqrt{1+f'(x)^2}$. Wir haben damit den folgenden wichtigen Satz gewonnen: *Die für die Kurve der Funktion $y = f(x)$ unter der Voraussetzung einer stetigen und abteilungsweise monotonen Ableitung $f'(x)$ erklärte Bogenlänge $s = F(x)$ liefert eine stetige und „differenzierbare" Funktion, deren Ableitung durch:*

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{ds}{dx} = +\sqrt{1+f'(x)^2} \tag{2}$$

gegeben ist, und deren Differential, welches wir als das „Bogendifferential" der Kurve bezeichnen, sich so darstellt:

$$dF(x) = ds = +\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx = +\sqrt{dx^2+dy^2}. \tag{3}$$

5. Beziehung zwischen den Ableitungen inverser Funktionen. In irgend einem Intervalle sei eine eindeutige, stetige und abteilungsweise monotone Funktion $y = f(x)$ gegeben. Durch $a \leqq x \leqq b$ sei ein Teilintervall festgelegt, in dem $f(x)$ mit wachsendem x entweder beständig zunimmt oder beständig abnimmt. Ist $f(a) = c$ und $f(b) = d$, so ist die nach S. 28 durch Umkehrung von $f(x)$ zu erklärende Funktion $\varphi(x)$ im Intervall $c \leqq x \leqq d$ bzw. $d \leqq x \leqq c$ gleichfalls eindeutig, stetig und monoton. Die Kurve dieser zu $f(x)$ inversen Funktion $\varphi(x)$ geht aus derjenigen von $f(x)$ einfach durch Spiegelung an der S. 28 näher bezeichneten Winkelhalbierenden des Koordinatenkreuzes hervor.

---

1) Aus dieser Ungleichung läßt sich übrigens die Stetigkeit der Funktion $F(x)$ leicht entnehmen, wenn man dieselbe nicht bereits aus der die Funktion $F(x)$ begründenden geometrischen Betrachtung mit Rücksicht auf die Stetigkeit der Geraden als bewiesen ansieht.

In Anlehnung an die geometrische Bedeutung der Ableitung können wir durch folgende Überlegung den Übergang von $f'(x)$ zur Ableitung der inversen Funktion $\varphi(x)$ begründen. Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $a \leq x \leq b$ differenzierbar, so daß die Kurve dieser Funktion in jedem Punkte (x, y) des Intervalls eine bestimmte Tangente hat. Diese geht dann einfach bei der Spiegelung in die Tangente der Kurve von $\varphi(x)$ im entsprechenden Punkte über.[1]) *Also hat auch die inverse Funktion $\varphi(x)$ im Intervall $c \leqq x \leqq d$* bzw. *$d \leqq x \leqq c$ überall eine bestimmte Ableitung $\varphi'(x)$.*

Für $f(x)$ hatten wir die Regel $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ kennen gelernt (S. 98), wo α den Winkel zwischen der nach rechts gerichteten Tangente der Kurve von $f(x)$ mit der positiv gerichteten x-Achse war. Erklären wir entsprechend einen Winkel α' für die Kurve der inversen Funktion $\varphi(x)$, so ist offenbar *vor Vollzug der Spiegelung*, d. h. bei der Kurve von $f(x)$, der Winkel α' derjenige zwischen der *nach oben* gerichteten Tangente und der positiv gerichteten y-Achse, wobei die Maßzahl positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem die eben genannte Tangentenrichtung nach rechts oder nach links weist. Ein paar Skizzen zeigen sofort, daß im ersten Falle $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ und im zweiten $\alpha' = -\frac{\pi}{2} - \alpha$ gilt. In jedem Falle ist somit:

(1) $$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Diese Regel gestattet uns leicht, die Ableitung $\varphi'(x)$ aus $f'(x)$ zu berechnen. Vor Vollzug der Spiegelung und also vor Austausch der Bezeichnungen x, y haben wir die Gleichung $y = f(x)$ in $x = \varphi(y)$ umzuschreiben. Dann ist $\varphi'(y) = \operatorname{tg} \alpha'$, und es folgt aus (1):

$$\varphi'(y) = \operatorname{tg} \alpha' = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Tauschen wir jetzt die Bezeichnungen x und y aus, so ergibt sich:

$$y = \varphi(x), \quad \varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Durch Eintragung von $\varphi(x)$ für y rechter Hand folgt die Gleichung:

(2) $$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))};$$

sie liefert die sogenannte „*Umkehrregel*“: *Zur Berechnung von $\varphi'(x)$ bilde man durch Eintragung von $\varphi(x)$ an Stelle von x in $f'(x)$ die „zusammen-*

1) Der Grenzübergang von der Sekante zur Tangente ist selbstverständlich unabhängig davon, welche von den beiden Koordinaten x, y als abhängig und welche als unabhängig angesehen wird.

gesetzte" Funktion $f'(\varphi(x))$ und hat in dem reziproken Werte derselben die Ableitung $\varphi'(x)$ der zu $f(x)$ inversen Funktion $\varphi(x)$.

Zur Potenz $f(x) = x^n$ ist nach S. 30 die Funktion $\varphi(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ invers; die ganze Zahl n sei hierbei > 1. Bei ungeradem n ist $\varphi(x)$ eine für unbeschränktes x erklärte ungerade Funktion; bei geradem n ist $\varphi(x)$ nur für $x \geqq 0$ erklärt und für $x > 0$ zweideutig, insofern wir $\sqrt[n]{x}$ sowohl positiv als negativ nehmen können. Es sei demnach zunächst x auf ein Intervall $0 < a \leqq x \leqq b$ beschränkt und bei geradem n das eine oder das andere Zeichen gewählt, damit wir auch in diesem Falle mit einer eindeutigen Funktion zu tun haben. Die Auswahl läuft daraus hinaus, daß wir bei der Kurve der Funktion $f(x) = x^n$ nur den rechts oder den links von der y-Achse gelegenen Teil zulassen (vgl. Fig. 2, S. 27).

Es ergibt sich nun für $f(x) = x^n$, $\varphi(x) = x^{\frac{1}{n}}$ aus (7) S. 104:

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad f'(\varphi(x)) = nx^{\frac{1}{n}(n-1)} = nx^{-\frac{1}{n}+1}.$$

Der reziproke Wert des rechts stehenden Ausdrucks ist die Ableitung $\varphi'(x)$, so daß wir die Regel gewinnen:

$$\text{(3)} \qquad \frac{d\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{dx} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}, \qquad d\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} \cdot dz,$$

die wir auch in die Gestalt kleiden können:

$$\text{(4)} \qquad \frac{d(\sqrt[n]{x})}{dx} = \frac{1}{n}\,\frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

Unter Zusammenfassung mit (7) S. 104 können wir sagen: *Die „Potenzregel":*

$$\text{(5)} \qquad \frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}, \quad d(x^m) = mx^{m-1}dx$$

gilt nicht nur für alle nicht-negativen ganzen Zahlen $m = n$, sondern auch noch für alle positiven Stammbrüche $m = \frac{1}{n}$.

Bei geradem n wechselt die Ableitung (4) das Zeichen, wenn wir Zeichenwechsel von $\sqrt[n]{x}$ vornehmen, was auch aus der Symmetrie der Kurve der Funktion $\sqrt[n]{x}$ bezüglich der x-Achse hervorgeht. Bei ungeradem n geht die Kurve der Funktion $\sqrt[n]{x}$ vermöge einer Drehung um den Nullpunkt durch den Winkel π in sich selbst über und hat also in zwei diametralen Punkten $(x, \sqrt[n]{x})$ und $(-x, -\sqrt[n]{x})$ parallele Tangenten. Die Ableitung von $\sqrt[n]{x}$ ist also in diesem Falle eine *gerade* Funktion, so daß der Ausdruck (4) der Ableitung, der für ungerades n tatsächlich eine

gerade Funktion darstellt, auch für $x < 0$ gilt. Endlich wolle man feststellen, daß die Ableitung (4) für $\lim x = 0$ den Grenzwert $\pm\infty$ hat, und zwar den Grenzwert $-\infty$ nur dann, wenn n gerade ist, $\sqrt[n]{x}$ negativ genommen wurde und übrigens, was bei geradem n allein in Betracht kommt, die Annäherung an $x = 0$ von rechts her vollzogen wurde. *In jedem Falle hat also die Ableitung* (4) *für* $x = 0$ *einen „Unendlichkeitspunkt"*. An der Kurve der Funktion $\sqrt[n]{x}$ kommt dies dadurch zum Ausdruck, daß diese Kurve die y-Achse im Nullpunkte berührt (vgl. Fig. 2, S. 27).

Zur Funktion $f(x) = \ln x$ ist die *„natürliche Exponentialfunktion"* $\varphi(x) = e^x$ invers, die für unbeschränktes x eindeutig und stetig ist (s. S. 38). Nach (8) S. 104 ist hier $f'(x) = \frac{1}{x}$. Tragen wir in diese Gleichung e^x an Stelle von x ein und gehen zum reziproken Werte, so ergibt sich, daß die Ableitung $\varphi'(x) = e^x$ und also gleich der ursprünglichen Funktion $\varphi(x)$ selbst ist: *Die Differentiationsregel der natürlichen Exponentialfunktion ist:*

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x, \quad d(e^x) = e^x dx. \tag{6}$$

Die zu $f(x) = \sin x$ inverse Funktion war $\varphi(x) = \text{arc} \sin x$; dieselbe wurde nur im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ erklärt und ist in diesem Intervall unendlich vieldeutig. Ein Wert der Funktion $y = \text{arc} \sin x$ lag im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$; wir hatten diesen Wert als *„Hauptwert"* der Funktion bezeichnet und konnten alle übrigen Werte in einfacher Weise durch den Hauptwert darstellen (s. S. 60 und Fig. 14, S. 59). Um den Hauptwert zu gewinnen, schränken wir bei $f(x) = \sin x$ das Argument x auf ein Intervall:

$$-\frac{\pi}{2} < a \leqq x \leqq b < +\frac{\pi}{2}$$

ein. In diesem Intervall ist die Ableitung $\cos x$ von $\sin x$ *positiv*, so daß wir:

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

zu setzen haben. Schreiben wir hier an Stelle von x die Funktion

$$\varphi(x) = \text{arc} \sin x,$$

so ist:

$$\sin(\text{arc} \sin x) = x$$

zu setzen, da eben zufolge der ursprünglichen Erklärung $\text{arc} \sin x$ einen Bogen bedeutet, dessen Sinus gleich x ist. Aus:

$$f'(\varphi(x)) = +\sqrt{1 - x^2}$$

aber folgt nach der allgemeinen Regel (2) sofort: *Die Ableitung des Hauptwertes der Funktion* arc sin x *ist gegeben durch:*

$$(7)\qquad \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}, \qquad d \arcsin x = \frac{dx}{+\sqrt{1-x^2}},$$

die zweite Formel gibt in üblicher Weise das Differential. Die Grenzübergänge $\lim x = \pm 1$, welche keine Schwierigkeit machen, zeigen, daß die Ableitung (7) bei $x = +1$ und $x = -1$ Unendlichkeitspunkte hat; dies ist in Übereinstimmung mit dem Verlauf der arc sin-Kurve, die an den betreffenden Stellen zur y-Achse parallele Tangenten hat.

Der S. 61 erklärte „Hauptwert" der Funktion $y = \arccos x$ gehört dem Intervalle $0 \leqq y \leqq \pi$ an. Man knüpft daraufhin sehr leicht an die Differentiationsregel der Funktion $f(x) = \cos x$ eine der vorstehenden Überlegung genau entsprechende Entwicklung. Es ergibt sich: *Die Differentiationsregel des Hauptwertes der Funktion* arc cos x *ist die folgende:*

$$(8)\qquad \frac{d \arccos x}{dx} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}, \qquad d \arccos x = \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

Um endlich auf Grund der Gleichungen (11) und (12) S. 104 die Differentiation der zu den Funktionen $\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Cof}\, x$ inversen Funktionen $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, x$ durchzuführen, erinnere man sich der Relation:

$$\mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1$$

und halte sich übrigens zum Verständnis der Rechnungen die Kurven der Fig. 21, S. 67, vor Augen. Die zu $f(x) = \mathfrak{Sin}\, x$ inverse Funktion

$$\varphi(x) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x$$

ist für unbeschränktes x eindeutig und stetig, und es ergibt sich aus ihrer Erklärung:

$$\mathfrak{Sin}(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x) = x.$$

Da nun $\mathfrak{Cof}\, x \geqq 1$ ist, so liefert die Gleichung (11) S. 104 für $f(x) = \mathfrak{Sin}\, x$

$$f'(x) = \mathfrak{Cof}\, x = +\sqrt{1 + \mathfrak{Sin}^2 x}$$

und also, wenn wir $\varphi(x) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x$ für x einsetzen:

$$f'(\varphi(x)) = +\sqrt{1 + (\mathfrak{Sin}(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x))^2} = +\sqrt{1+x^2}.$$

Hiernach liefert die Differentiation der Funktion $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x$ *folgendes Ergebnis:*

$$(9)\qquad \frac{d\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x}{dx} = \frac{1}{+\sqrt{1+x^2}}, \qquad d\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x = \frac{dx}{+\sqrt{1+x^2}}.$$

Die Funktion $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, x$ ist nur für $x \geqq 1$ erklärt und für $x > 1$ zweideutig, wobei die beiden zum einzelnen x gehörenden Funktionswerte

nur im Vorzeichen unterschieden sind. Nun gilt für $f(x) = \mathfrak{Cof}\, x$ zufolge (12) S. 104:

$$f'(x) = \mathfrak{Sin}\, x = \pm \sqrt{\mathfrak{Cof}^2 x - 1},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem x positiv oder negativ ist. Setzt man hier $\varphi(x) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, x$ statt x ein, so folgt:

$$f'(\varphi(x)) = \pm \sqrt{(\mathfrak{Cof}(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, x))^2 - 1} = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

mit dem oberen oder unteren Zeichen, je nachdem man den positiven oder den negativen Wert $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, x$ bevorzugt. *Unter Obacht auf diese Zeichenregel* liefert die Differentiation von $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, x$:

$$(10) \qquad \frac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, x}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}}, \quad d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, x = \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Natürlich ist auch diese abgeleitete Funktion nur für $x \geqq 1$ erklärt; bei $x = 1$ hat sie einen Unendlichkeitspunkt.

6. Differentiation von Aggregaten und von Vielfachen einer Funktion. Es gilt folgender Satz: *Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei in einem Intervalle eindeutige, stetige und differenzierbare Funktionen, so gilt dasselbe von der Summe und der Differenz $f(x) = \varphi(x) \pm \psi(x)$ beider Funktionen, und zwar hat man:*

$$(1) \qquad f'(x) = \varphi'(x) \pm \psi'(x), \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} \pm \frac{d\psi(x)}{dx}$$

oder für die Differentiale:

$$(2) \qquad df(x) = d(\varphi(x) \pm \psi(x)) = d\varphi(x) \pm d\psi(x).$$

Es stellt sich nämlich der Differenzenquotient von $f(x)$ so dar:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x} \pm \frac{\psi(x_1) - \psi(x)}{x_1 - x}.$$

Da nun für $\lim x_1 = x$ der Annahme gemäß die beiden rechts stehenden Quotienten die Grenzwerte $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ besitzen, so hat auch der Differenzenquotient von $f(x)$ für $\lim x_1 = x$ eine Grenze $f'(x)$, für welche sich die Gleichung (1) unmittelbar ergibt. Die Regel überträgt sich offenbar leicht auf irgendwelche Aggregate von Funktionen, d. h. endlich-gliedrige Summen oder Differenzen von Funktionen. *Ein solches Aggregat wird differenziert, indem man jedes Glied im Aggregate durch seine Ableitung ersetzt, oder, wie man auch sagt, indem man das Aggregat „gliedweise" differenziert.*

Das Produkt einer Konstanten c und einer Funktion $\varphi(x)$ wollen wir hier der Kürze halber auch dann ein „Vielfaches" der Funktion $\varphi(x)$ nennen, wenn c keine positive ganze Zahl ist. Es besteht der Satz: *Ist $\varphi(x)$ in einem Intervall eindeutig, stetig und differenzierbar, so gilt das-*

selbe von dem Vielfachen $f(x) = c \cdot \varphi(x)$ *dieser Funktion, und zwar hat man:*

$$(3) \qquad f'(x) = c \cdot \varphi'(x), \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{d(c\varphi(x))}{dx} = c \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

oder für die Differentiale:

$$(4) \qquad df(x) = d(c\varphi(x)) = c \cdot d\varphi(x).$$

Man kann die Regel (3) oder (4) so aussprechen: *Folgt bei Berechnung eines Differentials auf das Zeichen d der Differentiation ein konstanter Faktor der zu differenzierenden Funktion, so darf dieser Faktor vor das „Differentialzeichen" d gesetzt werden und ist dann mit dem Differential des anderen Faktors zu multiplizieren.* Um den aufgestellten Satz darzutun, wird der Hinweis genügen, daß der Differenzenquotient der Funktion $f(x) = c \cdot \varphi(x)$ die Gestalt hat:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = c \cdot \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x},$$

woraus sich für $\lim x_1 = x$ der Satz ergibt.

Für irgend eine positive Basis b ist die Funktion ${}^b\log x$, d. h. der *Logarithmus von x zur Basis b*, auf Grund von (8) S. 40 durch den natürlichen Logarithmus $\ln x$ in der Form:

$${}^b\log x = \left(\frac{1}{\ln b}\right) \cdot \ln x$$

darstellbar, wobei der konstante Faktor rechter Hand als *„Modul"* des Logarithmensystems der Basis b bezeichnet wurde. Die Regel (3) liefert mit Rücksicht auf (8) S. 104 den Satz: *Das Ergebnis der Differentiation der Funktion ${}^b\log x$ ist:*

$$(5) \qquad \frac{d\,{}^b\log x}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln b}, \qquad d\,{}^b\log x = \frac{dx}{x \cdot \ln b}.$$

Zur Funktion $f(x) = {}^b\log x$ ist (s. S. 40) die *„Exponentialfunktion"* $\varphi(x) = b^x$ invers. Setzt man in den in (5) gewonnenen Ausdruck von $f'(x)$ statt x die Funktion $\varphi(x) = b^x$ ein, so folgt:

$$f'(\varphi(x)) = \frac{1}{b^x \cdot \ln b}.$$

Zufolge der Regel (2) S. 108 gilt demnach der Satz: *Die Differentiation der Exponentialfunktion b^x ergibt:*

$$(6) \qquad \frac{d(b^x)}{dx} = b^x \cdot \ln b, \qquad d(b^x) = b^x \cdot \ln b \cdot dx.$$

Hierin ist die Gleichung (6) S. 110 als Spezialfall enthalten, ebenso in (5) die Regel (8) S. 104. Unter allen Funktionen b^x verhält sich hier die „natürliche" Exponentialfunktion e^x am einfachsten, ebenso unter

allen Funktionen ${}^b\log x$ der „natürliche“ Logarithmus $\ln x$. Die Benennung der Funktionen e^x, $\ln x$ erscheint damit gerechtfertigt (s. S. 38).

Eine *ganze rationale Funktion* n^{ten} *Grades:*

(7) $$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ist ein Aggregat von Gliedern, deren einzelnes auf Grund der Vorschrift (3) und der „Potenzregel“ zu differenzieren ist. Diese Regel gilt auch für das erste Glied, das wir zu diesem Zwecke $a_0 x^0$ schreiben. Die Ableitung der ganzen Funktion (7) ist:

(8) $$g'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Die Differentiation einer ganzen rationalen Funktion n^{ten} *Grades* $g(x)$ *liefert als Ableitung eine ebensolche Funktion* $(n-1)^{ten}$ *Grades* $g'(x)$, *deren Koeffizienten sich nach der Regel* (8) *aus denen von* $g(x)$ *berechnen.* Die Spezialfälle $n = 1$ und $n = 0$ ergeben: *Die Ableitung einer linearen ganzen Funktion ist konstant, die Ableitung einer Konstanten ist gleich* 0.

Um die Differentialrechnung anwenden zu können, muß man sich eine gewisse Gewandtheit im „Differenzieren der Funktionen“ aneignen. Dies kann nur durch die „selbständige“ Bearbeitung von Aufgaben geschehen. Es folgen hier einige Aufgaben zur Einübung der bisherigen Ergebnisse der Differentiationen; die Antworten sind mit angegeben, müssen aber vom Leser selbständig gefunden werden. Zur Bequemlichkeit sind die zu verwendenden Grundregeln am Schlusse des Bandes in einer „Formeltabelle“ zusammengestellt. Bei Differentiation von Wurzeln aus x schreibe man diese zunächst in „Bruchpotenzen“ um, damit die „Potenzregel“ in ihrer einfachsten Gestalt verwendbar wird. Bei den Anwendungen der Differentialrechnung ist die unabhängige Variable keineswegs stets durch x bezeichnet, und ebenso wenig die abhängige immer durch y. Man muß demnach lernen, eine Funktion $f(u)$ „in Bezug auf u“ oder, wie wir kurz sagen, „nach u“ zu differenzieren, eine Funktion $\varphi(t)$ nach t usw. Es ist deshalb bei den Aufgaben mit der Bezeichnungsweise mehrfach gewechselt.

Aufgaben: Es sind folgende Funktionen zu differenzieren:

1) $y = x^7$, $\dfrac{dy}{dx} = 7x^6$

2) $y = 3x^9$, $\dfrac{dy}{dx} = 27x^8$.

3) $u = ay^4 - by^3$, $\dfrac{du}{dy} = 4ay^3 - 3by^2$.

4) $f(t) = 7t^n + 6t^{n-1} - 3t^2$, $f'(t) = 7nt^{n-1} + 6(n-1)t^{n-2} - 6t$.

5) $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, $f'(x) = b + 2cx + 3dx^2$.

6) $y = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{p}{q}x^n$, $\dfrac{dy}{dx} = -x + x^3 + \dfrac{np}{q}x^{n-1}$.

7) $g(z) = \dfrac{13}{2}z^4 - \dfrac{a+b}{n}z^3 + 7z^2 - 2z - 3$, $g'(z) = 26z^3 - 3\dfrac{a+b}{n}z^2 + 14z - 2$.

8) $y = 3x^{n+2} - ax^{n-4} + b$, $\dfrac{dy}{dx} = 3(n+2)x^{n+1} - a(n-4)x^{n-5}$.

9) $f(x) = 5\ln x - 7x^3$, $f'(x) = \dfrac{5}{x} - 21x^2$,

10) $y = az^n - 3 \ln z + z^2,$ $\qquad \frac{dy}{dz} = naz^{n-1} - \frac{3}{z} + 2z.$

11) $\varphi(u) = A \ln u - 5au^{2+n},$ $\qquad \varphi'(u) = \frac{A}{u} - 5a(2+n)u^{1+n}.$

12) $y = 21x^2 - (3a + b) \ln x,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 42x - \frac{3a+b}{x}.$

13) $F(v) = 5 \ln v + 3v^7 - 2,$ $\qquad \frac{dF(v)}{dv} = \frac{5}{v} + 21v^6.$

14) $f(x) = x^7 + 8 \sin x - 2 \cos x,$ $\qquad \frac{df(x)}{dx} = 7x^6 + 8 \cos x + 2 \sin x.$

15) $x = 5 \cos u - 7 \ln u + 2u^3,$ $\qquad \frac{dx}{du} = -5 \sin u - \frac{7}{u} + 6u^2.$

16) $f(z) = 5mz^7 - (a + 2b) \cos z,$ $\qquad f'(z) = 35mz^6 + (a + 2b) \sin z.$

17) $f(x) = 21x^2 - (3a + c) \ln x + 2b \cos x,$ $\qquad f'(x) = 42x - \frac{3a+c}{x} - 2b \sin x.$

18) $h(t) = a^3 \cdot \cos t - \ln 7 \cdot \sin t,$ $\qquad h'(t) = -a^3 \cdot \sin t - \ln 7 \cdot \cos t.$

19) $y = \mathfrak{Sin}\, x - 7\, \mathfrak{Cos}\, x + 25x^2,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \mathfrak{Cos}\, x - 7\, \mathfrak{Sin}\, x + 50x.$

20) $f(t) = (A + 2D)\, \mathfrak{Cos}\, t - 5 \ln t,$ $\qquad f'(t) = (A + 2D)\, \mathfrak{Sin}\, t - \frac{5}{t}.$

21) $y = 28\sqrt{x} + 3e^x - 2 \cos x,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{14}{\sqrt{x}} + 3e^x + 2 \sin x.$

22) $f(u) = a\sqrt[7]{u} - 2\, \mathfrak{Cos}\, u - 3,$ $\qquad f'(u) = \frac{a}{7\left(\sqrt[7]{z}\right)^6} - 2\, \mathfrak{Sin}\, u.$

23) $w = c\sqrt[n]{z} + 2 \sin z,$ $\qquad \frac{dw}{dz} = \frac{c}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)^{n-1}} + 2 \cos z.$

24) $y = a \cdot e^x - 12 \ln x,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = a \cdot e^x - \frac{12}{x}.$

25) $f(x) = 3 \arcsin x - 7me^x,$ $\qquad f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 7me^x.$

26) $u = 27 \arccos x - 3x^3 - 2x + 9,$ $\qquad \frac{du}{dx} = -\frac{27}{\sqrt{1-x^2}} - 9x^2 - 2.$

27) $y = -5x^m + 2\, \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Sin}\, x - 3,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -5mx^{m-1} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}.$

28) $\psi(z) = (3 - 7a)\, \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Cos}\, z - 7e^z,$ $\qquad \psi'(z) = \pm \frac{3-7a}{\sqrt{z^2-1}} - 7e^z.$

29) $y = -\ln x + 3c\, \mathfrak{Sin}\, x + \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Cos}\, x,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} + 3c\, \mathfrak{Cos}\, x \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

30) $f(x) = 5 \cdot {}^b\log x - 7x^3,$ $\qquad f'(x) = \frac{5}{x \cdot \ln b} - 21x^2.$

31) $s = at^n - 3 \cdot {}^c\log t + 2\cos t,$ $\qquad \frac{ds}{dt} = ant^{n-1} - \frac{3}{t \cdot \ln c} - 2\sin t.$

32) $y = a^x - 3 \cdot {}^{10}\log x + 2x^{13},$ $\qquad \frac{dy}{dx} = a^x \ln a - \frac{3}{x \cdot \ln 10} + 26x^{12}.$

33) $F(u) = 3 \cdot 7^u + 7\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,u,$ $\qquad \frac{dF(u)}{du} = 3 \cdot 7^u \cdot \ln 7 + \frac{7}{\sqrt{1+u^2}}.$

34) $t = -(a-b) \cdot c^s + 3\,{}^{10}\log s,$ $\qquad \frac{dt}{ds} = -(a-b)c^s \cdot \ln c + \frac{3}{s \cdot \ln 10}.$

7. Differentiation von Produkten und Quotienten. Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in einem Intervalle eindeutig und stetig, so ist daselbst auch das Produkt $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ eindeutig und stetig, und dasselbe gilt vom Quotienten $f(x) = \varphi(x) : \psi(x)$ in jedem abgeschlossenen Teilintervalle, dem kein Nullpunkt des Nenners angehört (s. S. 20). Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ überdies differenzierbar, so gilt dasselbe vom Produkte im ganzen Intervalle und vom Quotienten in jedem der genannten Teilintervalle.

Um dies zunächst für das Produkt zu beweisen, kleiden wir die „Differenz" der Funktion $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ in die folgende Gestalt:

$$f(x_1) - f(x) = \varphi(x_1)(\psi(x_1) - \psi(x)) + \psi(x)(\varphi(x_1) - \varphi(x))$$

und leiten hieraus für den Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \varphi(x_1) \cdot \frac{\psi(x_1) - \psi(x)}{x_1 - x} + \psi(x) \cdot \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x}$$

ab. Für $\lim x_1 = x$ nähert sich die „stetige" Funktion $\varphi(x_1)$ der Grenze $\varphi(x)$, und die Quotienten rechter Hand nähern sich der Annahme gemäß den Ableitungen $\psi'(x)$ und $\varphi'(x)$ als Grenzwerten. Also nähert sich auch der Differenzenquotient von $f(x)$ einem Grenzwerte $f'(x)$, für den wir die Darstellung:

(1) $$f'(x) = \varphi(x) \cdot \psi'(x) + \psi(x) \cdot \varphi'(x)$$

gewinnen. Dieses Gesetz, dem wir auch die Gestalten verleihen können:

(2) $$\begin{cases} \dfrac{d(\varphi(x)\,\psi(x))}{dx} = \varphi(x)\,\dfrac{d\psi(x)}{dx} + \psi(x)\,\dfrac{d\varphi(x)}{dx}, \\ d(\varphi(x)\psi(x)) = \varphi(x) \cdot d\psi(x) + \psi(x) \cdot d\varphi(x), \end{cases}$$

wollen wir fortan die „*Produktregel*" nennen; sie lehrt, *daß wir die Ableitung des Produktes $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ erhalten, indem wir den ersten Faktor mit der Ableitung des zweiten multiplizieren und dazu das Produkt des zweiten Faktors mit der Ableitung des ersten addieren.*

Im Falle des Quotienten beweist man leicht:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{1}{\psi(x_1)} \cdot \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)\,\psi(x_1)} \cdot \frac{\psi(x_1) - \psi(x)}{x_1 - x}$$

als eine Darstellung des Differenzenquotienten. Die weitere Schlußweise gestaltet sich wie vorhin und liefert für $f(x)$ tatsächlich eine Ableitung $f'(x)$ in der Gestalt:

$$(3) \qquad f'(x) = \frac{\psi(x) \cdot \varphi'(x) - \varphi(x) \cdot \psi'(x)}{(\psi(x))^2}.$$

Diese „*Quotientenregel*“, der wir auch die Form geben können:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\left(\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)}{dx} = \dfrac{\psi(x)\dfrac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x)\dfrac{d\psi(x)}{dx}}{(\psi(x))^2}, \\ d\left(\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \dfrac{\psi(x) \cdot d\varphi(x) - \varphi(x) \cdot d\psi(x)}{(\psi(x))^2}, \end{cases}$$

lehrt, *daß wir die Ableitung eines Quotienten* $\varphi(x) : \psi(x)$ *erhalten, indem wir den Nenner mit der Ableitung des Zählers multiplizieren, davon das Produkt des Zählers und der Ableitung des Nenners abziehen und die Differenz durch das Quadrat des Nenners teilen.*

Da wir die Ableitungen von $\sin x$, $\cos x$, $\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Cos}\, x$ kennen, so können wir jetzt mittels der Quotientenregel auch die vier Funktionen

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \mathfrak{Tg}\, x = \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Cos}\, x}, \quad \mathfrak{Cotg}\, x = \frac{\mathfrak{Cos}\, x}{\mathfrak{Sin}\, x}$$

differenzieren. Für die erste dieser Funktionen finden wir:

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{\cos x \dfrac{d \sin x}{dx} - \sin x \dfrac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

und können diesem Ergebnis zwei Gestalten verleihen, indem wir erstens den Zähler nach (2) S. 52 gleich 1 setzen, oder indem wir zweitens die beiden Glieder des Zählers einzeln durch $\cos^2 x$ teilen. *Die Differentiation der Funktion* $\operatorname{tg} x$ *liefert somit:*

$$(5) \qquad \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)dx,$$

und man findet auf entsprechende Art für die Funktion $\operatorname{cotg} x$:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d \operatorname{cotg} x}{dx} = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x, \\ d \operatorname{cotg} x = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)dx. \end{cases}$$

Bei den hyperbolischen Funktionen kommt die Beziehung (8) S. 68 zwischen $\mathfrak{Cos}\, x$ und $\mathfrak{Sin}\, x$ zur Verwendung. *Die Differentiation der hyperbolischen Funktionen* $\mathfrak{Tg}\, x$ *und* $\mathfrak{Cotg}\, x$ *ergibt:*

(7) $\frac{d\,\mathfrak{Tg}\,x}{dx} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}^2 x} = 1 - \mathfrak{Tg}^2 x, \qquad d\,\mathfrak{Tg}\,x = \frac{dx}{\mathfrak{Cos}^2 x} = (1 - \mathfrak{Tg}^2 x)\,dx,$

(8) $\frac{d\,\mathfrak{Cotg}\,x}{dx} = \frac{-1}{\mathfrak{Sin}^2 x} = 1 - \mathfrak{Cotg}^2 x, \quad d\,\mathfrak{Cotg}\,x = -\frac{dx}{\mathfrak{Sin}^2 x} = (1 - \mathfrak{Cotg}^2 x)\,dx.$

Den Übergang zu den Ableitungen der zugehörigen inversen Funktionen vollzieht man wieder auf Grund der „Umkehrregel" (vgl. S. 108). Um die Rechnung etwa im ersten Falle durchzuführen, setzen wir $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\varphi(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ und haben also in:

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

an Stelle von x die zu $f(x)$ inverse Funktion $\varphi(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ einzutragen, wobei $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$ zu setzen ist. Dies ergibt:

$$f'(\varphi(x)) = 1 + x^2, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

In den übrigen Fällen ist die Rechnung ebenso leicht durchführbar. *Die Differentiation der vier Funktionen* $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,cotg} x$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x$ *und* $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,x$ *ergibt:*

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{d \operatorname{arc\,tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, & d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}, \\ \frac{d \operatorname{arc\,cotg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, & d \operatorname{arc\,cotg} x = -\frac{dx}{1+x^2}, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, & d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x = \frac{dx}{1-x^2}, \\ \frac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, & d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,x = \frac{dx}{1-x^2}. \end{cases}$$

Die Regeln (9) gelten nicht nur für die „Hauptwerte", sondern für alle Werte der unendlich-vieldeutigen Funktionen $\operatorname{arc\,tg} x$ und $\operatorname{arc\,cotg} x$, die nach (3) S. 61 aus den Hauptwerten durch Hinzufügung der Multipla von π entstehen. Bei der Differentiation liefert eben jede solche additive Konstante den Wert 0 als Ableitung.[1]) Von den Regeln (10) bezieht sich die obere auf die Werte x im Intervalle $-1 < x < +1$, die untere auf die Werte x, für welche $|x| > 1$ ist (vgl. S. 71).

Nachdem S. 114 die Differentiation der ganzen rationalen Funktionen geleistet wurde, ist nun mittelst der Quotientenregel auch die *Differentiation jeder gebrochenen rationalen Funktion* auf Grund ihrer „Normaldar-

1) Man vergegenwärtige sich auch an Fig. 15, S. 60, daß die unendlich vielen Zweige der arc tg-Kurve in den Punkten einer gegebenen Abszisse x lauter parallele Tangenten haben. Daß die Ableitungen von $\operatorname{arc\,tg} x$ und $\operatorname{arc\,cotg} x$ sich nur im Vorzeichen unterscheiden können, hätte auch aus der zweiten Gleichung (4) S. 61 gefolgert werden können.

stellung“ als Quotient zweier ganzer Funktionen leicht ausführbar. So finden wir für die in (1) S. 77 dargestellte Funktion $R(x)$ als Ableitung:

$$(11)\quad R'(x)=\frac{(a_0b_1-a_1b_0)+2(a_0b_2-a_2b_0)x+\cdots+(m\,a_nb_m-n\,a_nb_m)x^{m+n-1}}{(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)^2};$$

die Ableitung ist also *wieder eine rationale Funktion, deren Zähler dem Grade* $(m+n-1)$ *angehört.* Für die Funktion $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ mit positivem ganzzahligen n folgt:

$$\frac{d(x^{-n})}{dx}=\frac{x^n\cdot 0-1\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}.$$

Differenzieren wir gleich auch noch die Funktion $x^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ mittelst der Quotientenregel und unter Benutzung von (3) S. 109, so folgt:

$$\frac{d\left(x^{-\frac{1}{n}}\right)}{dx}=\frac{x^{\frac{1}{n}}\cdot 0-1\cdot\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}}{x^{\frac{2}{n}}}=-\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1}.$$

Damit haben wir den wichtigen Satz gewonnen, *daß die „Potenzregel“ in ihrer ursprünglichen Gestalt:*

$$(12)\qquad \frac{d(x^m)}{dx}=mx^{m-1},\qquad d(x^m)=mx^{m-1}dx$$

auch dann noch gilt, wenn m eine negative ganze Zahl oder ein negativer Stammbruch ist.

Bei den folgenden Aufgaben wolle man die Ausdrücke $\frac{1}{x^n}$ und $\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$, um die Regel (12) leicht anwenden zu können, immer in x^{-n} und $x^{-\frac{1}{n}}$ umschreiben.

Aufgaben: Es sind folgende Funktionen zu differenzieren:

1) $y=(7+x^2)(x^n+5\ln x)$, $\quad\frac{dy}{dx}=(7+x^2)\left(nx^{n-1}+\frac{5}{x}\right)+2x(x^n+5\ln x)$.

2) $f(x)=a\cdot\sin x\cdot 3^x+b\cdot\ln x\cdot\cos x$, $\quad f'(x)=a\cdot\sin x\cdot 3^x\ln 3+a\cos x\cdot 3^x-b\cdot\ln x\sin x$
$+b\cdot\frac{1}{x}\cdot\cos x$.

3) $u=v^3\cdot\operatorname{tg}v+7\cdot 3^v\cdot\arcsin v$, $\quad\frac{du}{dv}=\frac{v^3}{\cos^2 v}+3v^2\operatorname{tg}v+\frac{7\cdot 3^v}{\sqrt{1-v^2}}$
$+7\cdot 3^v\cdot\ln 3\cdot\arcsin v$.

4) $y=\frac{7x^2-2}{x-1}+\frac{\ln x}{\sin x}$, $\quad\frac{dy}{dx}=\frac{7x^2-14x+2}{(x-1)^2}+\frac{\sin x-x\cdot\ln x\cdot\cos x}{x\cdot\sin^2 x}$.

5) $F(z) = 3\,\frac{\cos z}{\ln z} - 5z \cdot \mathfrak{Sin}\, z, \quad \frac{dF(z)}{dz} = -3\,\frac{z \cdot \ln z \cdot \sin z + \cos z}{z \cdot (\ln z)^2} - 5z \cdot \mathfrak{Cos}\, z - 5\,\mathfrak{Sin}\, z.$

6) $z = \frac{u-1}{u+1} + a \cdot {}^{10}\log u \cdot \mathfrak{Ar\,Sin}\, u, \quad \frac{dz}{du} = \frac{2}{(u+1)^2} + a \cdot {}^{10}\log u \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{a}{u \cdot \ln 10}\,\mathfrak{Ar\,Sin}\, u.$

7) $\varphi(y) = \frac{8 \ln y}{y^2 + ay + b} + 7 \operatorname{cotg} y - 3y^n \cdot e^y, \quad \varphi'(y) = 8\,\frac{(y^2+ay+b) - y(2y+a)\ln y}{y(y^2+ay+b)^2} - \frac{7}{\sin^2 y} - 3y^n e^y - 3ny^{n-1}e^y.$

8) $y = \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 7 + 2x - 5x^2, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{9}{x^4} + \frac{8}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 2 - 10x.$

9) $s = \frac{t-4}{t+1} - \frac{t^2+2}{3t-7}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{5}{(t+1)^2} - \frac{3t^2 - 14t - 6}{(3t-7)^2}.$

10) $w = (3a - u)(5b + u^2) - \frac{2a}{u^n} + 7\,\mathfrak{Ar\,Cos}\, u,$

$$\frac{dw}{du} = -5b + 6au - 3u^2 + \frac{2an}{u^{n+1}} \pm \frac{7}{\sqrt{u^2-1}}.$$

11) $f(x) = 5 \operatorname{tg} x - 7 \operatorname{arc\,tg} x + 2 \arcsin x, \quad f'(x) = \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{7}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$

12) $z = \frac{2}{y^5} - \frac{3}{y^n} + \frac{7 \ln y}{\mathfrak{Cos}\, y} + \mathfrak{Cotg}\, y,$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{10}{y^6} + \frac{3n}{y^{n+1}} + 7\,\frac{\mathfrak{Cos}\, y - y \cdot \ln y \cdot \mathfrak{Sin}\, y}{y \cdot \mathfrak{Cos}^2 y} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 y}.$$

13) $F(z) = 5\,\mathfrak{Tg}\, z \cdot {}^3\log z - 7e^z \cdot \mathfrak{Ar\,Tg}\, z,$

$$\frac{dF(z)}{dz} = 5\,\mathfrak{Tg}\, z \cdot \frac{1}{z \cdot \ln 3} + 5(1 - \mathfrak{Tg}^2 z) \cdot {}^3\log z - \frac{7e^z}{1-z^2} - 7e^z \cdot \mathfrak{Ar\,Tg}\, z.$$

14) $y = 2 \operatorname{arc\,cotg} x \cdot (x^2 - 2x - 3) + \frac{\mathfrak{Cos}\, x}{a^x - 2} + 3\,\mathfrak{Cotg}\, x, \quad \frac{dy}{dx} = 4 \operatorname{arc\,cotg} x \cdot (x-1) - \frac{2x^2 - 4x - 6}{1+x^2} + \frac{(a^x - 2)\,\mathfrak{Sin}\, x - \mathfrak{Cos}\, x \cdot a^x \cdot \ln a}{(a^x-2)^2} - \frac{3}{\mathfrak{Sin}^2 x}.$

15) $f(u) = 2\sqrt[7]{u} - \frac{3}{u^7} + \frac{7}{\sqrt[8]{u}} - 12, \quad f'(u) = \frac{2}{7\left(\sqrt[7]{u}\right)^6} + \frac{21}{u^8} - \frac{7}{8\left(\sqrt[8]{u}\right)^9}.$

16) $y = \frac{\sqrt{x} + 2x^2}{\mathfrak{Ar\,Sin}\, x} + 3 \cdot b^x \cdot \operatorname{cotg} x,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{Ar\,Sin}\, x\left(1 + 8x\sqrt{x}\right)\sqrt{1+x^2} - 2x\left(1 + 2x\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x^2}\,(\mathfrak{Ar\,Sin}\, x)^2} - \frac{3 \cdot b^x}{\sin^2 x} + 3 \cdot b^x \ln b \cdot \operatorname{cotg} x.$$

17) $\psi(v) = a^v \cdot \ln v + \frac{\mathfrak{Sin}\, v + \ln v}{v} - \frac{3}{\sqrt[5]{v}},$

$$\frac{d\psi(v)}{dv} = \frac{a^v}{v} + a^v \cdot \ln a \cdot \ln v + \frac{v \cdot \mathfrak{Cos}\, v + 1 - \mathfrak{Sin}\, v - \ln v}{v^2} + \frac{3}{5\left(\sqrt[5]{v}\right)^6}.$$

18) $y = 3\sqrt{x} - \frac{6}{7}\sqrt[3]{x} + 5\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\,x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{7(\sqrt[3]{x})^2} + \frac{5}{1-x^2}.$

19) $u = \frac{A}{\sqrt[m]{v}} - \frac{3}{\sqrt[7]{v}} + 7 \cdot \arccos v, \quad \frac{du}{dv} = -\frac{A}{m(\sqrt[m]{v})^{m+1}} + \frac{3}{7(\sqrt[7]{v})^8} - \frac{7}{\sqrt{1-v^2}}.$

20) $f(x) = (x^3 - 6x)\sin x + (3x^2 - 6)\cos x, \quad f'(x) = x^3 \cdot \cos x.$

Die trigonometrischen Funktionen „*Sekans*" und „*Kosekans*" sowie die entsprechenden hyperbolischen Funktionen erklärt man durch:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \mathfrak{Sec}\,x = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,x}, \quad \mathfrak{Cosec}\,x = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,x}.$$

Ihre inversen Funktionen werden durch arc sec x, arc cosec x, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sec}\,x$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cosec}\,x$ bezeichnet.

21) $y = \sec x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\sqrt{\sec^2 x - 1}.$

22) $f(x) = \operatorname{arc\,sec} x, \quad f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

23) $\psi(x) = \mathfrak{Cosec}\,x, \quad \psi'(x) = -\frac{\mathfrak{Cos}\,x}{\mathfrak{Sin}^2 x} = -\mathfrak{Cosec}\,x\sqrt{\mathfrak{Cosec}^2 x + 1}$

24) $y = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cosec}\,x, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}.$

8. Differentiation zusammengesetzter Funktionen. Für die sämtlichen elementaren transzendenten Funktionen, die wir S. 84 als „einfach" bezeichneten, haben wir die Ableitungen berechnet, ebenso für die ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen. Damit aber können wir weiter auch alle diejenigen Funktionen differenzieren, welche aus Funktionen der eben genannten Arten durch rationale Rechnungen berechenbar sind; denn wenn wir $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ differenzieren können, so können wir dasselbe für $\varphi(x) \pm \psi(x)$, $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ und $\varphi(x) : \psi(x)$ leisten, und aus Additionen, Subtraktionen usw. setzt sich jede rationale Rechnung zusammen.

Dagegen sind wir noch nicht im stande, die in Gleichung (2) S. 84 hergestellte „*zusammengesetzte*" Funktion:

(1) $$y = f(x) = \varphi(\psi(x))$$

zu differenzieren, selbst wenn wir $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ einzeln zu differenzieren vermögen. Unterscheiden wir $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ entsprechend ihrer Stellung in (1) als „äußere" und „innere" Funktion, so hat die Berechnung von $f(x)$ für das einzelne Argument x so vorzugehen, daß man zunächst den Wert $u = \psi(x)$ der inneren Funktion für das Argument x berechnet und sodann $y = \varphi(u)$ feststellt, d. h. den Wert der äußeren Funktion $\varphi(u)$ für das eben gewonnene Argument u berechnet.

Auch für die Differentiation von $f(x)$ erweist sich nun die Einführung der Größe $u = \psi(x)$ als einer „*Hilfsvariablen*" als zweckmäßig.

Der eben beschriebenen Berechnung von $f(x)$ entsprechend zerlegen wir zunächst die Gleichung (1) in:

(2) $$y = f(x) = \varphi(u), \qquad u = \psi(x).$$

Ändert sich nun x um die positive oder negative Zahl Δx, so mag dem die „Differenz $\Delta u = \Delta \psi(x)$ der Funktion“ $u = \psi(x)$ entsprechen. Diesem Δu als „Differenz des Argumentes“ von $\varphi(u)$ gehört dann als „Differenz der Funktion“ $\Delta y = \Delta \varphi(u)$ derjenige Wert Δy zu, um welchen sich die Funktion $y = f(x)$ bei Änderung von x um das ursprüngliche Δx ändert. Dem zugehörigen Differenzenquotienten verleihen wir durch Erweiterung mit Δu die Gestalt:

(3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta \varphi(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta \psi(x)}{\Delta x}.$$

Es möge nun die Funktion $\psi(x)$ für das vorliegende x eine endliche Ableitung $\psi'(x)$ haben, und ebenso $\varphi(u)$ für das zugehörige u. Da für $\lim \Delta x = 0$ auch $\lim \Delta u = 0$ wird, so zeigt Gleichung (3), *daß für* $\lim \Delta x = 0$ *auch der Differenzenquotient von* $y = f(x)$ *einen bestimmten Grenzwert bekommt,*[1] *nämlich:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u = 0} \frac{\Delta \varphi(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta \psi(x)}{\Delta x} = \varphi'(u) \cdot \psi'(x).$$

Die gewonnene Regel:

(4) $$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d\varphi(\psi(x))}{dx} = \frac{d\varphi(u)}{du} \cdot \frac{d\psi(x)}{dx} = \varphi'(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$$

lehrt folgendes: *Um die zusammengesetzte Funktion* $f(x) = \varphi(\psi(x))$ *zu differenzieren, bilde man die „äußere“ Funktion für die Hilfsvariable* u, *differenziere* $\varphi(u)$ *nach* u *und füge als Faktor die Ableitung* $\frac{du}{dx} = \psi'(x)$ *der Hilfsvariablen* $u = \psi(x)$ *in bezug auf* x *hinzu.*

Ist der Prozeß der Zusammensetzung der Funktionen wiederholt ausgeübt, hat man z. B. die Funktion $f(x) = \varphi\big(\psi(\chi(x))\big)$, so ist das Verfahren zweimal anzuwenden. Man setze erstlich $u = \psi(\chi(x))$ als Hilfsvariable an, betrachte $\varphi(u)$ als „äußere“ Funktion und $u = \psi(\chi(x))$ als „innere“. Die Berechnung der Ableitung der inneren Funktion nach x erfordert dann die zweite Anwendung unserer Regel. Das Resultat, welches in diesem Falle die Gestalt annimmt:

(5) $$\frac{df(x)}{dx} = \varphi'\big(\psi(\chi(x))\big) \cdot \psi'(\chi(x)) \cdot \chi'(x),$$

---

1) Daß der Grenzwert eines Produktes gleich dem Produkte der Grenzwerte der Faktoren ist, zeigt man leicht; s. hierzu übrigens auch die Betrachtungen von S. 20 über die Stetigkeit des Produktes zweier stetiger Funktionen.

kann ohne Mühe auch noch weiter verallgemeinert werden. Da bei den zusammengesetzten Funktionen eine oder mehrere Hilfsvariable wie die Glieder einer „Kette“ zwischen x und y eingeschaltet werden, so nennt man die „Regel zur Differentiation zusammengesetzter Funktionen“ auch wohl kurz *„Kettenregel“*.

Als eine erste Anwendung der Regel (4) geben wir einen neuen Beweis der „Umkehrregel“, d. i. der Gleichung (2) S. 108 zwischen den Ableitungen zweier inverser Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$. Diese beiden Funktionen hängen in der Weise zusammen, daß die Gleichung $y = \varphi(x)$, nach x aufgelöst, $x = f(y)$ ergibt; es ist also $x = f(\varphi(x))$, d. h. die „zusammengesetzte“ Funktion $f(\varphi(x))$ ist einfach mit x identisch und hat also die Ableitung 1. Indem wir aber die Ableitung von $f(\varphi(x))$ nach der Regel (4) berechnen, folgt:

$$f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 1, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))},$$

womit wir die Formel (2) S. 108 wiedergewonnen haben.

Ein zweites Beispiel liefere uns die Funktion:

$$f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = u^{\frac{1}{n}}, \qquad u = x^m,$$

unter n eine positive ganze Zahl und unter m eine beliebige ganze Zahl verstanden. Sowohl für die äußere, als für die innere Funktion kommt hier die „Potenzregel“ in ihrem bisher betrachteten Umfange zur Geltung:

$$f'(x) = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \cdot m x^{m-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{m}{n}-m} \cdot m x^{m-1}.$$

Unter Zusammenfassung der Faktoren folgt:

$$(6) \qquad \frac{d\left(x^{\frac{m}{n}}\right)}{dx} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}, \qquad d\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \cdot dx,$$

so daß die „Potenzregel“ in ihrer bisherigen Gestalt als für alle rationalen Exponenten gültig erkannt ist.

Wir setzen weiter:

$$f(x) = \sqrt[n]{\varphi(x)} = u^{\frac{1}{n}}, \qquad u = \varphi(x)$$

und finden mittelst der Regel (4):

$$(7) \qquad f'(x) = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{n\left(\sqrt[n]{\varphi(x)}\right)^{n-1}}.$$

Durch einmalige oder wiederholte Anwendung dieser Regel und Benutzung der früheren Vorschriften über Differentiation der rationalen Funktionen

können wir jetzt auch jede „elementare" algebraische Funktion (s. S. 83) differenzieren.

Für $x > 0$ war x^a mit einer „beliebigen" Konstanten a als eindeutige Funktion von x erklärt (s. Gleichung (9) S. 87), und zwar durch:

$$x^a = e^{a \cdot \ln x} = e^u, \qquad u = a \cdot \ln x.$$

Die Differentiation ergibt nach der Regel (4):

$$(8) \qquad \frac{d(x^a)}{dx} = \frac{de^u}{du} \cdot \frac{d(a \cdot \ln x)}{dx} = e^u \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a x^{a-1}.$$

Die „Potenzregel" gilt in ihrer ursprünglichen Gestalt für alle (reellen und konstanten) Exponenten.

Unter der Voraussetzung positiver Werte $\varphi(x)$ bilden wir endlich:

$$f(x) = \ln \varphi(x) = \ln u, \qquad u = \varphi(x)$$

und finden für die Ableitung $f'(x)$:

$$(9) \qquad f'(x) = \frac{d \ln u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \varphi'(x), \qquad \frac{d \ln \varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Bemerkenswerte Beispiele hierzu sind:

$$(10) \qquad \frac{d \ln \sin x}{dx} = \operatorname{cotg} x, \qquad \frac{d \ln \cos x}{dx} = - \operatorname{tg} x,$$

sowie die entsprechenden Formeln für die hyperbolischen Funktionen:

$$(11) \qquad \frac{d \ln \mathfrak{Sin}\, x}{dx} = \mathfrak{Cotg}\, x, \qquad \frac{d \ln \mathfrak{Cof}\, x}{dx} = \mathfrak{Tg}\, x.$$

Schreibt man in der zweiten Gleichung (9) an Stelle von $\varphi(x)$ die Funktion $f(x)$, so folgt durch Multiplikation mit $f(x)$:

$$(12) \qquad f'(x) = f(x) \cdot \frac{d \ln f(x)}{dx}.$$

Die hier rechts gegebene Methode der Berechnung der Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ bezeichnet man als *die „logarithmische Differentiation" von* $f(x)$. Ist z. B. die Funktion $f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$, wo sowohl Basis als Exponent x enthalten[1]), zu differenzieren, so ist $\ln f(x) = \psi(x) \cdot \ln \varphi(x)$, und also liefert die Regel (12):

$$(13) \qquad \frac{d\left(\varphi(x)^{\psi(x)}\right)}{dx} = \varphi(x)^{\psi(x)} \cdot \frac{d(\psi(x) \cdot \ln \varphi(x))}{dx}$$
$$= \varphi(x)^{\psi(x)} \cdot \left(\frac{\psi(x)\, \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \psi'(x) \cdot \ln \varphi(x)\right).$$

1) Die nähere Erklärung dieser Funktion ist in (10) S. 87 gegeben; auf Grund dieser Gleichung kann man die Ableitung auch leicht nach der „Kettenregel" berechnen.

Als einfachstes Beispiel ist hierin die Formel enthalten:

$$(14) \qquad \frac{d(x^x)}{dx} = x^x(1 + \ln x).$$

Die logarithmische Differentiation gestattet uns auch, die S. 116 aufgestellte „Produktregel“ von zwei auf beliebig viele Faktoren zu verallgemeinern. Ist $f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdots \varphi_n(x)$, so können wir unter der Voraussetzung, daß für die zuzulassenden Werte x keiner der Faktoren $\varphi_k(x)$ gleich 0 oder negativ ist, $\ln f(x)$ in die Summe entwickeln:

$$\ln f(x) = \ln \varphi_1(x) + \ln \varphi_2(x) + \cdots + \ln \varphi_n(x).$$

Die Regeln (12) und (9) ergeben demnach:

$$(15) \quad f'(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdots \varphi_n(x) \left\{ \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \cdots + \frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} \right\}.$$

Multipliziert man die in der Klammer stehende n-gliedrige Summe mit dem vor derselben stehenden Produkte, so ergibt sich als *„allgemeine Produktregel“: Ein Produkt von n Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ wird differenziert, indem man die einzelnen Faktoren differenziert, jede Ableitung $\varphi_k'(x)$ mit den unveränderten $(n-1)$ übrigen Faktoren multipliziert und die n in dieser Art zu gewinnenden Produkte addiert.* Die Regel ist übrigens auch auf induktivem Wege von $n = 2$ aus beweisbar; hierbei sehen wir, daß sie auch für negative und verschwindende Funktionswerte $\varphi_k(x)$ gültig bleibt.

Erfahrungsgemäß fällt dem Lernenden die Differentiation zusammengesetzter Funktionen anfangs etwas schwerer. Es kann dies einmal daran liegen, daß in jedem Fall zunächst zu überlegen ist, welches die „äußere“ Funktion $\varphi(x)$, und welches die „innere“ $\psi(x)$ ist, und daß überhaupt die „Kettenregel“ die Durchführung mehrerer Operationen vorschreibt. Dieser Schwierigkeit begegnet man dadurch, daß man wenigstens anfangs immer die Zerlegung der gegebenen Funktion in $y = \varphi(u)$, $u = \psi(x)$ wirklich hinschreibt und auch die weiteren Schritte der Entwicklung immer einzeln schriftlich ausführt. Andrerseits kann die Schwierigkeit auch daran liegen, daß die Regeln, deren Einübung die Aufgaben der §§ 6 und 7 bezwecken, noch nicht hinreichend beherrscht werden. In diesem Falle ist dem Lernenden anzuraten, weitere Aufgaben für die beiden genannten Paragraphen sich selbständig zu bilden und zu bearbeiten.

Aufgaben: Es sind folgende Funktionen zu differenzieren:

1) $y = (x^4 + 3x^2 - 2x + 7)^n, \quad \frac{dy}{dx} = n(x^4 + 3x^2 - 2x + 7)^{n-1} \cdot (4x^3 + 6x - 2).$

2) $f(z) = 15 \cos(3z + 7) + \sin(\ln z), \quad f'(z) = -45 \sin(3z + 7) + \frac{\cos(\ln z)}{z}.$

3) $v = 8\,\mathfrak{Cof}\,(\ln u) - 17\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,u, \quad \frac{dv}{du} = \frac{8\,\mathfrak{Sin}\,(\ln u)}{u} - \frac{17}{1-u^2}.$

4) $z = \sin(5y) - 7a^{\sin y}, \quad \frac{dz}{dy} = 5\cos(5y) - 7a^{\sin y} \cdot \ln a \cdot \cos y.$

5) $F(x) = {}^a\log \operatorname{tg} x - 3\sin({}^b\log x) + e^{ax+b}$, $F'(x) = \frac{1+\operatorname{tg} x^2}{\operatorname{tg} x\cdot \ln a} - \frac{3\cos({}^b\log x)}{x\cdot\ln b} + a\cdot e^{ax+b}$.

6) $y = a\sin^3 z + b\sin^2 z + c\sin z$, $\frac{dy}{dz} = (3a\sin^2 z + 2b\sin z + c)\cos z$.

7) $s=(t^2-a^2)^2+e^{\sin t}+\operatorname{arc\,sin} t$, $\frac{ds}{dt}=4t(t^2-a^2)+e^{\sin t}\cos t+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

8) $f(x)=e^{3x^2-2x+7}+3\sqrt{1-x^2}$, $\frac{df(x)}{dx}=e^{3x^2-2x+7}(6x-2)-\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$.

9) $y=a\sqrt[3]{z^2}+b\sqrt[m]{z^n}-\frac{c}{\sqrt[5]{z^7}}$, $\frac{dy}{dz}=\frac{2a}{3\sqrt[3]{z}}+\frac{bn}{m}\sqrt[m]{z^{n-m}}+\frac{7c}{5\sqrt[5]{z^{12}}}$.

10) $w=a^{3v+2}-e^{\cos v}+\mathfrak{Tg}\,(\mathfrak{Sin}\, v)$, $\frac{dw}{dv}=3a^{3v+2}\cdot\ln a+e^{\cos v}\cdot\sin v + \frac{\mathfrak{Cof}\, v}{(\mathfrak{Cof}\,(\mathfrak{Sin}\, v))^2}$.

11) $y=(b+x)\sqrt{b-x}-3\sqrt[5]{\sin x}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{b-3x}{2\sqrt{b-x}}-\frac{3\cos x}{5\sqrt[5]{\sin^4 x}}$.

12) $\varphi(z)=3\cdot b^{\operatorname{tg} z}-\operatorname{arc\,sin}\sqrt{1-z^2}$, $\varphi'(z)=\frac{3b^{\operatorname{tg} z}\cdot\ln b}{\cos^2 z}+\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.

13) $f(x)=(2+x^2)\sqrt{2-x^2}+3\,\mathfrak{Sin}\,(ax^2+b)$, $f'(x)=\frac{2x-3x^3}{\sqrt{2-x^2}}+6ax\cdot\mathfrak{Cof}\,(ax^2+b)$.

14) $y=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt{1-\sqrt{x}}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{(a-x)\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{x-x\sqrt{x}}}$.

15) $\psi(u)=\sqrt[3]{\frac{1+u}{1-u}}+\frac{\sqrt{u}}{\mathfrak{Cotg}\, u}$, $\psi'(u)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+u)^2(1-u)^4}}+\frac{\mathfrak{Cof}\,u\cdot\mathfrak{Sin}\,u+2u}{2\sqrt{u}\,\mathfrak{Cof}^2 u}$.

16) $s=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} v\right)-\sqrt[3]{\cos v}$. $\frac{ds}{dv}=\frac{1}{\sin v}+\frac{\sin v}{3\sqrt[3]{\cos^2 v}}$.

17) $s=e^t\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}+3\cdot{}^2\log t\cdot\sqrt{t}$, $\frac{ds}{dt}=e^t\frac{2-t^2}{(1-t)\sqrt{1-t^2}}+\frac{3\cdot{}^2\log t}{2\sqrt{t}}+\frac{3}{\ln 2\cdot\sqrt{t}}$.

18) $y=\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)-\frac{a}{\sqrt[7]{x^5}}+b^3$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)}+\frac{5a}{7\left(\sqrt[7]{x}\right)^{12}}$.

19) $f(z)=\operatorname{arc\,tg}(\ln(az+b))$, $f'(z)=\frac{1}{1+(\ln(az+b))^2}\cdot\frac{a}{az+b}$.

20) $y=5\cdot x^x-3x^{\frac{1}{x}}+(\sin x)^x$,

$$\frac{dy}{dx}=5x^x(1+\ln x)-3x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}+(\sin x)^x(x\cdot\operatorname{cotg} x+\ln\sin x).$$

21) $f(x) = \sin(x^x) - 3\ln(\ln x)$, $\quad f'(x) = \cos(x^x)\cdot x^x(1+\ln x) - \dfrac{3}{x\cdot\ln x}$.

22) $u = {}^{10}\log\left(\sqrt[4]{\cos^3 x}\right) + \ln\left(\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)$, $\quad \dfrac{du}{dx} = -\dfrac{3}{4\cdot\ln 10}\operatorname{tg} x - \dfrac{2}{\sin x}$.

23) $y = z\cdot\sin z\cdot \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, z$, $\quad \dfrac{dy}{dz} = \sin z\cdot\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, z + z\cdot\cos z\cdot\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, z + \dfrac{z\cdot\sin z}{1-z^2}$.

24) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(1-x)\cdot\cos x\cdot\ln x$,

$$f'(x) = -\frac{\cos x\cdot\ln x}{2-2x+x^2} - \operatorname{arc\,tg}(1-x)\cdot\sin x\cdot\ln x + \frac{\operatorname{arc\,tg}(1-x)\cdot\cos x}{x}.$$

25) $u = \ln(5\sin x + 2\cos x) + \operatorname{tg}^2 x$, $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{5-2\operatorname{tg} x}{2+5\operatorname{tg} x} + 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^3 x$.

26) $f(x) = e^{-\mu x}\sin(ax+b) + x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

$$f'(x) = e^{-\mu x}(a\cdot\cos(ax+b) - \mu\sin(ax+b)) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

27) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

28) $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Zufolge der Gleichungen (2) S. 71 hat man in 27) und 28) Bestätigungen der Differentiationsregeln (9) S. 111 und (10) S. 118 der Funktionen $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, x$ gewonnen.

9. Der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz. Es besteht folgender nach Rolle[1]) benannter Satz: *Hat die im Intervall $a \leqq x \leqq b$ eindeutige und stetige Funktion $F(x)$ daselbst überall eine endliche Ableitung $F'(x)$, und verschwindet $F(x)$ sowohl für $x = a$ als auch für $x = b$, so gibt es mindestens eine Stelle c im Innern des Intervalles, für welche die Ableitung $F'(c)$ gleich 0 ist.*

Ist $F(x)$ im Intervall konstant gleich 0, so gilt dasselbe von $F'(x)$, so daß die Gleichung $F'(c) = 0$ für *jeden* Punkt des Intervalles zutrifft. Ist $F(x)$ nicht konstant gleich 0, so treten positive oder negative Funktionswerte auf. Kommen nur negative Werte vor, so können wir die folgende Betrachtung auf $-F(x)$ beziehen; es ist also keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir das Auftreten positiver Werte annehmen. Aus der Stetigkeit von $F(x)$ folgt nach S. 20 die Möglichkeit der Angabe einer endlichen positiven Zahl h, die größer ist als alle im Intervall auftretenden positiven Funktionswerte $F(x)$. Diese Funktionswerte haben also eine unter h gelegene obere Grenze g, deren Existenz man durch die übliche Schlußweise (S. 5ff.) feststellt. Die Stetigkeitssätze aber zeigen alsdann, daß die obere Grenze g in mindestens einem Punkte c des Inter-

1) Französischer Mathematiker um 1700.

valles als Funktionswert $g = F(c)$ wirklich erreicht wird (S. 17 ff.). Dabei gilt notwendig $a < c < b$, da $g > 0$ ist und $F(a) = F(b) = 0$ gelten sollte. Man bilde nun für irgend ein von c verschiedenes x_1 des Intervalles den Differenzenquotienten:

$$(1) \qquad \frac{F(x_1) - F(c)}{x_1 - c}.$$

Da kein Funktionswert $F(x_1)$ größer als $F(c)$ ist, so ist der Zähler in (1) nie positiv, d. h. entweder gleich Null oder negativ. Der Quotient (1) ist demnach für $x_1 > c$ nie positiv und für $x_1 < c$ nie negativ. Dasselbe gilt also auch von den Grenzwerten des Quotienten (1), falls sich x_1 von rechts her bzw. von links her der Grenze c annähert; d. h. der eine Grenzwert ist sicher nicht positiv und der andere sicher nicht negativ. Aber diese beiden Grenzwerte sind der Voraussetzung gemäß einander gleich, und zwar gleich dem endlichen Werte $F'(c)$. Es ist also $F'(c)$ weder > 0 noch < 0, womit $F'(c) = 0$ bewiesen ist.

Aus dem Rolleschen Satze ergibt sich leicht das folgende als „*Mittelwertsatz*" bezeichnete Theorem, dessen grundsätzliche Bedeutung für die ganze Differentialrechnung in den folgenden Entwicklungen vielfach hervortreten wird: *Haben die im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ eindeutigen und stetigen Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ daselbst überall endliche Ableitungen $f'(x)$ und $\varphi'(x)$, und gilt von der zweiten Funktion, daß $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ ist, sowie daß $\varphi'(x)$ in keinem „inneren" Punkte des Intervalles gleich 0 ist, so gibt es mindestens einen Innenpunkt c des Intervalles, für welchen die Gleichung zutrifft:*

$$(2) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Da nämlich $(\varphi(b) - \varphi(a))$ nicht gleich 0 ist, so ist:

$$(3) \qquad A = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

ein bestimmter endlicher Wert. Mit Hilfe dieses Wertes A bilde man die Funktion:

$$F(x) = f(x) - A\varphi(x) - (f(a) - A\varphi(a)),$$

welche, wie man leicht feststellt, allen Vorbedingungen des Rolleschen Satzes genügt. Es gibt also nach diesem Satze einen Innenwert c des Intervalles, für welchen:

$$F'(c) = f'(c) - A\varphi'(c) = 0$$

zutrifft. Da aber $\varphi'(c)$ endlich und von 0 verschieden ist, so kann man A aus der letzten Gleichung aufs neue berechnen und findet durch Gleichsetzung des entstehenden Ausdrucks A mit dem in (3) gegebenen die zu beweisende Gleichung (2).

Da die linke Seite von (2) unverändert bleibt, falls man a und b austauscht, *so gilt der Mittelwertsatz ohne sonstige Änderungen der Voraussetzungen auch dann, wenn von den beiden das Intervall abschließenden Werten b der kleinere ist.*

Man stellt leicht fest, daß sowohl für $a < b$ als $a > b$ der Punkt:

(4) $$x = a + \vartheta(b - a)$$

stetig und monoton das Intervall von a bis b beschreibt, falls ϑ stetig von 0 bis 1 wächst. Man kann demnach den Mittelwertsatz auch so aussprechen, *daß es mindestens eine dem Intervall $0 < \vartheta < 1$ angehörende Zahl gibt, für welche die Gleichung gilt:*

(5) $$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(a + \vartheta(b - a))}{\varphi'(a + \vartheta(b - a))}.$$

Ist m eine *positive* ganze Zahl, so befriedigt die Funktion:

$$\varphi(x) = b^m - (b - x)^m$$

die Bedingungen des Mittelwertsatzes; denn es gilt:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)^m, \qquad \varphi'(x) = m(b - x)^{m-1},$$

so daß $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ ist und $\varphi'(x)$ für keinen „Innenpunkt" des Intervalles verschwindet. Man stelle fest, daß hier:

$$\varphi'(a + \vartheta(b - a)) = m(b - a)^{m-1}(1 - \vartheta)^{m-1}$$

zutrifft, und gewinnt so folgenden „besonderen Mittelwertsatz": *Besitzt die im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ oder $b \leqq x \leqq a$ eindeutige und stetige Funktion $f(x)$ daselbst überall eine endliche Ableitung $f'(x)$, so gibt es für jede positive ganze Zahl m mindestens eine dem Intervall $0 < \vartheta < 1$ angehörende Zahl ϑ, für welche die Gleichung zutrifft:*

(6) $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{m(1 - \vartheta)^{m-1}} \cdot f'(a + \vartheta(b - a));$$

im niedersten Falle $m = 1$ gilt also:

(7) $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \vartheta(b - a))$$

oder, wenn wir mit $(b - a)$ multiplizieren:[1])

(8) $$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(a + \vartheta(b - a)).$$

Übrigens gilt natürlich die der Gleichung (8) entsprechende Gleichung:

(9) $$f(x_1) - f(x) = (x_1 - x) \cdot f'(x + \vartheta(x_1 - x))$$

1) Die Zahl ϑ ist natürlich durch m mit bedingt, so daß die in (7) auftretende Zahl ϑ nicht dieselbe zu sein braucht, wie die in (6) für irgend ein $m > 1$ eintretende Zahl ϑ.

für jedes Wertepaar x, x_1 des Intervalles. Existiert, wie wir ja annahmen, $f'(x)$ im ganzen Intervalle, und lassen sich (was bei einer stetigen Ableitung $f'(x)$ zutrifft) zwei Schranken angeben, zwischen denen die Werte $f'(x)$ des Intervalles liegen, so folgt aus (9) leicht, *daß $f(x)$ im ganzen Intervalle „stetig“ (d. i. „gleichmäßig stetig“) ist* (s. S. 17). Die für die Differenzierbarkeit oben immer angenommene „Stetigkeit“ von $f(x)$ ist also eine notwendige Voraussetzung.

10. Die Monotonie der Funktionen mit Ausführungen für die rationalen Funktionen. Die elementaren Funktionen befriedigen zum mindesten innerhalb geeignet beschränkter Intervalle die Vorbedingungen des zuletzt aufgestellten Mittelwertsatzes. Ist $f(x)$ zunächst mehrdeutig, kommen also bei der Berechnung von $f(x)$ etwa Wurzeln geraden Grades oder zyklometrische Funktionen vor, so kann man durch Festsetzungen über die Vorzeichen der Wurzeln oder über die Werte der zyklometrischen Funktionen $f(x)$ jedesmal eindeutig erklären. Auch die Ableitung einer elementaren Funktion ist jedesmal wieder eine ebensolche Funktion. Treten Unendlichkeitspunkte bei $f(x)$ oder bei $f'(x)$ auf, so beschränken wir das Intervall zunächst in der Art, daß es von solchen Punkten frei ist. Wenn wir demnach von $f(x)$ entsprechend den Vorbedingungen des Mittelwertsatzes nunmehr voraussetzen dürfen, *daß diese Funktion im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ eindeutig und stetig sei und daselbst eine endliche Ableitung $f'(x)$ habe*, so werden wir den Mittelwertsatz für weitere Folgerungen über unsere elementaren Funktionen verwerten können.

Die nächsten Folgerungen, welche wir ziehen wollen, gründen sich auf die Gleichung (8) S. 129. Sind x_1 und x_2 zwei verschiedene Punkte des Intervalles, so genügt $f(x)$ selbstverständlich auch im Intervalle, das durch x_1 und x_2 begrenzt ist, den Bedingungen des Mittelwertsatzes, so daß mindestens ein ϑ existiert, für welches:

$$(1) \qquad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x_1 + \vartheta(x_2 - x_1)), \qquad 0 < \vartheta < 1$$

zutrifft. Wählen wir der Einfachheit halber $x_2 > x_1$, so ergibt die Gleichung (1) unmittelbar folgende drei Sätze:

1) *Ist $f'(x)$ entweder im ganzen Intervalle oder in einem Teilintervalle $a \leqq a' \leqq x \leqq b' \leqq b$ konstant gleich 0, so ist ebenda $f(x)$ konstant.*

2) *Gilt im ganzen Intervalle oder in einem Teilintervalle überall $f'(x) > 0$, so ist ebenda $f(x)$ monoton und mit wachsendem x beständig wachsend.*

3) *Gilt im ganzen Intervalle oder in einem Teilintervalle $f'(x) < 0$, so ist ebenda $f(x)$ monoton und mit wachsendem x beständig abnehmend.*

In der Tat folgt aus (1) für irgend zwei Punkte x_1 und $x_2 > x_1$ des

Intervalles $a \leqq a' \leqq x \leqq b' \leqq b$ im ersten Falle $f(x_2) = f(x_1)$, im zweiten $f(x_2) > f(x_1)$ und im dritten $f(x_2) < f(x_1)$.

Beispiele für den zweiten und dritten Satz sind in großer Zahl aus den früheren Entwicklungen zu entnehmen. Die in Fig. 12, S. 55, gezeichnete Sinuskurve steigt oder fällt mit wachsendem x, je nachdem die in dieser Figur gleichfalls angedeutete Kosinuskurve oberhalb oder unterhalb der x-Achse verläuft. Die in Fig. 21, S. 67, gezeichnete Sin-Kurve steigt mit wachsendem x beständig, da die Cos-Kurve ganz oberhalb der x-Achse verläuft; die letztere Kurve steigt oder fällt mit wachsendem x, je nachdem die Sin-Kurve oberhalb oder unterhalb der x-Achse verläuft.

Wir können jetzt auch über den *Verlauf der rationalen Funktionen* genauere Angaben machen. Zunächst genügt eine ganze Funktion n^{ten} Grades in jedem endlichen Intervalle den Bedingungen des Mittelwertsatzes. Die Ableitung einer solchen Funktion:

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ist aber nach S. 114 die Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$G'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Die Faktorenzerlegung von $G'(x)$ sei (vgl. (7) S. 76):

$$(2) \qquad G'(x) = n a_n (x-\alpha_1)^{\nu_1}(x-\alpha_2)^{\nu_2} \cdots (x-\alpha_k)^{\nu_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{\mu_1} \cdots \cdots (x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{\mu_l}.$$

Die (reellen) Nullpunkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ von $G'(x)$ seien der Größe nach geordnet $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$; ihre Anzahl k ist eine Zahl der Reihe 0, 1, 2, ..., $n-1$. Zwischen zwei aufeinander folgenden Nullpunkten, sowie links von α_1 und rechts von α_k ist $G'(x)$ nirgends gleich 0 und demnach als stetige Funktion entweder nur positiv oder nur negativ. Es geht hieraus hervor, *daß die ganze Funktion $G(x)$ in jedem endlichen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ abteilungsweise monoton ist;* denn die etwa in das Intervallinnere fallenden Punkte α liefern *im Höchstfalle n Teilintervalle, innerhalb deren $G(x)$ monoton ist.* Übrigens hat $G'(x)$ in zwei benachbarten, durch einen Nullpunkt α getrennten Teilintervallen nur dann ungleiche Zeichen, wenn der zugehörige Exponent ν in (2) eine *ungerade* Zahl ist; nur in diesem Falle wird also $G(x)$ in dem einen Teilintervalle wachsen und in dem anderen abnehmen, während bei geradem ν die Funktion $G(x)$ in beiden Intervallen gleiches Verhalten zeigt.

Die Ableitung $R'(x)$ der in (1) S. 77 angegebenen rationalen Funktion $R(x)$ ist in (11) S. 119 berechnet. Der Zähler von $R'(x)$ hat als eine ganze Funktion, deren Grad $(m+n-1)$ nicht übersteigt, höchstens $(m+n-1)$ Nullpunkte und hat zwischen zwei benachbarten Nullpunkten stets Werte gleichen Vorzeichens. Der Nenner von $R'(x)$ hat

die Nullpunkte von $R(x)$, deren Anzahl im Höchstfalle gleich n ist; abgesehen von diesen Punkten ist aber der Nenner stets positiv. Die Nullpunkte des Nenners von $R(x)$ sind nach S. 82 „*Unendlichkeitspunkte*“ der rationalen Funktion $R(x)$. In jedem endlichen Intervalle, dem kein Unendlichkeitspunkt angehört, ist $R(x)$ *eindeutig, stetig und abteilungsweise monoton.*

Kapitel II. Wiederholte Differentiation der Funktionen einer Variablen.

1. Die abgeleiteten Funktionen höherer Ordnung. Es gelte die Annahme, daß die in einem Intervalle $a \leq x \leq b$ erklärte eindeutige und stetige Funktion $f(x)$ daselbst eine gleichfalls eindeutige und stetige sowie differenzierbare Ableitung $f'(x)$ habe. Die Differentiation von $f'(x)$ liefere als Ableitung die durch:

$$\frac{df'(x)}{dx} = f''(x) \tag{1}$$

zu bezeichnende Funktion; wir nennen $f''(x)$ die „*abgeleitete Funktion oder Ableitung zweiter Ordnung*“ oder kurz die „*zweite Ableitung*“ von $f(x)$. Ist auch $f''(x)$ wieder differenzierbar, so gelangen wir entsprechend zur „*Ableitung dritter Ordnung*“ oder „*dritten Ableitung*“:

$$\frac{df''(x)}{dx} = f'''(x).$$

In derselben Weise weitergehend erklären wir mittels der Kette von Formeln:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x), \quad \frac{df'(x)}{dx} = f''(x), \quad \ldots, \quad \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = f^{(n)}(x) \tag{2}$$

die „*abgeleitete Funktion n^{ter} Ordnung*“ oder kurz die „*n^{te} Ableitung*“ von $f(x)$, vorausgesetzt natürlich, daß alle Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ existieren, und daß auch noch die letzte differenzierbar ist. Von $n = 4$ ab deutet man die Anzahl der als obere Indizes zugefügten Striche, d. h. also die Anzahl der vollzogenen Differentiationen, durch das Symbol (n) an.

Da die Ableitung $f'(x)$ einer elementaren Funktion $f(x)$ selbst wieder eine solche Funktion ist, so steht der wiederholten Differentiation derselben nichts im Wege: *Für jede elementare Funktion $f(x)$ ist demnach eine Ableitung $f^{(n)}(x)$ jeder Ordnung n nach den früheren Regeln berechenbar.* Einige späterhin zur Benutzung kommende Beispiele sollen unten betrachtet werden.

Deuten wir die Funktion $y = f(x)$ geometrisch durch eine ebene Kurve, so hängt die zweite Ableitung $f''(x)$ mit der „*Krümmung*“ der

Kurve in dem zur Abszisse x gehörenden Punkte zusammen; wir können hierauf genauer erst späterhin bei den geometrischen Anwendungen der Differentialrechnung eingehen. Bei der physikalischen Deutung einer Funktion $s = f(t)$ durch die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes (S. 22) kommen wir aber wenigstens für die *zweite* Ableitung $f''(t)$ wieder zu einem Elementarbegriffe der Physik zurück. Die erste Ableitung stellte die „Geschwindigkeit“ v des materiellen Punktes zur Zeit t dar (S. 100). Der Differenzenquotient:

$$\frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \frac{f'(t_1) - f'(t)}{t_1 - t},$$

in dessen Zähler die Geschwindigkeitsänderung während des zwischen t und t_1 liegenden Zeitintervalles steht, ergibt die *„mittlere Beschleunigung“* in diesem Zeitintervalle. Der Grenzwert dieses Differenzenquotienten, d. h. die zweite Ableitung $f''(t)$, bedeutet demnach *die „Beschleunigung“ der Bewegung zur Zeit t.*

Ist $f(x) = x^m$ mit einem konstanten Exponenten m, so ergibt die wiederholte Anwendung der „Potenzregel“:

$$f'(x) = mx^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)x^{m-2},$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, \quad \ldots,$$

und man findet leicht die Ableitung k^{ter} Ordnung:

(3) $$f^{(k)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)x^{m-k}.$$

Ist insbesondere m gleich einer positiven ganzen Zahl n, so ergibt sich speziell für $k = n$, d. h. für die Ableitung n^{ter} Ordnung, der konstante Wert $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$. Man bezeichnet das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n durch $n!$

(4) $$1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!$$

und liest dies Symbol n-Fakultät, so daß $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, .. ist. *Für die Funktion $f(x) = x^n$ mit positivem ganzzahligen Exponenten n ist die n^{te} Ableitung konstant gleich $n!$, und also sind alle weiteren Ableitungen konstant gleich* 0. Für eine rationale ganze Funktion n^{ten} Grades findet man hieraus leicht $n!\cdot a_n$ als Ableitung n^{ter} Ordnung, wenn a_n der Koeffizient der Potenz x^n ist; auch hier sind wieder alle Ableitungen höherer als n^{ter} Ordnung konstant gleich 0. Ist m eine negative ganze Zahl oder keine ganze Zahl, so ist keine höhere Ableitung konstant. Als Beispiel wähle man $m = -\frac{1}{2}$; die Gleichung (3) ergibt:

(5) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x})^{2k+1}}.$$

Soll die Funktion $f(x) = (a + bx)^m$ wiederholt differenziert werden, so muß man bei jedem Schritte nach der „Kettenregel“ (S. 122) verfahren, wobei für die „Hilfsvariable“ u:

$$u = a + bx, \quad \frac{du}{dx} = b$$

gilt und also nach jeder Differentiation in bezug auf u noch der Faktor b hinzuzusetzen ist. Man findet:

$$(6) \qquad \begin{aligned} f(x) &= (a + bx)^m, \\ f^{(n)}(x) &= m(m-1)\cdots(m-n+1)\cdot(a+bx)^{m-n}\cdot b^n. \end{aligned}$$

Da $f(x) = \ln(1 + x)$ als erste Ableitung $(1 + x)^{-1}$ hat, so findet man leicht durch Vermittlung von (6) oder auch unmittelbar:

$$(7) \qquad f(x) = \ln(1 + x), \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(1+x)^n}\cdot$$

Ist $f(x) = e^{\mu x}$, wo μ irgend eine Konstante ist, so dient $u = \mu x$ als Hilfsvariable, deren Ableitung nach x gleich μ ist. Die wiederholte Differentiation ergibt:

$$(8) \quad f(x) = e^{\mu x}, \quad f'(x) = \mu e^{\mu x}, \quad f''(x) = \mu^2 e^{\mu x}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = \mu^n e^{\mu x}.$$

Für die Funktion $f(x) = \sin x$ findet man:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x, \quad \ldots;$$

hier ist also $f^{(n)}(x)$ gleich $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, je nachdem die Ordnung n durch 4 geteilt den Rest 0, 1, 2 oder 3 läßt. Ähnliche Sätze stellt man leicht für die Funktionen $\cos x$, $\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Cos}\, x$ auf.

Gewöhnlich gestalten sich freilich die Rechnungen nicht ganz so einfach wie in den vorstehenden Beispielen. Man setze etwa $f(x) = \operatorname{tg} x$ und findet $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Bei den weiteren Differentiationen hat man dann $u = \operatorname{tg} x$ als Hilfsvariable zu benutzen, deren Ableitung in bezug auf x durch $\frac{du}{dx} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ gegeben ist. Für die niedersten Ordnungen ergeben sich folgende Ableitungen:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad f''(x) = 2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^3 x, \\
&f'''(x) = 2 + 8 \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg}^4 x, \quad f^{(4)}(x) = 16 \operatorname{tg} x + 40 \operatorname{tg}^3 x + 24 \operatorname{tg}^5 x, \\
&f^{(5)}(x) = 16 + 136 \operatorname{tg}^2 x + 240 \operatorname{tg}^4 x + 120 \operatorname{tg}^6 x, \\
&f^{(6)}(x) = 272 \operatorname{tg} x + 1232 \operatorname{tg}^3 x + 1680 \operatorname{tg}^5 x + 720 \operatorname{tg}^7 x, \\
&f^{(7)}(x) = 272 + 3968 \operatorname{tg}^2 x + 12096 \operatorname{tg}^4 x + 13440 \operatorname{tg}^6 x + 5040 \operatorname{tg}^8 x, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Man kann zwar auf induktivem Wege leicht zeigen, daß die n^{te} Ableitung von $\operatorname{tg} x$ eine rationale ganze Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades von $\operatorname{tg} x$ ist, die

nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen von $\operatorname{tg} x$ enthält, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Auch erkennt man ohne Mühe, daß die Koeffizienten dieser ganzen Funktion von $\operatorname{tg} x$ positive ganze Zahlen sind; jedoch ist das Gesetz, nach dem die Koeffizienten von der Ordnung n abhängen, nur durch eine ausführlichere Untersuchung festzustellen.

Aufgaben: Es sind bei folgenden Funktionen die angegebenen Ausdrücke der Ableitungen zu bestätigen:

1) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdots \frac{3n-2}{3} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^{3n+1}}$.

2) $f(z) = a \cdot 3^z + b \sin z$, $f^{(7)}(z) = a \cdot 3^z (\ln 3)^7 - b \cos z$.

3) $F(u) = a \sin mu + b \cos nu$, $F'''(u) = -am^3 \cos mu + bn^3 \sin nu$.

4) $f(x) = \arcsin x$, $f''(x) = \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$.

5) $\psi(v) = \operatorname{Cotg} v$, $\psi'''(v) = -2 + 8 \operatorname{Cotg}^2 v - 6 \operatorname{Cotg}^4 v$.

6) $f(z) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{z}{a}\right)$, $f''(z) = -\frac{2az}{(a^2+z^2)^2}$.

7) $\psi(x) = x \cdot e^{\sin x}$, $\psi''(x) = e^{\sin x}(x \cos^2 x - x \sin x + 2 \cos x)$.

8) $f(x) = x^x$, $f''(x) = x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1}$.

2. Die n^{te} Ableitung des Produktes zweier Funktionen. Die Verallgemeinerung der früheren Regeln über die Berechnung der Ableitung einer Summe, eines Produktes, einer zusammengesetzten Funktion usw. auf die Ableitungen höherer Ordnung führt zum Teil zu sehr einfachen Ergebnissen, nämlich bei den Summen und Differenzen, zum Teil steigert sich die Kompliziertheit der Formeln schnell mit wachsender Ordnung der Ableitung. Wenn wir z. B. die erste Ableitung der zusammengesetzten Funktion $f(x) = \varphi(\psi(x))$, welche nach (4) S. 122 die Gestalt hat:

$$f'(x) = \varphi'(\psi(x)) \cdot \psi'(x), \tag{1}$$

wiederholt differenzieren, so ist einerseits die Produktregel, andererseits die Kettenregel (1) immer wieder zu verwenden. Für die niedersten Ordnungen gewinnen wir:

$$f''(x) = \varphi'(\psi(x)) \cdot \psi''(x) + \varphi''(\psi(x)) \cdot (\psi'(x))^2,$$
$$f'''(x) = \varphi'(\psi(x)) \cdot \psi'''(x) + 3\varphi''(\psi(x)) \cdot \psi'(x)\psi''(x) + \varphi'''(\psi(x)) \cdot (\psi'(x))^3,$$
$$f^{(4)}(x) = \varphi'(\psi(x)) \cdot \psi^{(4)}(x) + 4\varphi''(\psi(x)) \cdot \psi'(x) \cdot \psi'''(x) + 3\varphi''(\psi(x)) \cdot (\psi''(x))^2$$
$$+ 6\varphi'''(\psi(x)) \cdot (\psi'(x))^2 \cdot \psi''(x) + \varphi^{(4)}(\psi(x)) \cdot (\psi'(x))^4,$$
$$\dots\dots\dots,$$

so daß hier in der Tat schon bei $n = 4$ eine ziemlich umständliche Entwicklung vorliegt.

Ein leicht übersehbares Ergebnis gewinnt man jedoch bei wiederholter Differentiation des Produktes $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ zweier Funktionen. Indem wir der Kürze halber die Argumente x der Funktionen in den Formeln fortlassen, finden wir durch wiederholte Anwendungen der Produktregel bei den niedersten Ordnungen:

$$\begin{aligned}
f' &= \varphi\psi' + \varphi'\psi,\\
f'' &= \varphi\psi'' + 2\varphi'\psi' + \varphi''\psi,\\
f''' &= \varphi\psi''' + 3\varphi'\psi'' + 3\varphi''\psi' + \varphi'''\psi,\\
f^{(4)} &= \varphi\psi^{(4)} + 4\varphi'\psi''' + 6\varphi''\psi'' + 4\varphi'''\psi' + \varphi^{(4)}\psi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Jede der angegebenen Ableitungen stellt sich als eine mit positiven ganzzahligen Koeffizienten versehene Summe von Produkten der Gestalt $\varphi^{(\lambda)} \cdot \psi^{(\mu)}$ dar, und zwar ist in der einzelnen Gleichung die Summe der Ordnungen $(\lambda + \mu)$ jedes Produktes gleich der Ordnung der dargestellten Ableitung von $f(x)$; bei Anordnung der Glieder nach ansteigenden Ordnungen λ des ersten Faktors bekommen das erste und das letzte Glied die Koeffizienten 1.

Das Schlußverfahren der vollständigen Induktion (S. 9) zeigt, daß diese Angaben für jede Ordnung n gültig bleiben. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, daß die n^{te} Ableitung $f^{(n)}$ sich als eine Summe der $(n+1)$ Produkte $\varphi\psi^{(n)}$, $\varphi'\psi^{(n-1)}$, $\varphi''\psi^{(n-2)}, \ldots, \varphi^{(n)}\psi$ darstelle, wobei das erste und letzte Produkt den Koeffizienten 1, die übrigen $(n-1)$ Produkte gewisse noch unbekannte positive ganzzahlige Koeffizienten bekommen. Bezeichnen wir die beim Produkte $\varphi^{(k)}\psi^{(n-k)}$ als Faktor auftretende positive ganze Zahl durch das Symbol $\binom{n}{k}$, so würde der Annahme gemäß $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$ zu setzen sein, und wir hätten im übrigen den Ansatz:

$$(2) \qquad f^{(n)} = \varphi\psi^{(n)} + \binom{n}{1}\varphi'\psi^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{k}\varphi^{(k)}\psi^{(n-k)} + \cdots + \varphi^{(n)}\psi.$$

Indem wir jetzt noch einmal differenzieren und in jedem Gliede die Produktregel anwenden, folgt bei zweckmäßiger Anordnung:

$$f^{(n+1)} = \varphi\psi^{(n+1)} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right)\varphi'\psi^{(n)} + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right)\varphi''\psi^{(n-1)} + \cdots + \varphi^{(n+1)}\psi.$$

Die hier als Koeffizienten auftretenden Summen je zweier positiver ganzer Zahlen stellen wieder positive ganze Zahlen dar. Gilt also das Gesetz (2) bei irgend einer Ordnung n, so gilt es auch noch bei der nächst folgenden Ordnung $(n+1)$. Da das Gesetz nun bis $n = 4$ oben

wirklich festgestellt wurde, so gilt es nach unserem Schlußverfahren allgemein.

Schreiben wir übrigens die Koeffizienten für die $(n+1)^{\text{te}}$ Ordnung nach Analogie des Ansatzes (2) in der Gestalt $\binom{n+1}{0}=1, \binom{n+1}{1}, \binom{n+1}{2}, \cdots,$ so zeigt die letzte Gleichung, daß

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1}, \quad \binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}, \quad \binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\binom{n+1}{3}, \ldots$$

oder allgemein geschrieben:

$$(3) \qquad \binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}, \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

gültig ist. Hiermit haben wir eine „*Rekursionsformel*" gewonnen, um die Koeffizienten in der Entwicklung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ableitung von $f(x)$ aus denen der n^{ten} Ableitung zu berechnen. An (3) reihen wir gleich noch die weitere Beziehung an:

$$(4) \qquad \binom{n}{n-k}=\binom{n}{k},$$

welche lehrt, daß auf der rechten Seite von (2) zwei Koeffizienten, die gleich weit vom Anfang und Ende abstehen, einander gleich sind. Dieses in den obigen Formeln für die niedersten n unmittelbar hervortretende Gesetz folgt leicht aus dem Umstande, daß f bei Austausch von φ und ψ unverändert bleibt, und daß demnach dasselbe von $f^{(n)}$ gelten muß. Man kann aber auch wieder mit dem Schlusse der vollständigen Induktion vorgehen, indem man mittelst der Rekursionsformel (3) zeigt, daß das Gesetz (4) auch noch für $(n+1)$ gilt, wenn es für n zutrifft.

Es ist übrigens sehr leicht, auch unmittelbar eine Rechenvorschrift anzugeben, mittelst deren man die ganze positive Zahl $\binom{n}{k}$ aus n und k berechnen kann. Wir setzen zu diesem Ende in (2) die besonderen Funktionen $\varphi(x)=x^k$, $\psi(x)=x^{n-k}$ mit dem Produkte $f(x)=x^n$ ein. Nach den Darlegungen von S. 133 gilt dann:

$$f^{(n)}(x)=n!, \quad \varphi^{(k)}(x)=k!, \quad \psi^{(n-k)}(x)=(n-k)!,$$

während alle weiteren Ableitungen $\varphi^{(k+1)}(x)$, $\varphi^{(k+2)}(x)$, ... und ebenso $\psi^{(n-k+1)}(x)$, $\psi^{(n-k+2)}(x)$, ... konstant gleich 0 sind. Die Folge ist, daß auf der rechten Seite von (2) nur das einzige von 0 verschiedene Glied $\binom{n}{k}\cdot k!\cdot(n-k)!$ auftritt, während die linke Seite gleich $n!$ ist. *Als Ausdruck der ganzen positiven Zahl $\binom{n}{k}$ in n und k ergibt sich demnach:*

$$(5) \qquad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{oder} \qquad \binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}.$$

Die Richtigkeit der Relationen (3) und (4) kann man jetzt auch unmittelbar am Ausdrucke (5) leicht bestätigen.

Zu einem sehr bekannten Spezialfalle der Regel (2) gelangen wir, wenn wir $\varphi(x) = e^{bx}$, $\psi(x) = e^{ax}$ und also $f(x) = e^{(a+b)x}$ setzen. Nach Gleichung (8) S. 134 findet man in diesem Falle:

$$f^{(n)}(x) = (a+b)^n e^{(a+b)x} = (a+b)^n \cdot e^{ax} \cdot e^{bx}.$$

$$\psi^{(k)}(x) = b^k \cdot e^{bx}, \quad \psi^{(n-k)}(x) = a^{n-k} \cdot e^{ax}.$$

Die fertig entwickelte Gleichung (2) ist dann durch $e^{ax} \cdot b^{bx}$ hebbar und liefert nach dieser Kürzung:

$$(6) \quad (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{a}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + b^n.$$

Diese Gleichung bringt den *„binomischen Lehrsatz“* zum Ausdruck, so daß wir in $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\cdots$, $\binom{n}{n} = 1$ *die „Binomialkoeffizienten“ der n^{ten} Potenz* wiedererkennen.

Wir haben damit das endgültige Ergebnis gewonnen: *Die Ableitung n^{ter} Ordnung eines Produktes $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ zweier Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ berechnet man auf Grund der Regel (2), in welcher die positiven ganzen Zahlen $\binom{n}{k}$ die Binomialkoeffizienten der n^{ten} Potenz sind.*

3. Die Differenzenquotienten höherer Ordnung und ihre Grenzwerte. Der S. 102 als „Differenz der Funktion“ bezeichnete Ausdruck:

$$(1) \qquad \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

welcher die Änderung der Funktion $f(x)$ bei Änderung des Argumentes x um Δx angibt, ist als eine von den beiden unabhängigen Argumenten x und Δx abhängende Größe anzusehen.[1]) Ändern wir bei festgehaltenem Δx das Argument x dieser Funktion $\Delta f(x)$ nochmals um den gleichen Betrag Δx, so gelangen wir zur „Differenz der Funktion $\Delta f(x)$“, die wir auch durch $\Delta(\Delta f(x))$ oder abgekürzt durch $\Delta^2 f(x)$ bezeichnen und als *„Differenz zweiter Ordnung“* oder als *„zweite Differenz“* von $f(x)$ benennen. Man findet aus (1):

$$\Delta(\Delta f(x)) = \Delta^2 f(x) = (f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)) - (f(x + \Delta x) - f(x))$$

oder unter Zusammenfassung zweier Glieder:

$$(2) \qquad \Delta^2 f(x) = f(x + 2\Delta x) - 2 f(x + \Delta x) + f(x).$$

---

1) Wir denken x und Δx so gewählt, daß alle hier und weiterhin herangezogenen Argumente von f in dem Intervalle liegen, in welchem wir die Funktion f erklärt annehmen.

Auch diese „zweite Differenz" ist eine Funktion von x und Δx, und es erscheint demnach möglich, die Änderung dieser Funktion $\Delta^2 f(x)$ bei Änderung von x um das gleiche Δx ebenfalls wieder herzustellen. Wir gelangen so zur Differenz $\Delta(\Delta^2 f(x))$, die wir abgekürzt $\Delta^3 f(x)$ schreiben und *„Differenz dritter Ordnung"* oder *„dritte Differenz"* von $f(x)$ nennen. Indem wir auf der rechten Seite der letzten Gleichung $x + \Delta x$ an Stelle von x eintragen und davon die rechte Seite dieser Gleichung abziehen, folgt:

$$(3) \quad \Delta^3 f(x) = f(x + 3\Delta x) - 3f(x + 2\Delta x) + 3f(x + \Delta x) - f(x).$$

Man kann in der gleichen Weise fortfahren und die Differenzen $\Delta^4 f(x)$, $\Delta^5 f(x)$, ..., allgemein die *„Differenz n^{ter} Ordnung"* oder die *„n^{te} Differenz"* $\Delta^n f(x)$ der Funktion $f(x)$ erklären. *Der ausführliche Ausdruck der Differenz n^{ter} Ordnung von $f(x)$ ist:*

$$(4) \quad \Delta^n f(x) = f(x + n\Delta x) - \binom{n}{1} f(x + (n-1)\Delta x) + \binom{n}{2} f(x + (n-2)\Delta x) - \cdots + (-1)^n f(x),$$

wo die Glieder alternierend das positive und negative Zeichen haben und übrigens die Binomialkoeffizienten sich wieder einfinden. Man zeigt leicht mit Hilfe der Rekursionsformel (3), S. 137, daß, wenn diese Darstellung (4) bei einer *beliebigen* Ordnung n gültig ist, sie auch noch für die nächst folgende Ordnung $(n + 1)$ richtig bleibt. Da sie nun zufolge (1), (2) und (3) für die niedersten Ordnungen gilt, so ergibt sich durch den Schluß der vollständigen Induktion die allgemeine Gültigkeit des Gesetzes (4).

Wir nehmen nun weiter an, daß die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle, das der Betrachtung zugrunde liegen mag, den Bedingungen des *„Mittelwertsatzes"*, eindeutig und stetig zu sein und eine endliche Ableitung $f'(x)$ zu besitzen, genügt; auch soll die gleiche Voraussetzung für $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ zutreffen. Die Gleichung (9) S. 129 des Mittelwertsatzes stellt eine Beziehung:

$$(5) \quad \Delta f(x) = \Delta x \cdot f'(x + \vartheta_1 \cdot \Delta x), \qquad 0 < \vartheta_1 < 1$$

zwischen der Differenz erster Ordnung von $f(x)$ und der ersten Ableitung dieser Funktion dar. Wir wollen versuchen, für die Differenzen höherer Ordnung von $f(x)$ entsprechende Beziehungen zu den höheren Ableitungen aufzustellen. Es werde:

$$F(x) = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

bei *konstantem* Δx als Funktion von x betrachtet und in bezug auf dieses

Argument differenziert. Dabei ist für das Glied $f(x+\Delta x)$ die Hilfsvariable $u = x + \Delta x$ mit der Ableitung $\frac{du}{dx} = 1$ zu benutzen; es ergibt sich:

$$F'(x) = \frac{d(\Delta f(x))}{dx} = f'(x+\Delta x) - f'(x) = \Delta f'(x).$$

Bilden wir diese Gleichung für irgend ein Argument x_1, und benutzen wir für die Entwicklung der dem bisherigen Δx entsprechenden Änderung $\Delta f'(x_1)$, wie die Voraussetzungen gestatten, wieder den Mittelwertsatz, so folgt:

(6) $$F'(x_1) = \Delta x \cdot f''(x_1 + \vartheta \cdot \Delta x), \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Andrerseits ist zufolge der Erklärung von $F(x)$ die Anwendung des Mittelwertsatzes auch unmittelbar auf $F(x)$ statthaft und ergibt für das bisherige Δx:

$$\Delta F(x) = \Delta^2 f(x) = \Delta x \cdot F'(x + \vartheta' \cdot \Delta x), \quad 0 < \vartheta' < 1.$$

Verstehen wir demnach unter x_1 in Gleichung (6) den Wert $(x + \vartheta' \cdot \Delta x)$, so folgt:

$$F'(x + \vartheta' \cdot \Delta x) = \Delta x \cdot f''(x + (\vartheta + \vartheta') \cdot \Delta x).$$

Setzt man $\vartheta + \vartheta' = 2\vartheta_2$, so ist auch ϑ_2, d. h. das arithmetische Mittel zwischen ϑ und ϑ', zwischen 0 und 1 gelegen. *Für die Differenz zweiter Ordnung aber ergibt sich als Beziehung zur Ableitung zweiter Ordnung von* $f(x)$:

(7) $$\Delta^2 f(x) = (\Delta x)^2 \cdot f''(x + 2\vartheta_2 \cdot \Delta x), \qquad 0 < \vartheta_2 < 1.$$

Da im Laufe der vorstehenden Entwicklung für $\Delta f'(x)$ der Mittelwertsatz in Anspruch genommen wurde, *so gilt die Relation* (7) *unter der Voraussetzung, daß* $f(x)$ *und* $f'(x)$ *den Bedingungen dieses Satzes genügen.*

Wir nehmen nun an, daß $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-2)}(x)$ den Bedingungen des Mittelwertsatzes genügen, und daß die Relation:

(8) $$\Delta^{n-1} f(x) = (\Delta x)^{n-1} \cdot f^{(n-1)}(x + (n-1)\vartheta_{n-1} \cdot \Delta x), \quad 0 < \vartheta_{n-1} < 1$$

bereits bewiesen sei. Fassen wir bei feststehendem Δx die Differenz $\Delta^{n-1} f(x)$ als Funktion $F(x)$ von x auf, so zeigt die in der allgemeinen Regel (4) gegebene Entwicklung von $F(x)$, daß:

$$F'(x) = \frac{d(\Delta^{n-1} f(x))}{dx} = \Delta^{n-1} f'(x)$$

ist. Die rechte Seite können wir unter der Voraussetzung, daß auch noch die $(n-2)^{\text{te}}$ Ableitung von $f'(x)$, d. h. die Ableitung $f^{(n-1)}(x)$, die Bedingungen des Mittelwertsatzes erfüllt, nach der Regel (8) entwickeln, und schreiben für irgend ein selbstverständlich dem zugrunde liegenden Intervalle angehörendes Argument x_1:

(9) $$F'(x_1) = (\Delta x)^{n-1} \cdot f^{(n)}(x_1 + (n-1)\vartheta \cdot \Delta x), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

wo $\varDelta x$ den bisherigen Wert hat und ϑ natürlich nicht mit dem in (6) so bezeichneten echten Bruche gleich zu sein braucht. Da übrigens auch das jetzige $F(x)$ den Bedingungen des Mittelwertsatzes genügt, so ergibt sich:

$$\varDelta F(x) = \varDelta^n f(x) = \varDelta x \cdot F'(x + \vartheta' \cdot \varDelta x), \quad 0 < \vartheta' < 1.$$

Tragen wir also $x_1 = x + \vartheta' \cdot \varDelta x$ in (9) ein und erklären den echten positiven Bruch ϑ_n, durch $(n-1)\vartheta + \vartheta' = n\vartheta_n$, so folgt:

$$\varDelta^n f(x) = (\varDelta x)^n \cdot f^{(n)}(x + n\vartheta_n \cdot \vartheta x), \qquad 0 < \vartheta_n < 1 \tag{10}$$

als Beziehung zwischen der Differenz n^{ter} Ordnung und der n^{ten} Ableitung, wobei über die Bedingungen der Gültigkeit der Gleichung (8) hinaus noch hinzugekommen ist, *daß auch $f^{(n-1)}(x)$ den Bedingungen des Mittelwertsatzes genügen muß.*

Da wir für $n = 1$ und $n = 2$ die Regel (10) bewiesen haben, so ist der Schluß der vollständigen Induktion vollziehbar und ergibt: *Ist die Funktion $f(x)$ mit ihren Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ im zugrunde liegenden Intervalle eindeutig und stetig und ist auch die n^{te} Ableitung daselbst überall bestimmt und endlich, so gilt für die Differenz n^{ter} Ordnung $\varDelta^n f(x)$ die Darstellung* (10) *in der n^{ten} Ableitung.*

Die Differenz der Funktion x^n möge stets durch $\varDelta(x^n)$ bezeichnet werden. Es ist dann statthaft, die n^{te} Potenz $(\varDelta x)^n$ der „Differenz $\varDelta x$ des Argumentes“ kurz durch $\varDelta x^n$ zu bezeichnen. Wir geben nun folgende Erklärung ab: *Der Quotient der Differenz n^{ter} Ordnung $\varDelta^n f(x)$ der Funktion $f(x)$ und der n^{ten} Potenz $\varDelta x$ der Differenz des Argumentes heiße „Differenzenquotient n^{ter} Ordnung“ oder kurz „n^{ter} Differenzenquotient“ von $f(x)$; für diesen Quotienten gilt zufolge* (10) *die Darstellung:*

$$\frac{\varDelta^n f(x)}{\varDelta x^n} = f^{(n)}(x + n\vartheta_n \cdot \varDelta x), \qquad 0 < \vartheta_n < 1 \tag{11}$$

durch die n^{te} Ableitung von $f(x)$.

Wir nehmen nun an, daß die n^{te} Ableitung von $f(x)$ in dem zugrunde liegenden Intervalle, dem mit $x, x + \varDelta x, \ldots, x + n \cdot \varDelta x$ auch $(x + n\vartheta_n \cdot \varDelta x)$ angehört, gleichfalls stetig sei. Dann hat für $\lim \varDelta x = 0$ die rechte Seite der Gleichung (11) einen Grenzwert, nämlich $f^{(n)}(x)$. Damit haben wir die Verallgemeinerung eines S. 102 gewonnenen Satzes erhalten: *Ist $f(x)$ im Intervalle eindeutig und stetig, und existieren die Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, welche daselbst gleichfalls eindeutig und stetig sind, so gilt:*

$$\lim_{\varDelta x = 0} \frac{\varDelta^n f(x)}{\varDelta x^n} = f^{(n)}(x), \tag{12}$$

es hat also der Differenzenquotient n^{ter} Ordnung, falls wir bei stehendem

x den Grenzübergang lim $\Delta x = 0$ *vollziehen, einen Grenzwert, und zwar ist dieser Grenzwert die n^{te} Ableitung $f^{(n)}(x)$.*

4. Die Differentiale und die Differentialquotienten höherer Ordnung. Nähert sich Δx als variable Größe von der einen oder anderen Seite her der Grenze 0, so hatten wir S. 101 statt Δx auch dx geschrieben und $\Delta x = dx$ als ein „*Differential*" bezeichnet. Wir sagten in diesem Falle, dx „werde unendlich klein", und nannten das Differential auch kurz eine „*unendlich kleine Größe*". Mit dem Differential dx sind auch dessen Potenzen, die wir statt der ausführlicheren Schreibweise $(dx)^2$, $(dx)^3, \ldots$ kurz durch $dx^2, dx^3, \ldots$ bezeichnen, „*variable, unendlich klein werdende Größen*", d. h. veränderliche Größen, die zugleich mit dx der Grenze 0 sich nähern. Aber die Art, in der sich die einzelne dieser Potenzen dx^m der Grenze 0 nähert, ist verschieden von der Art, die bei jeder anderen Potenz dx^n vorliegt. Es ist nämlich, je nachdem $m > n$ oder $m < n$ zutrifft, zu setzen:

$$(1) \qquad \frac{dx^m}{dx^n} = dx^{m-n} \quad \text{oder} \quad \frac{dx^m}{dx^n} = \frac{1}{dx^{n-m}},$$

wo beide Male der rechts stehende Exponent von dx eine *positive* ganze Zahl ist. Hieraus geht hervor, *daß sich der Quotient $dx^m : x^n$ der Grenze 0 oder der Grenze ∞ nähert, je nachdem $m > n$ oder $m < n$ zutrifft.*

Um dieses verschiedenartige Verhalten der Potenzen von dx durch einen Namen zu charakterisieren, sagt man, *dx^n werde im Vergleich zu dx „unendlich klein von der n^{ten} Ordnung"*, wobei also dx selbst als *„unendlich klein von der ersten Ordnung"* zu bezeichnen sein würde. Der über die Quotienten der Potenzen von dx soeben ausgesprochene Satz lehrt dann, *daß die unendlich kleine Größe m^{ter} Ordnung dx^m „unendlich klein" im Vergleich zu jeder Größe dx^n „niederer" Ordnung n wird, aber „unendlich groß" im Vergleich zu jeder unendlichen kleinen Größe dx^n „höherer" Ordnung n.*

Wir denken nun in irgend einem Intervalle eine eindeutige und stetige Funktion $y = f(x)$ gegeben, welche daselbst eindeutige und stetige Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots$ jedenfalls bis zu irgend einer bestimmten Ordnung hin haben möge. Ist n eine dieser Ordnungen, so gelte folgende an einen Satz von S. 102 sich anschließende Erklärung. *Als das zum Argumente x und zum Differential dx der unabhängigen Variablen gehörende „Differential n^{ter} Ordnung" oder „n^{te} Differential der Funktion" $d^n y = d^n f(x)$ bezeichnen wir das Produkt:*

$$(2) \qquad d^n y = d^n f(x) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$$

der n^{ten} Ableitung $f^{(n)}(x)$ und der n^{ten} Potenz dx^n des Differentials dx. Wie das S. 102 eingeführte „erste" Differential der Funktion, so hängt

auch $d^n y = d^n f(x)$ von *zwei* Größen, nämlich von x und dx ab. Auch bei festgehaltenem x ist also $d^n y = d^n f(x)$ noch eine *variable* Größe. Nehmen wir an, daß $f^{(n)}(x)$ bei dem gewählten und zunächst festgehaltenen x einen endlichen und von 0 verschiedenen Wert hat, so wird $d^n y = d^n f(x)$ mit dx unendlich klein, und zwar in der Art, daß der Quotient von $d^n y = d^n f(x)$ und der unendlich kleinen Größe n^{ter} Ordnung dx^n den *endlichen, nicht verschwindenden Wert* $f^{(n)}(x)$ hat. Wir sagen dieserhalb, *das Differential n^{ter} Ordnung $d^n y = d^n f(x)$ der Funktion $y = f(x)$ werde im Vergleich zu dx unendlich klein von n^{ter} Ordnung.*

Den eben genannten Quotienten des Differentials n^{ter} Ordnung der Funktion $y = f(x)$ und der n^{ten} Potenz des Differentials dx nennt man *Differentialquotienten n^{ter} Ordnung*" oder kurz „*n^{ten} Differentialquotienten*" der Funktion $f(x)$. Zufolge der Erklärung von $d^n y = d^n f(x)$ ist *der Differentialquotient n^{ter} Ordnung von $f(x)$ gleich der n^{ten} Ableitung:*

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x). \tag{3}$$

Die Beziehung zwischen der Differenz n^{ter} Ordnung $\Delta^n y = \Delta^n f(x)$ und dem Differential derselben Ordnung $d^n y = d^n f(x)$ gestaltet sich bei beliebigem n genau so wie bei $n = 1$ (vgl. S. 103). Bei stehendem Werte x gilt zunächst:

$$\lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} - f^{(n)}(x)\right) = \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} - \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Nehmen wir demnach die beiden variablen, der Grenze 0 sich nähernden Größen Δx und dx einander gleich, so folgt:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta^n y - d^n y}{\Delta x^n} = 0. \tag{4}$$

Ist die endliche Größe $f^{(n)}(x)$ von 0 verschieden, so gilt dasselbe von $d^n y$, und wir finden aus (4) durch Division mit $d^n y$:

$$\lim_{\Delta x = 0}\left(\left(\frac{\Delta^n y}{d^n y} - 1\right)\frac{d^n y}{dx^n}\right) = f^{(n)}(x) \cdot \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta^n y}{d^n y} - 1\right) = 0,$$

so daß sich wegen $f^{(n)}(x) \neq 0$:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta^n y}{d^n y} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta^n f(x)}{d^n f(x)} = 1 \tag{5}$$

ergibt: *Nähert sich $\Delta x = dx$ der Grenze 0, so wird der Unterschied zwischen der „Differenz n^{ter} Ordnung" $\Delta^n y = \Delta^n f(x)$ und dem „Differential gleicher Ordnung" $d^n y = d^n f(x)$ im Vergleich zu $\Delta x^n = dx^n$ unendlich klein, so daß insbesondere bei einem nicht-verschwindenden Werte $f^{(n)}(x)$ der Quotient $\Delta^n y : d^n y$ für* lim $\Delta x = 0$ *den Grenzwert* 1 *hat.*

Aufgaben: Es sind folgende Gleichungen zu beweisen:

1) $\dfrac{d^4(x^2e^x)}{dx^4} = (x^2+8x+12)e^x.$

2) $\dfrac{d^n(y^3e^{ay})}{dy^n} = \big((ay)^3+3n(ay)^2+3n(n-1)ay+n(n-1)(n-2)\big)e^{ay}a^{n-3}.$

3) $\dfrac{d^2 \arcsin x}{dx^2} = \dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

4) $\dfrac{d^3 e^{a+bz+cz^2}}{dz^3} = e^{a+bz+cz^2}\big((b^3+6bc)+6c(b^2+2c)z+12bc^2z^2+8c^3z^3\big).$

5) $\dfrac{d^4 \sin(5t-1)}{dt^4} = 625 \sin(5t-1).$

6) $\dfrac{d^2\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^2} = x^{\frac{1}{x}-4}((1-3x)+2(x-1)\ln x+(\ln x)^2).$

7) $\dfrac{d^3(u^n\cdot\cos u)}{du^3} = (u^2-3n(n-1))u^{n-2}\sin u-(3u^2-(n-1)(n-2))nu^{n-3}\cos u.$

8) $\dfrac{d^n(x^2\cdot\ln x)}{dx^n} = (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2\cdot(n-3)!}{x^{n-2}}, \qquad (n>2).$

9) $\dfrac{d^n(\sqrt{1+y})}{dy^n} = (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdots\dfrac{2n-3}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{(\sqrt{1+y})^{2n-1}}, \qquad (n>1).$

10) $\dfrac{d^3\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x}{dx^3} = \dfrac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}.$

Kapitel III. **Differentiation der Funktionen mehrerer Variablen.**

1. Die Ableitungen und Differentiale erster Ordnung der Funktionen mehrerer Veränderlichen. Es seien jetzt zwei unabhängige Variable x, y vorgelegt, deren Wertepaare wir nach S. 89 durch die Punkte der „Zahlenebene" deuten. In irgend einem „Bereiche" dieser Ebene sei eine Funktion $z=f(x,y)$ gegeben, die daselbst eindeutig, endlich und im Sinne der Erklärung von S. 90 stetig sein möge. Halten wir y fest, so wird $z=f(x,y)$ dadurch zu einer Funktion von x allein, erklärt für diejenigen x, welche mit jenem y Punkte (x,y) des Bereiches liefern. Von dieser Funktion, die offenbar wieder von x eindeutig und stetig abhängt, nehmen wir nun an, daß sie beim einzelnen x eine Ableitung in bezug auf x besitze. Wir sagen dann, *die Funktion $z=f(x,y)$ habe im Punkte (x,y) eine „partielle" Ableitung in bezug auf ihr erstes Argument x, und wollen diese bei stehendem y in bezug auf x oder „nach" x berechnete Ableitung durch $f'_x(x,y)$ bezeichnen*[1]. Ist die Funktion $z=f(x,y)$, bei stehen-

1) Man gebraucht auch die Bezeichnungen $f_x(x,y)$ oder $f_1(x,y)$; doch halten wir an der im Texte genannten Schreibweise der partiellen Ableitungen fest.

dem x als Funktion von y betrachtet, differenzierbar, *so gelangen wir entsprechend im Punkte* (x, y) *zu einer „partiellen" Ableitung* $f'_y(x, y)$ *von* $f(x, y)$ *in bezug auf das zweite Argument* y *oder kurz „nach"* y. Im Gegensatze zu den Ergebnissen wiederholter Differentiationen heißen $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ *die partiellen Ableitungen „erster Ordnung"* von $f(x, y)$.

Es gelte die Annahme, *daß die Funktion* $z = f(x, y)$ *im Bereiche ihrer Erklärung überall endliche partielle Ableitungen erster Ordnung besitze.* Diese Voraussetzung trifft jedenfalls bei unseren elementaren Funktionen zu; ist z. B.

$$f(x, y) = ax^3y^2 - 2\sin(bx + cy) + \ln y,$$

so findet man leicht:

$$f'_x(x,y) = 3ax^2y^2 - 2b\cos(bx + cy),\quad f'_y(x,y) = 2ax^3y - 2c\cos(bx + cy) + \frac{1}{y}\cdot$$

Im Anschluß an S. 102 sind dann weiter folgende Erklärungen zu geben. *Zum Punkte* (x, y) *und dem Differential* dx *des ersten Argumentes* x *gehört ein „partielles Differential" der Funktion* $z = f(x, y)$ *in bezug auf* x *oder nach* x, *welches das Produkt der partiellen Ableitung* $f'_x(x, y)$ *und des Differentials* dx *ist; dieses Differential wird durch* $\partial_x z$ *oder* $\partial_x f(x, y)$ *bezeichnet und ist der Erklärung gemäß gegeben durch:*

(1) $$\partial_x z = \partial_x f(x, y) = f'_x(x, y)\cdot dx.$$

Entsprechend ist das „partielle Differential in bezug auf y*" gegeben durch:*

(2) $$\partial_y z = \partial_y f(x, y) = f_y'(x, y)\cdot dy.$$

Der Quotient eines dieser beiden Differentiale und des Differentials der in Betracht kommenden unabhängigen Variablen heißt ein *„partieller Differentialquotient"*. Im Zähler läßt man den Index x oder y am Differentialzeichen ∂ fort, da aus dem Nenner bereits ersichtlich ist, nach welchem Argumente zu differenzieren ist. Der Gleichmäßigkeit wegen bedient man sich auch im Nenner statt des bisherigen d des *„Symbols* ∂ *der partiellen Differentiation"*. Die partiellen Differentialquotienten schreiben sich also:

(3) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

und sind zufolge (1) und (2) gleich den partiellen Ableitungen:

(4) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x'(x, y),\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y'(x, y),$$

so daß wir die Gleichungen (1) und (2) auch so schreiben können:

(5) $$\partial_x z = \partial_x f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx,\qquad \partial_y z = \partial_y f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy.$$

Auf die partiellen Differentiale unserer Funktionen gründet sich weiter die folgende Begriffsbestimmung: *Unter dem zum Punkte* (x, y) *und den Differentialen* dx *und* dy *der Argumente gehörenden „vollständigen" oder „totalen Differentiale"* $dz = df(x, y)$ *der Funktion* $z = f(x, y)$ *verstehen wir die Summe der beiden partiellen Differentiale, die den* dx *und* dy *einzeln entsprechen:*

$$(6) \qquad dz = \partial_x z + \partial_y z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

oder in $f(x, y)$ *geschrieben:*

$$(7) \quad df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = f_x'(x, y)\, dx + f_y'(x, y)\, dy.$$

Dieses totale Differential ist von den *vier* Variablen x, y, dx, dy abhängig, wobei natürlich dx und dy (ebenso wie x und y) voneinander unabhängig variabel sind. Ist z. B.

$$z = e^x \operatorname{arc\,tg} y + 3y^5 \cdot \ln x,$$

so berechnet sich das totale Differential in der Gestalt:

$$dz = \left(e^x \operatorname{arc\,tg} y + 3y^5 \cdot \frac{1}{x}\right) dx + \left(\frac{e^x}{1+y^2} + 15y^4 \cdot \ln x\right) dy.$$

Entsprechend dem bisherigen Brauche bezeichnen wir mit Δx und Δy zwei Änderungen, die wir nach Bedarf auch als konstant ansehen dürfen. Wir nennen Δx und Δy „Differenzen der Argumente" und bezeichnen die ihnen entsprechende Änderung:

$$(8) \qquad \Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

von $f(x, y)$ als *„Differenz der Funktion"*. Es ist zu untersuchen, ob für $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ vielleicht wieder eine nahe Beziehung zwischen der Differenz Δz und dem Differential dz vorliegt. Schreiben wir abkürzend $y + \Delta y = y_1$, so läßt sich die Differenz (8) in folgender Art entwickeln:

$$(9) \qquad \Delta z = (f(x + \Delta x, y_1) - f(x, y_1)) + (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)).$$

Nun sollte $f(x, y)$ im zugrunde liegenden Bereiche endliche partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Es wird somit $f(x, y_1)$, bei stehendem y_1 als Funktion von x betrachtet, in dem von x und $(x + \Delta x)$ eingegrenzten Intervalle den Bedingungen des Mittelwertsatzes genügen, so daß wir die in (9) rechter Hand in der ersten Klammer stehende Differenz so entwickeln können:

$$f(x + \Delta x, y_1) - f(x, y_1) = \Delta x \cdot f_x'(x + \vartheta \cdot \Delta x, y_1), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Ebenso finden wir für die zweite Klammer in (9):

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \cdot f_y'(x, y + \vartheta' \cdot \Delta y), \quad 0 < \vartheta' < 1,$$

so daß wir für die „Differenz der Funktion" die neue Darstellung:

$$(10) \quad \Delta f(x, y) = f_x'(x + \vartheta \cdot \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x + f_y'(x, y + \vartheta' \cdot \Delta y) \cdot \Delta y$$

gewinnen. Es gelte nun die weitere Annahme, *daß die partiellen ersten Ableitungen $f_x'(x, y)$ und $f_y'(x, y)$ im Bereiche der Erklärung der Funktion $f(x, y)$ „stetige" Funktionen im Sinne von* S. 90 *seien*, was bei unseren elementaren Funktionen immer zutrifft. Beziehen wir die Gleichung (10) auf veränderliche Werte Δx und Δy, so werden sich zwar die ϑ, ϑ' dabei irgendwie mit ändern, aber sie bleiben doch stets zwischen 0 und 1 gelegen. Nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl $\delta > 0$ wird demnach immer eine positive Zahl λ existieren von der Art, daß:

$$|f_x'(x + \vartheta \cdot \Delta x, y + \Delta y) - f_x'(x, y)| < \delta, \quad |f_y'(x, y + \vartheta' \cdot \Delta y) - f_y'(x, y)| < \delta$$

zutrifft, sobald Δx und Δy der Bedingung $+\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leqq \lambda$ genügen. Daraus aber ergibt sich, wenn wir nunmehr $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ setzen und mit $df(x, y)$ das zugehörige totale Differential bezeichnen:

$$(11) \qquad |\Delta f(x, y) - df(x, y)| < \delta(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

Wir können dieses Ergebnis vorerst nur dahin aussprechen, *daß für Werte $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, welche dem Werte* 0 *„ausreichend" nahe sind, der Unterschied zwischen der Differenz $\Delta f(x, y)$ und dem Differential $df(x, y)$ im Vergleich zum Betrage $(|\Delta x| + |\Delta y|)$ „beliebig" klein gemacht werden kann.* Wir kommen auf die Deutung und Verwertung dieses höchst wichtigen Ergebnisses im Laufe der nächsten Paragraphen zurück.

Zunächst bemerken wir, daß sich die vorstehenden Entwicklungen ohne Mühe auf Funktionen beliebig vieler unabhängiger Variablen übertragen lassen. Ist $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion der n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so wollen wir vorerst eine einzige unter ihnen, etwa x_k, als variabel ansehen, die übrigen $(n - 1)$ Argumente aber festhalten. Hat y in diesem Falle als Funktion von x_k eine Ableitung, so nennen wir dieselbe die *„partielle Ableitung erster Ordnung von $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in bezug auf x_k"* oder *„nach x_k"* und bezeichnen sie durch $f_{x_k}'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; das zugehörige *„partielle Differential"* aber erklären wir durch:

$$(12) \qquad \partial_{x_k} y = \partial_{x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{x_k}'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot dx_k,$$

während wir für den *„partiellen Differentialquotienten" nach x_k* die Gleichung haben:

$$(13) \qquad \frac{\partial y}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_k} = f_{x_k}'(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Das zum „Punkte" $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und den n Differentialen $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ gehörende *„vollständige"* oder *„totale Differential"* der Funktion erklären wir wie im Falle $n = 2$ als *Summe aller n partiellen Differentiale:*

$$(14) \qquad dy = df(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Den n „*Differenzen*“ $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ der Argumente gehört als „*Differenz der Funktion*“:

$$(15) \qquad \Delta y = \Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

zu. Genau wie im Falle $n = 2$ können wir die rechte Seite durch Zusatz und Abzug der Glieder $f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots), f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots), \ldots$ in die Summe von n Differenzen verwandeln, die sich einzeln nach dem Mittelwertsatze umgestalten lassen. Die Differenz der Funktion nimmt damit die Gestalt an:

$$\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'_{x_1}(x_1 + \vartheta_1 \cdot \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots) \cdot \Delta x_1 + f'_{x_2}(x_1, x_2 + \vartheta_2 \cdot \Delta x_2, \ldots) \cdot \Delta x_2$$
$$+ \cdots + f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n + \vartheta_n \cdot \Delta x_n) \cdot \Delta x_n.$$

Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen erster Ordnung vorausgesetzt, gilt dann wieder für ausreichend kleine $\Delta x_k = dx_k$ entsprechend (11) die Ungleichung:

$$(16) \quad |\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - df(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \delta(|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \cdots + |\Delta x_n|).$$

Aufgaben: Für folgende Funktionen sind die partiellen Ableitungen oder die totalen Differentiale zu berechnen:

1) $z = ax^3y - \frac{7y}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 3ax^2y + \frac{7y}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ax^3 - \frac{7}{x}.$

2) $f(u, v) = 5Av + B\sin(3u + 7v), \quad f'_u = 3B\cos(3u + 7v),$
$f'_v = 5A + 7B\cos(3u + 7v).$

3) $w = s^n - a \cdot e^{t-3s}, \quad \frac{\partial w}{\partial s} = ns^{n-1} + 3ae^{t-3s}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -a \cdot e^{t-3s}.$

4) $z = \operatorname{arc\,tg}(3x + y) - \operatorname{Sin}(x - 2y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{1 + (3x + y)^2} - \operatorname{Cos}(x - 2y),$
$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (3x + y)^2} + 2\operatorname{Cos}(x - 2y).$

5) $\varphi(x, y) = 5\cos(ax + by) - 3x^y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -5a\sin(ax + by) - 3yx^{y-1},$
$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -5b\sin(ax + by) - 3x^y \cdot \ln x$

6) $w = v \cdot \ln(3u + v), \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{3v}{3u + v}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{v}{3u + v} + \ln(3u + v).$

7) $f(x, y) = \operatorname{Tg}(x \cdot y), \quad f'_x = y(1 - \operatorname{Tg}^2(x \cdot y)), \quad f'_y = x(1 - \operatorname{Tg}^2(x \cdot y)).$

8) $z = 5xy - 3x, \quad dz = (5y - 3)\,dx + 5x\,dy.$

9) $F(u, v) = \sin(u + 5v) + a^u, \quad dF = (\cos(u + 5v) + a^u \cdot \ln a)\,du + 5\cos(u + 5v)\,dv.$

10) $g(s, t) = s^2 - st + t^2 - 1, \quad dg(s, t) = (2s - t)\,ds + (2t - s)\,dt.$

11) $z = n\,\mathrm{tg}\,(ax + by) - 7x^{2y}$, $\quad dz = \left(\frac{an}{\cos^2(ax+by)} - 14\,y\,x^{2y-1}\right)dx$
$$+ \left(\frac{bn}{\cos^2(ax+by)} - 14\,x^{2y}\cdot \ln x\right)dy.$$

12) $f(x, y) = 5b^x \cos y$, $\quad df(x, y) = 5b^x \cdot \ln b \cdot \cos y \cdot dx - 5b^x \sin y \cdot dy.$

13) $w = 5x^2y - 7z^3$, $\quad dw = 10xy\,dx + 5x^2\,dy - 21z^2\,dz.$

14) $\psi(u, v, w) = \sin(u + 7w) + a^{u+v}$, $\quad d\psi = (\cos(u + 7w) + a^{u+v}\cdot \ln a)\,du$
$$+ a^{u+v}\ln a \cdot dv + 7\cos(u + 7w)\,dw.$$

15) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{x_3 - x_4}\sin x_2$, $\quad df = (x_3 - x_4)\cdot x_1^{x_3 - x_4 - 1}\sin x_2 \cdot dx_1$
$$+ x_1^{x_3 - x_4}\cos x_2\,dx_2 + x_1^{x_3 - x_4}\cdot \ln x_1 \cdot \sin x_2\,dx_3 - x_1^{x_3 - x_4}\ln x_1 \sin x_2\,dx_4.$$

2. Geometrische Deutung der Ableitungen und Differentiale einer Funktion $f(x, y)$. Zur geometrischen Versinnlichung einer Funktion $z = f(x, y)$ deuteten wir die x, y, z, als rechtwinklige Raumkoordinaten (S. 91). Die bisherige „Zahlenebene" des Variablenpaares x, y wird dann zur x, y-Ebene des Koordinatensystems. In jedem Punkte (x, y) des Bereiches, für welchen $z = f(x, y)$ erklärt ist, dachten wir die „Koordinate" $z = f(x, y)$ senkrecht zur x, y-Ebene in der durch das Vorzeichen von z gegebenen Richtung aufgetragen. Die Endpunkte der z-Koordinaten liefern dann die „*Fläche*" der Funktion $f(x, y)$, deren Verlauf uns die Versinnlichung der Funktion ergibt.

Wird y konstant erhalten, während x variabel bleibt, so ist $z = f(x,y)$ eine Funktion von x allein, und wir erhalten zur geometrischen Deutung dieser Funktion offenbar die *Schnittkurve der eben genannten Fläche mit einer zur x, z-Ebene im Abstande $|y|$ parallel laufenden Ebene,* die je nach dem Vorzeichen von y auf der einen oder anderen Seite der x, z-Ebene liegt. Die Existenz einer partiellen Ableitung $f'_x(x, y)$ läuft dann nach S. 98 auf die Tatsache hinaus, daß die fragliche Kurve „im Punkte (x, z)" eine Tangente besitzt. Diese Tangente der Kurve ist aber zugleich eine Tangente der Fläche „im Punkte (x, y, z)", und zwar diejenige Flächentangente im fraglichen Punkte, welche zur x, z-Ebene des Koordinatensystems parallel ist. Eine entsprechende Betrachtung gilt für den Fall, daß wir $f(x, y)$ bei stehendem x als Funktion von y allein ansehen. Wir notieren sogleich als Ergebnis: *Hat die Funktion $z = f(x, y)$ im Punkte (x, y) endliche partielle Ableitungen erster Ordnung $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, so ist dies gleichbedeutend mit der Tatsache, daß die Fläche der Funktion $f(x, y)$ im Punkte (x, y, z) zwei zur x, z-Ebene bzw. y, z-Ebene parallele Tangenten hat.*

Legen wir jetzt durch die z-Koordinate des Punktes (x, y, z) unserer Fläche irgend eine Ebene, welche wir (Fig. 38, S. 150) durch ihren dem Intervall $0 \leqq \alpha < \pi$ angehörenden Neigungswinkel α gegen die nach rechts

gerichtete x, z-Ebene bestimmen, so liefert diese Ebene eine neue durch den Punkt (x, y, z) hindurchlaufende Schnittkurve mit der Fläche der Funktion $f(x, y)$. Über eine etwaige Tangente dieser neuen Kurve im Punkte (x, y, z) läßt sich auch dann, wenn die Ableitungen $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ im Punkte (x, y) existieren, zunächst gar nichts aussagen. Zur näheren Untersuchung haben wir in Fig. 38 in der x, y-Ebene den Grundriß der Ebene vom Neigungswinkel α gezeichnet und führen diese Gerade als Zahlenlinie für eine Variable s ein, wobei der Punkt (x, y) den Nullpunkt $s = 0$ darstelle und der mit der Pfeilspitze versehene Teil der Linie die positiven Werte s trage. Längs dieser Geraden ist nun $z = f(x, y)$ eine Funktion von s allein, und wir haben zu fragen, ob diese Funktion im Punkte $s = 0$ eine Ableitung besitzt.

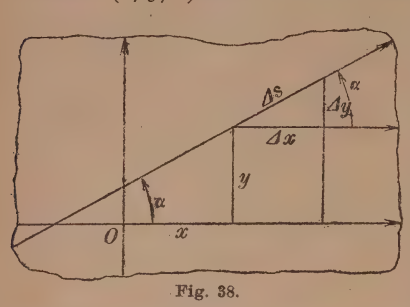


Fig. 38.

Zur Bildung des „Differenzenquotienten" wählen wir eine „Differenz des Argumentes" Δs (in Fig. 38 ist dieselbe positiv gedacht) und berechnen $\Delta x = \Delta s \cdot \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta s \cdot \sin\alpha$, sowie die ihnen entsprechende Differenz $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ der Funktion. Genügen nun $f(x, y + \Delta y)$ als Funktion von x und $f(x, y)$ als Funktion von y den Bedingungen des Mittelwertsatzes, so dürfen wir $\Delta z = \Delta f(x, y)$ in der Gestalt (10) S. 146 entwickeln und gewinnen als Differenzenquotienten:

$$(1)\quad \frac{\Delta f(x,y)}{\Delta s} = f'_x(x + \vartheta \cdot \Delta x, y + \Delta y) \cdot \cos\alpha + f'_y(x, y + \vartheta' \cdot \Delta y) \cdot \sin\alpha.$$

Trifft ferner die Voraussetzung zu, *daß die partiellen Ableitungen* f_x *und* f'_y *im ganzen Bereiche der Erklärung von* $f(x, y)$ *existieren und zugleich stetig sind*, so hat der Differenzenquotient (1) für $\lim \Delta s = 0$ einen Grenzwert, nämlich:

$$(2)\qquad \lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta s} = f'_x(x, y)\cos\alpha + f'_y(x, y)\sin\alpha.$$

Dieses Ergebnis ist für jeden Winkel α richtig. Es wird also jede durch die z-Koordinate des Flächenpunktes (x, y, z) zu legende Ebene eine Schnittkurve liefern, die im fraglichen Punkte eine Tangente hat. Wir wollen feststellen, wie diese gesamten Tangenten, die zugleich Tangenten der Fläche im Punkte (x, y, z) sind, gelegen sind. Ein auf der zum Winkel α gehörenden Tangente veränderlicher Punkt möge die Koordinaten X, Y, Z haben. Wir können die Differenzen:

$$(3)\qquad X - x = dx,\qquad Y - y = dy,\qquad Z - z = dz$$

uns als „Differentiale“ vorstellen, welche einem Differentiale ds der eben benutzten Hilfsvariablen s entsprechen. Dann gilt zunächst:

$$(4) \qquad dx = ds \cdot \cos\alpha, \qquad dy = ds \cdot \sin\alpha,$$

und es bedeutet:

$$(5) \qquad dz = df(x,y) = (f'_x \cdot \cos\alpha + f'_y \cdot \sin\alpha)\, ds = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$$

das zugehörige „Differential der Funktion“, d. h. die Änderung der z-Koordinate der Tangente. Setzen wir nun in diese Gleichung (5) für die Differentiale dx, dy, dz ihre in (3) gegebenen Ausdrücke als Koordinatendifferenzen ein, so folgt:

$$(6) \qquad Z - z = (X - x) \cdot f'_x(x,y) + (Y - y) \cdot f'_y(x,y)$$

als eine vom Punkte (X, Y, Z) erfüllte Gleichung. Wie man sieht, ist diese Gleichung in X, Y, Z linear, und ihre Koeffizienten hängen nur noch von x, y, z und der Funktion $f(x,y)$ bzw. ihren Ableitungen für die Stelle (x, y) ab; der Winkel α aber tritt nicht mehr auf. Hiermit haben wir folgenden Satz gewonnen: *Die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen erster Ordnung vorausgesetzt, bilden die gesamten Tangenten der Fläche der Funktion $f(x, y)$ im einzelnen Punkte (x, y, z) stets eine „Ebene“, die man „Tangentialebene“ der Fläche nennt, und deren Gleichung in* (6) *gegeben ist.* Aus (5) aber ergibt sich weiter: *Die Bedeutung des zum Punkte (x, y) und den Differentialen dx und dy gehörenden „totalen Differentials“:*

$$dz = df(x, y) = f'_x(x,y)\, dx + f'_y(x,y)\, dy$$

der Funktion $z = f(x, y)$ ist die, daß dz die den Änderungen dx und dy entsprechende Änderung der „z-Koordinate der Tangentialebene“ darstellt.

Der im Anschluß an (11) S. 147 aufgestellte Satz läßt sich vermittelst der Hilfsvariablen s noch in eine neue Gestalt kleiden. Soll die Differenz Δs variabel sein und sich der Grenze 0 nähern, so können wir sie dem Differential ds gleichsetzen und haben dann auch:

$$\Delta x = dx = \Delta s \cdot \cos\alpha, \qquad \Delta y = dy = \Delta s \cdot \sin\alpha,$$

woraus sich ergibt:

$$|\Delta x| + |\Delta y| = |\Delta s| \cdot (|\cos\alpha| + |\sin\alpha|) < 2\,|\Delta s|.$$

Für die zugehörige Differenz $\Delta f(x,y)$ und das den dx, dy entsprechende Differential $df(x, y)$ folgt dann aus (11) S. 147 nach Division durch $|\Delta s| = |ds|$:

$$\lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta f(x,y) - df(x,y)}{\Delta s} = 0.$$

Nähert sich $\Delta s = ds$ der Grenze 0, so wird der Unterschied zwischen

der „Differenz“ $\Delta f(x, y)$ und dem „totalen Differential“ $df(x, y)$ im Vergleich zu $\Delta s = ds$ unendlich klein.

Die Ergebnisse entsprechen offenbar vollständig den oben (S. 103) für die Funktionen $f(x)$ einer Variablen gewonnenen Sätzen. Auch bei den Sätzen über Differenzen und Differentiale einer Funktion von beliebig vielen Variablen könnten wir uns einer „geometrischen Sprechweise“ bedienen; wir gehen aber hierauf nicht weiter ein, da für die späteren Anwendungen fast nur der Fall der Funktionen zweier unabhängiger Variablen von Bedeutung ist.

3. Differentiation zusammengesetzter und unentwickelter Funktionen. Die soeben an der Funktion $z = f(x, y)$ vollzogene „Differentiation nach s“ ist jetzt einer wichtigen Verallgemeinerung zu unterwerfen. Es sei $z = f(x, y)$ eine in einem gewissen Bereiche erklärte eindeutige und stetige Funktion, die daselbst stetige Ableitungen $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ besitze. Es mögen ferner x und y als eindeutige und stetige Funktionen $x = \varphi(s)$ und $y = \psi(s)$ einer einzigen Variablen s gegeben sein, welche in einem gewissen Intervalle der Variablen s erklärt sind und daselbst stetige Ableitungen $\varphi'(s)$ und $\psi'(s)$ besitzen mögen. Die in diesem Intervalle eintretenden Wertepaare x, y der Funktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ mögen Punkte desjenigen Bereichs liefern, für welchen $f(x, y)$ erklärt ist. Durch Vermittlung dieser beiden Funktionen wird z gleichfalls eine Funktion von s allein:

$$z = f(\varphi(s), \psi(s)), \tag{1}$$

die wir im Anschluß an die frühere Sprechweise (S. 84) als eine „zusammengesetzte Funktion“ bezeichnen.

Wir behaupten nun, *daß, die Stetigkeit der Ableitungen $f'_x, f'_y, \varphi', \psi'$ vorausgesetzt, die Funktion* (1) *auch eine Ableitung nach s besitzt, für deren Berechnung eine einfache Regel besteht.* Einer Differenz Δs des Argumentes s gehören nämlich die Differenzen der Funktionen:

$$\Delta x = \varphi'(s + \vartheta_1 \cdot \Delta s) \cdot \Delta s, \quad \Delta y = \psi'(s + \vartheta_2 \cdot \Delta s) \cdot \Delta s \tag{2}$$

zu. Diesen Differenzen, und damit der ursprünglichen Differenz Δs, entspricht nach (10) S. 146 weiter als Differenz der Funktion $z = f(x, y)$:

$$\Delta z = f'_x(x + \vartheta \cdot \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y + \vartheta' \cdot \Delta y) \cdot \Delta y,$$

wo die ϑ allemal zwischen 0 und 1 gelegen sind. Tragen wir für Δx und Δy die Ausdrücke (2) ein, so folgt als „Differenzenquotient“:

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = f'_x(x + \vartheta \cdot \Delta x, y + \Delta y) \cdot \varphi'(s + \vartheta_1 \cdot \Delta s) + f'_y(x, y + \vartheta' \cdot \Delta y) \cdot \psi'(s + \vartheta_2 \cdot \Delta s).$$

Für $\lim \Delta s = 0$ gilt auch $\lim \Delta x = 0$ und $\lim \Delta y = 0$. Mit Rücksicht auf die Stetigkeit der Ableitungen $f'_x, f'_y, \varphi', \psi'$ ergibt sich demnach für

$\lim \Delta s = 0$ in der Tat ein Grenzwert des Differenzenquotienten und damit eine Ableitung von z nach s. Schreiben wir dieselbe sogleich als Differentialquotient, *so ist die Regel für die Differentiation der zusammengesetzten Funktion* (1) *nach ihrem Argumente s gegeben durch:*

(3) $$\frac{dz}{ds} = f'_x(x,y) \cdot \varphi'(s) + f'_y(x,y) \cdot \psi'(s);$$

wir können der Gleichung (3) *auch die Gestalt geben:*

(4) $$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}.$$

Dieses Ergebnis schließt sich der früheren Regel (4) S. 122 genau an.

Als Beispiel brachten wir:

$$z = x^y, \qquad x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s);$$

hier finden wir:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial (x^y)}{dx} \cdot \varphi'(s) + \frac{\partial (x^y)}{\partial y} \cdot \psi'(s) = y x^{y-1} \cdot \varphi'(s) + x^y \cdot \ln x \cdot \psi'(s),$$

$$\frac{d\left(\varphi(s)^{\psi(s)}\right)}{ds} = \varphi(s)^{\psi(s)} \left\{ \frac{\psi(s) \cdot \varphi'(s)}{\varphi(s)} + \psi'(s) \cdot \ln \varphi(s) \right\},$$

was mit dem Ergebnis (13) S. 124 übereinstimmt.

Aus (3) folgt ferner eine sehr häufig anzuwendende Regel für die Differentiation einer unentwickelt gegebenen Funktion y von x. Es sei y implizite als Funktion von x erklärt durch die Gleichung $f(x, y) = 0$. Finden wir durch Auflösung dieser Gleichung nach y als entwickelten Ausdruck der Funktion $y = \psi(x)$, so heißt dies, die Gleichung $f(x, \psi(x)) = 0$ sei für alle x erfüllt, oder die zusammengesetzte Funktion $z = f(x, \psi(x))$ sei konstant gleich 0. Sie hat natürlich auch eine Ableitung, die konstant gleich 0 ist. Berechnen wir diese Ableitung aber nach der Regel (3), indem wir x an Stelle von s treten lassen und insbesondere $\varphi(x) = x$, $\varphi'(x) = 1$ eintragen, so folgt:

(5) $$\frac{dz}{dx} = f'_x(x,y) + f'_y(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man, indem man unter Δx und Δy einander entsprechende Differenzen des Argumentes und der Funktion versteht und aus den beiden zutreffenden Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ durch Subtraktion:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 0$$

herstellt. Indem man die links stehende „Differenz der Funktion $f(x, y)$" nach (10) S. 146 entwickelt und das Ergebnis durch Δx teilt, folgt:

$$f'_x(x + \vartheta \cdot \Delta x, y + \Delta y) + f'_y(x, y + \vartheta' \cdot \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

woraus man für lim $\Delta x = 0$ die Gleichung (5) wiedergewinnt. Aus dieser Gleichung folgt als Ergebnis: *Verschwinden die partiellen Ableitungen* $f'_x(x,y)$ *und* $f'_y(x,y)$ *nicht zugleich, so berechnet sich die Ableitung der implizite durch* $f(x,y) = 0$ *gegebenen Funktion* y *von* x *in bezug auf* x *nach der Regel:*

$$(6) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = -\frac{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)}.$$

Als ein Beispiel hierfür wollen wir die „Umkehrregel" (S. 108) aufs neue beweisen. Ist zu einer Funktion $f(x)$ die Funktion $y = \varphi(x)$ invers, so können wir dieses y als Funktion von x implizite durch die Gleichung $f(y) - x = 0$ geben, welche demnach an Stelle der bisherigen Gleichung $f(x,y) = 0$ tritt. Die Berechnung der Ableitung von $y = \varphi(x)$ in bezug auf x nach der Regel (6) liefert demnach:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial(f(y)-x)}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial(f(y)-x)}{\partial y}\right)} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(\varphi(x))},$$

womit die Regel (2) S. 108 wieder gewonnen ist.

Manchmal ist y als Funktion von x implizite dadurch gegegeben, daß x und y als Funktion einer dritten Variablen t in der Gestalt $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$ dargestellt sind. Benutzt man dann zur Berechnung der Ableitung von y nach x die „Hilfsvariable" t im Sinne der „Kettenregel" (S. 122) und bestimmt die Ableitung von t nach x auf Grund der „Umkehrregel", so gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \psi'(t) \cdot \frac{dt}{dx}, \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)},$$

so daß wir die zu berechnende Ableitung in der Gestalt erhalten:

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Ist z implizite als Funktion der unabhängigen Variablen x und y durch eine Gleichung $f(x,y,z) = 0$ gegeben, so berechnen sich die partiellen Differentialquotienten von z nach x und y auf Grund der Regel (6) in der Gestalt:

$$(8) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x(x,y,z)}{f'_z(x,y,z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y(x,y,z)}{f'_z(x,y,z)},$$

so daß das totale Differential die Form annimmt:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy}{f'_z}.$$

Die Regel (4) ist ein Spezialfall einer noch etwas allgemeineren Regel, zu deren Aufstellung wir an eine Funktion $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n Argumenten anknüpfen. Sind diese $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämtlich wieder Funktionen $x_1 = \varphi_1(x), x_2 = \varphi_2(x), \ldots, x_n = \varphi_n(x)$ einer einzigen Variablen x, so wird dadurch y aufs neue zu einer „zusammengesetzten" Funktion von x allein. Unter der Voraussetzung der Existenz und Stetigkeit aller in Betracht kommenden Ableitungen erster Ordnung kann man mit Benutzung der Entwicklungen von S. 147ff. die Ableitung der vorliegenden zusammengesetzten Funktion y von x nach der folgenden Regel berechnen:

(9) $$\frac{dy}{dx} = f'_{x_1} \cdot \varphi'_1 + f'_{x_2} \cdot \varphi'_2 + \ldots + f'_{x_n} \cdot \varphi'_n$$

oder, wenn wir rechts die Ableitungen durch die Differentialquotienten ersetzen:

(10) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx}.$$

Sind endlich auch die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Funktionen von mehr als einem Argumente, so sind nach dem gleichen Gesetze die partiellen Ableitungen von y in bezug auf diese Argumente zu berechnen.

Aufgaben: Folgende unentwickelte Funktionen y bzw. z sind zu differenzieren:

1) $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}$.

2) $y^2 - 2px = 0$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \pm \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2x}}$.

3) $x^y - y^x = 0$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y x^{y-1} - y^x \ln y}{x y^{x-1} - x^y \ln x}$.

4) $y \cdot \sin x - x \cdot \operatorname{arc\,tg} y = 0$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+y^2)(y \cos x - \operatorname{arc\,tg} y)}{x - (1+y^2) \sin x}$.

5) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$.

6) $\cos x - x \cos y = 0$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + \cos y}{x \cdot \sin y}$.

7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$.

8) $x - y \cdot \operatorname{tg}(cz) = 0$, $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos^2(cz)}{cy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sin(cz) \cdot \cos(cz)}{cy}$.

9) $xy - xz - y^2 + z^2 = 0$, $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y - z}{x - 2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - 2y}{x - 2z}$.

10) $y \cdot e^{x+z} - z^n = 0$, $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y \cdot e^{x+z}}{n z^{n-1} - y e^{x+z}} = \frac{z}{n - z}$,

$\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{x+z}}{n z^{n-1} - y e^{x+z}} = \frac{z}{y(n-z)}$.

4. Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung. Eine Funktion $f(x, y)$ habe im Bereiche ihrer Erklärung stetige Ableitungen $f_x'(x, y)$ und $f_y'(x, y)$. Auch die Funktion $f_x'(x, y)$ möge wieder stetige Ableitungen erster Ordnung haben, die wir mit $f''_{x,x}(x, y)$ und $f''_{x,y}(x, y)$ bezeichnen; und ebenso möge die partielle Differentiation von $f_y'(x, y)$ zu zwei stetigen Ableitungen $f''_{y,x}(x, y)$, $f''_{y,y}(x, y)$ führen. Wir nennen die vier so zu gewinnenden Funktionen $f''_{x,x}$, $f''_{x,y}$, $f''_{y,x}$, $f''_{y,y}$ die *„partiellen Ableitungen zweiter Ordnung"* von $f(x, y)$ oder kurz die *„partiellen zweiten Ableitungen"* dieser Funktion[1]). So haben wir z. B. bei der Funktion $f(x, y) = xy^3 - e^{2x-7y}$ als erste Ableitungen:

$$f_x'(x, y) = y^3 - 2e^{2x-7y}, \qquad f_y'(x, y) = 3xy^2 + 7e^{2x-7y}$$

und finden hieraus weiter:

$$f''_{x,x}(x, y) = -4e^{2x-7y}, \qquad f''_{x,y}(x, y) = 3y^2 + 14e^{2x-7y}$$
$$f''_{y,x}(x, y) = 3y^2 + 14e^{2x-7y}, \qquad f''_{y,y}(x, y) = 6xy - 49e^{2x-7y}.$$

Wie man sieht, ist in diesem Falle $f''_{x,y}(x, y) = f''_{y,x}(x, y)$; differenzieren wir also die vorgelegte Funktion erst nach x und dann das Ergebnis nach y, so erhalten wir dasselbe, als wenn wir die Differentiation nach y voranstellen und erst dann nach x differenzieren.

Um diesen Satz auf etwaige allgemeinere Gültigkeit zu prüfen, bilden wir uns den Begriff der *„partiellen Differenz"* unserer Funktion $f(x, y)$, d. i. einfach der Differenz bei alleiniger Änderung eines der Argumente, und benutzen hierbei die Bezeichnungen:

$$(1) \quad \Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y), \quad \Delta_y f(x,y) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

indem wir dem Zeichen Δ diejenige Variable, welche der Änderung unterworfen ist, als Index anhängen. Üben wir auf $\Delta_x f(x, y)$, als Funktion von y betrachtet, die Operation Δ_y aus, so ist das durch $\Delta_y \Delta_x f(x, y)$ zu bezeichnende Ergebnis:

$$\Delta_y \Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x,y).$$

Vergleicht man hiermit den entwickelten Ausdruck von $\Delta_x \Delta_y f(x, y)$, so ergibt sich:

$$(2) \qquad \Delta_y \Delta_x f(x, y) = \Delta_x \Delta_y f(x, y),$$

so daß die Operationen Δ_x und Δ_y ohne Änderung des Ergebnisses in ihrer Reihenfolge ausgetauscht werden können.

Die in (2) links und rechts stehenden *„partiellen Differenzen zweiter Ordnung"* können wir nun durch wiederholte Anwendung des Mittelwert-

1) Man gebraucht auch die Bezeichnungen $f_{x,x}$, $f_{x,y}$, ... oder f_{11}, f_{12}, ...

satzes mit den partiellen Ableitungen $f''_{x,y}$ und $f''_{y,x}$ in Verbindung setzen. Betrachten wir $\Delta_y f(x, y) = F(x)$ als Funktion von x, so folgt aus der Gestalt (1) dieser Funktion:

$$F'(x) = \Delta_y f_x'(x, y),$$

so daß die Differentiation nach x und die Operation Δ_y in ihrer Reihenfolge ausgetauscht werden können, ohne daß das Ergebnis sich ändert. Da f_x' stetig sein sollte, so gilt:

$$\Delta_x F(x) = F'(x + \vartheta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x,$$

d. h. also bei der Bedeutung von $F(x)$:

$$\Delta_x \Delta_y f(x, y) = \Delta_y f_x'(x + \vartheta \cdot \Delta x, y) \cdot \Delta x.$$

Da aber auch noch $f''_{x,y}$ stetig sein sollte, so folgt durch nochmalige Anwendung des Mittelwertsatzes:

$$\Delta_y f_x'(x_1, y) = f''_{x,y}(x_1, y + \vartheta' \cdot \Delta y) \cdot \Delta y.$$

Verstehen wir hierbei unter x_1 den Wert $x + \vartheta \cdot \Delta x$, so folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

(3) $$\Delta_x \Delta_y f(x, y) = f''_{x,y}(x + \vartheta \cdot \Delta x, y + \vartheta' \cdot \Delta y) \cdot \Delta x \, \Delta y.$$

Durch eine genau entsprechende Rechnung können wir nun aber für den in (2) links stehenden Ausdruck die Darstellung erzielen:

$$\Delta_y \Delta_x f(x, y) = f''_{y,x}(x + \vartheta'' \cdot \Delta x, y + \vartheta''' \cdot \Delta y) \cdot \Delta x \, \Delta y,$$

so daß die Gleichsetzung beider Ausdrücke entsprechend der Gleichung (2) nach Forthebung der gemeinsamen Faktoren Δx und Δy:

(4) $$f''_{x,y}(x + \vartheta \cdot \Delta x, y + \vartheta' \cdot \Delta y) = f''_{y,x}(x + \vartheta'' \cdot \Delta x, y + \vartheta''' \cdot \Delta y)$$

ergibt. Bei Änderung der Werte Δx, Δy werden auch die Zahlen ϑ sich ändern. Da sie indessen immer zwischen 0 und 1 liegen, so findet für $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$ auch $\lim \vartheta \cdot \Delta x = 0, \ldots$ statt. Wegen der Stetigkeit der Ableitungen folgt demnach für diesen Grenzübergang aus (4) sofort $f''_{x,y}(x, y) = f''_{y,x}(x, y)$. *Sind die ersten Ableitungen f_x' und f_y', sowie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $f''_{x,y}$ und $f''_{y,x}$ stetig, so sind die beiden letzteren einander gleich:*

(5) $$f''_{x,y}(x, y) = f''_{y,x}(x, y).$$

Das Ergebnis kann leicht verallgemeinert werden. Zwei aufeinander folgende Differentiationen auch bei Funktionen, die neben den beiden in Betracht kommenden Variablen noch andere Argumente haben mögen, sind, sofern die entstehenden Ableitungen stetig sind, immer in ihrer

Reihenfolge ohne Änderung des Resultates vertauschbar. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes aber folgt: *Das Ergebnis einer Reihe von Differentiationen einer Funktion von zwei oder mehr Variablen ist, falls die Ableitungen existieren und stetig sind, unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen.*

Der Satz gestattet uns zunächst, eine übersichtliche Schreibweise für die partiellen Ableitungen höherer Ordnung zu vereinbaren. Haben wir wieder eine Funktion zweier Variablen $f(x, y)$, und sind im ganzen k Differentiationen nach x und l Differentiationen nach y zu vollziehen, so dürfen wir zuerst die sämtlichen Differentiationen nach x ausführen und dann die nach y folgen lassen. Ist $k + l = n$, so wollen wir die partielle Ableitung n^{ter} Ordnung, die sich ergibt, durch $f^{(n)}_{x^{(k)},\, y^{(l)}}(x, y)$ bezeichnen, wobei also $x^{(k)}$ symbolisch k hinter einander geschriebene Indizes x ausdrücken soll. Entsprechend wird man bei einer Funktion von drei Variablen $f^{(n)}_{x^{(k)},\, y^{(l)},\, z^{(m)}}(x, y, z)$ schreiben usw.

Für die Erklärung der zu den Ableitungen gehörenden *„partiellen Differentiale höherer Ordnung"* sind die Bestimmungen von S. 142 vorbildlich. Zunächst haben wir für eine Funktion $f(x, y)$ drei partielle Differentiale zweiter Ordnung $\partial^2_{x,x} f$, $\partial^2_{x,y} f$, $\partial^2_{y,y} f$, die wir zu erklären haben durch:

$$(6)\qquad \begin{cases} \partial^2_{x,x} f(x, y) = f''_{x,x}(x, y)\, dx^2, \\ \partial^2_{x,y} f(x, y) = f''_{x,y}(x, y)\, dx\, dy, \\ \partial^2_{y,y} f(x, y) = f''_{y,y}(x, y)\, dy^2. \end{cases}$$

Bei den *„partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung"*, die natürlich den drei partiellen Ableitungen zweiter Ordnung gleich sind, können wir (wie S. 145 bei der ersten Ordnung) die unteren Indizes am Zeichen ∂ der partiellen Differentiation sparen:

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = f''_{x,x}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} = f''_{x,y}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = f''_{y,y}(x, y);$$

übrigens schreiben wir dabei in den Nennern ∂x und ∂y statt dx und dy.

Auf die höheren Ordnungen und die Funktionen von mehr als zwei Variablen überträgt man diese Festsetzungen leicht. Die $(n + 1)$ partiellen Differentiale n^{ter} Ordnung von $f(x, y)$ schreiben wir:

$$(8)\qquad \partial^n_{x^{(k)},\, y^{(l)}} f(x, y) = f^{(n)}_{x^{(k)},\, y^{(l)}}(x, y)\, dx^k\, dy^l;$$

für die Differentialquotienten reiht sich hieran die Darstellung:

$$(9)\qquad \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^k\, \partial y^l} = f^{(n)}_{x^{(k)},\, y^{(l)}}(x, y).$$

Entsprechend hat man z. B. im Falle dreier Argumente:

$$\frac{\partial^n f(x, y, z)}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m} = f^{(n)}_{x^{(k)}, y^{(l)}, z^{(m)}}(x, y, z).$$

Übrigens können wir leicht auch die Gleichung (3) zu einer Beziehung zwischen den *„partiellen Differenzen höherer Ordnung"* und den entsprechenden Ableitungen verallgemeinern. Sehen wir $\Delta_x \Delta_y f(x, y)$ als Funktion von x an:

$$F(x) = \Delta_x \Delta_y f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y),$$

so folgt aus der rechtsseitigen Entwicklung:

$$F'(x) = \Delta_x \Delta_y f_x'(x, y),$$

so daß auch hier wieder die Differentiation und die Operationen Δ in ihrer Reihenfolge ohne Änderung des Resultates ausgetauscht werden können. Man hat nun einerseits:

$$\Delta_x F(x) = F'(x + \vartheta'' \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$

und andrerseits unter Zuhilfenahme der für f_x' an Stelle von f gebildeten Gleichung (3):

$$F'(x_1) = \Delta_x \Delta_y f_x'(x_1, y) = f'''_{x^{(2)}, y}(x_1 + \vartheta \cdot \Delta x, y + \vartheta' \cdot \Delta y) \Delta x \Delta y.$$

Hieraus folgt, wenn wir $x_1 = x + \vartheta'' x$ und $\vartheta + \vartheta'' = 2\vartheta_2$ setzen, für $\Delta_x F(x) = \Delta_x \Delta_x \Delta_y f(x, y) = \Delta_x^2 \Delta_y f(x, y)$ die Darstellung:

(10) $$\Delta_x^2 \Delta_y f(x, y) = f'''_{x^{(2)}, y}(x + 2\vartheta_2 \cdot \Delta x, y + \vartheta' \cdot \Delta y) \Delta x^2 \Delta y.$$

Die gleiche Schlußweise kann man beliebig oft wiederholen: *Für die $(n+1)$ partiellen Differenzen n^{ter} Ordnung findet sich als Darstellung durch die entsprechenden Ableitungen:*

(11) $$\Delta_x^k \Delta_y^l f(x,y) = f^{(n)}_{x^{(k)}, y^{(l)}}(x + k \cdot \vartheta_k \cdot \Delta x, y + l \cdot \vartheta_l' \cdot \Delta y) \Delta x^k \Delta y^l.$$

Auch die Übertragung dieser Gleichung auf die Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen ist nicht schwierig.

Aufgaben: Man bestätige die Regel $f''_{x, y} = f''_{y, x}$ bei den folgenden Funktionen:

1) $f(x, y) = \sin(xy^2) - x^y$. $f''_{x, y} = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2) - x^{y-1} - yx^{y-1} \ln x$.

2) $g(u, v) = e^u \sin v + 5u^3 v^7 \cdot 2^u$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = e^u \cos v + 105 u^2 v^6 2^u + 35 u^3 v^6 2^u \ln 2$.

3) $z = e^{ax^2 + 2bxy + cy^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{ax^2 + 2bxy + cy^2}(4(ax + by)(bx + cy) + 2b)$.

4) $f(x, y) = (x + 3y)^2 \cdot e^{x - 7y}$, $f''_{x, y} = (6 - 8x - 24y - 7x^2 - 42xy - 63y^2) e^{x - 7y}$.

5. Die totalen Differentiale höherer Ordnung. Die bei gleichzeitiger Abänderung von x und y eintretende „*totale Differenz*" einer Funktion $f(x, y)$ zweier unabhängiger Variablen:

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

kann man unter Gebrauch der Abkürzung $y + \Delta y = y_1$ so entwickeln:

$$\Delta f(x, y) = (f(x + \Delta x, y_1) - f(x, y_1)) + (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)).$$

Unter Heranziehung der partiellen Differenzen kann man hierfür schreiben

(1) $$\Delta f(x, y) = \Delta_x f(x, y_1) + \Delta_y f(x, y),$$

wobei im ersten Gliede $y_1 = y + \Delta y$ an Stelle von y eintritt. Da die Differenz einer Summe von Funktionen immer der Summe der Differenzen der einzelnen Funktionen gleich ist, so kann man, wenn von $\Delta f(x, y)$ aufs neue die totale Differenz für dieselben $\Delta x, \Delta y$ gebildet werden soll, die entstehende „*totale Differenz zweiter Ordnung*" $\Delta\Delta f(x, y) = \Delta^2 f(x, y)$ zunächst so schreiben:

$$\Delta^2 f(x, y) = \Delta\Delta_x f(x, y_1) + \Delta\Delta_y f(x, y).$$

Entwickelt man die beiden Glieder rechter Hand wieder nach der Regel (1), so ergibt sich, wenn $y_1 + \Delta y = y + 2\Delta y = y_2$ gesetzt wird:

$$\Delta\Delta_x f(x, y_1) = \Delta_x^2 f(x, y_2) + \Delta_x\Delta_y f(x, y_1),$$
$$\Delta\Delta_y f(x, y) = \Delta_x\Delta_y f(x, y_1) + \Delta_y^2 f(x, y),$$

wobei für die erste Gleichung noch von der Vertauschbarkeit der Operationen Δ_x und Δ_y Gebrauch gemacht wurde. Durch Addition der beiden letzten Gleichungen folgt für die „*totale Differenz zweiter Ordnung*" die Darstellung durch die partiellen Differenzen:

(2) $$\Delta^2 f(x, y) = \Delta_x^2 f(x, y_2) + 2\Delta_x\Delta_y f(x, y_1) + \Delta_y^2 f(x, y).$$

In gleicher Weise fortfahrend zeigt man allgemein für die „*totale Differenz n^{ter} Ordnung*":

(3) $$\Delta^n f(x,y) = \Delta_x^n f(x, y_n) + \binom{n}{1}\Delta_x^{n-1}\Delta_y f(x, y_{n-1}) + \binom{n}{2}\Delta_x^{n-2}\Delta_y^2 f(x, y_{n-2}) + \cdots + \Delta_y^n f(x, y),$$

wobei $y_k = y + k\Delta y$ ist und die Klammersymbole die Binomialkoeffizienten bedeuten. Mit Benutzung des Summenzeichens kann man die Gleichung (3) auch in die Gestalt setzen:

(4) $$\Delta^n f(x, y) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \Delta_x^{n-l}\Delta_y^l f(x, y_{n-l}),$$

wobei im letzten Gliede $y_0 = y$ ist.

Wir wollen nun für die einzelne partielle Differenz ihren Ausdruck (11) S. 159 eintragen und finden auf diese Weise:

$$(5)\qquad \Delta^n f(x, y)$$
$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} f^{(n)}_{x^{(n-l)},\, y^{(l)}}(x + (n-l)\vartheta_{n-l}\cdot \Delta x, y + (n-l)\Delta y + l\cdot \vartheta_l' \Delta y)\,\Delta x^{n-l} \Delta y^l$$

Unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Ableitungen n^{ter} Ordnung, die ja unseren Entwicklungen zugrunde liegt, nähert sich die im einzelnen Gliede von (5) auftretende Ableitung für $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$ der Grenze:

$$f^{(n)}_{x^{(n-l)},\, y^{(l)}}(x, y) = \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^{n-l} \partial y^l}.$$

Diese Sachlage veranlaßt uns, im Anschluß an S. 142 und 146 folgende Erklärung aufzustellen: *Als das zu den Argumenten x, y und den Differentialen dx, dy gehörende „vollständige“ oder „totale Differential n^{ter} Ordnung“ $d^n f(x, y)$ der Funktion $f(x, y)$ bezeichnen wir die Summe:*

$$(6)\quad d^n f(x, y) = \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \cdots + \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n} dy^n.$$

Es besteht dann wieder, wenn wir beim Grenzübergange $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$ die Differenzen mit den Differentialen gleich setzen, $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, die Tatsache, *daß der Unterschied $\Delta^n f(x, y) - d^n f(x, y)$ zwischen der totalen Differenz n^{ter} Ordnung und dem totalen Differential dieser Ordnung im Vergleiche zu den rechts auftretenden Potenzen der Differentiale beim Grenzübergange verschwindend klein wird.*

Wählen wir insbesondere im Anschluß an Fig. 38, S. 150 die Änderungen:

$$(7)\qquad \Delta x = dx = ds \cdot \cos\alpha, \qquad \Delta y = dy = ds \cdot \sin\alpha,$$

so wird $\Delta^n f(x, y)$ einfach die der Änderung $\Delta s = ds$ entsprechende Differenz n^{ter} Ordnung von $f(x, y)$, aufgefaßt als Funktion der Variablen s allein. Der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta^n f(x, y)}{\Delta s^n}$ ist nach S. 141 *die Ableitung n^{ter} Ordnung dieser Funktion in bezug auf s*, für welche sich aus (5) die Gestalt ergibt:

$$(8)\quad \lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta^n f(x, y)}{\Delta s^n} = \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} \cdot \cos^n\alpha + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y} \cdot \cos^{n-1}\alpha \cdot \sin\alpha$$
$$+ \cdots + \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n} \cdot \sin^n\alpha.$$

Zufolge (6) können wir diesem Grenzwerte auch die Gestalt geben:

$$(9)\qquad \lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta^n f(x, y)}{\Delta s^n} = \frac{d^n f(x, y)}{ds^n},$$

d. h. die nach s genommene Ableitung n^{ter} Ordnung ist wieder gleich dem Quotienten des zu den Differentialen (7) *gehörenden totalen Differentials n^{ter} Ordnung $d^n f(x, y)$ und der n^{ten} Potenz des Differentials ds.*

Sollen auch diese Entwicklungen auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen übertragen werden, was keine Schwierigkeit hat, so treten an Stelle der Binomialkoeffizienten die Koeffizienten des „polynomischen Lehrsatzes" auf. Man kann diese Koeffizienten durch Erweiterung der Entwicklungen von S. 136 ff. sehr leicht zugänglich machen; doch gehen wir auf diese Untersuchungen, die in der Folge keine Anwendung finden, nicht ein.

Aufgaben: Man bestätige die folgenden Angaben über totale Differentiale:

1) $z = xy^5 - e^{x+5y}$, $d^3 z = -e^{x+5y}dx^3 - 15e^{x+5y}dx^2dy + (60y^3 - 75e^{x+5y})dxdy^2 + (60xy^2 - 125e^{x+5y})dy^3.$

2) $\varphi(u, v) = u^3v^2 - v^3 + 7uv - 8,\qquad d^4\varphi(u, v) = 48\,v\,du^3dv + 72\,u\,du^3dv^2.$

3) $f(x, y) = e^{x-y^2} + \sin x \cdot \operatorname{tg} y,\qquad d^2 f(x, y) = (e^{x-y^2} - \sin x \cdot \operatorname{tg} y)\,dx^2 - \left(4ye^{x-y^2} - \frac{2\cos x}{\cos^2 y}\right)dx\,dy + \left((4y^2 - 2)e^{x-y^2} + \frac{2\sin x \sin y}{\cos^3 y}\right)dy^2.$

Abschnitt II.

Methoden der Berechnung der Funktionen.

Kapitel I. Näherungsdarstellungen mittelst ganzer Funktionen.

1. Interpolation mittelst ganzer Funktionen. Eine ganze oder gebrochene rationale Funktion ist für jedes gegebene Argument x durch eine Kette rationaler Rechnungen berechenbar. Die Berechnung einer elementaren algebraischen Funktion für das einzelne x erfordert neben rationalen Rechnungen noch Radizierungen, welche, zumal wenn es sich nicht nur um Ketten von Quadratwurzeln handelt, umständlich sind. Bei den transzendenten Funktionen ist man für die Berechnung auf Näherungsverfahren angewiesen, welche sich je nach der Erklärung der einzelnen Funktion richten und im allgemeinen gleichfalls recht umständliche Rechnungen erfordern.

Unter den rationalen Funktionen sind es insbesondere die ganzen Funktionen, welche sich durch Einfachheit ihrer Berechnung, ihrer Differentiationsregeln und ihrer übrigen Eigenschaften (s. S. 131) auszeichnen. Dieser Umstand hat Anlaß gegeben, *für sonstige, der Berechnung schwerer zugängliche Funktionen nach Näherungsausdrücken in Form von ganzen rationalen Funktionen zu suchen, welche jenen Funktionen wenigstens innerhalb gewisser Intervalle so nahe kommen, daß man aus ihnen brauchbare Näherungswerte der Funktionen berechnen kann.* Wir bezeichnen im Einzelfalle eine solche ganze Funktion als eine „*Näherungsfunktion*".

Eine erste Methode, diese Idee durchzuführen, geht von der Annahme aus, daß die Funktion $y = f(x)$ für n spezielle, voneinander verschiedene Argumente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, die wir etwa der Größe nach angeordnet denken, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, bereits bekannte Werte $\beta_1 = f(\alpha_1), \beta_2 = f(\alpha_2), \cdots, \beta_n = f(\alpha_n)$ habe. Man kann dann ziemlich leicht *eine ganze Funktion „höchstens" $(n-1)^{ten}$ Grades $h(x)$ angeben, welche für die Argumente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gleichfalls die Funktionswerte $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ annimmt* und zugleich durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt ist.

Zu diesem Zwecke stellen wir uns aus den n verschiedenen linearen Faktoren $(x - \alpha_k)$ das Produkt:

$$(1) \qquad g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

her, welches eine ganze Funktion n^{ten} Grades darstellt, und erklären

n ganze Funktionen $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ vom Grade $(n-1)$ durch die Festsetzung:

(2) $$g(x) = (x - \alpha_k) \cdot g_k(x), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Durch Differentiation nach x folgt:

(3) $$g'(x) = (x - \alpha_k) \cdot g_k'(x) + g_k(x).$$

Es ist einleuchtend, daß $g_k(x)$ für alle $(n-1)$ von α_k verschiedenen Argumente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ verschwindet, für α_k aber einen von 0 verschiedenen Wert $g_k(\alpha_k)$ hat, den man zufolge (3) auch:

(4) $$g_k(\alpha_k) = g'(\alpha_k)$$

schreiben kann, und der entwickelt gegeben ist durch:

(5) $$g_k(\alpha_k) = g'(\alpha_k) = (\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2) \cdots (\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \cdots (\alpha_k - \alpha_n).$$

Die ganze Funktion $(n-1)^{ten}$ Grades $h(x)$, die für die n Argumente α_k die Werte β_k der Funktion $f(x)$ hat, ist nun einfach gegeben durch:

(6) $$h(x) = \frac{\beta_1}{g'(\alpha_1)} \cdot g_1(x) + \frac{\beta_2}{g'(\alpha_2)} \cdot g_2(x) + \cdots + \frac{\beta_n}{g'(\alpha_n)} \cdot g_n(x).$$

Es steht nämlich rechts ein Aggregat von ganzen Funktionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welches selbst eine ganze Funktion „höchstens" $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades darstellt. Für $x = \alpha_k$ verschwinden alle Glieder bis auf das k^{te}, welches zufolge (4) den Wert β_k bekommt: es ist also tatsächlich $h(\alpha_k) = \beta_k$. Auch kann keine von $h(x)$ verschiedene ganze Funktion $h_1(x)$ existieren, für welche gleichfalls $h_1(\alpha_k) = \beta_k$ bei allen n Indizes k zutrifft. Es wäre nämlich $h(x) - h_1(x)$ eine den Grad n nicht erreichende, aber nicht identisch verschwindende ganze Funktion mit den n Nullpunkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, was nach S. 77 unmöglich ist.

Beiläufig leiten wir, indem wir $\beta_k = h(\alpha_k)$ in (6) eintragen und durch $g(x)$ teilen, die Gleichung:

(7) $$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(\alpha_1)}{g'(\alpha_1)} \cdot \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{h(\alpha_2)}{g'(\alpha_2)} \cdot \frac{1}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{h(\alpha_n)}{g'(\alpha_n)} \cdot \frac{1}{x - \alpha_n}$$

ab, in welcher die S. 79 aufgestellte „Partialbruchzerlegung" der in (7) links stehenden echt gebrochenen rationalen Funktion wiedergewonnen ist.

Benutzen wir $h(x)$ als „Näherungsfunktion" für $f(x)$ in der Nähe der Argumente α_k, etwa im Intervalle $\alpha_1 \leqq x \leqq \alpha_n$, so kommt dies darauf hinaus, daß wir in den Teilintervallen $\alpha_{k-1} < x < \alpha_k$ an Stelle der Funktionswerte $f(x)$ die Werte der ganzen Funktion $h(x)$ *„zwischenschalten"* oder *„interpolieren"*. Man spricht demnach von einer *„Interpolation" mittelst einer ganzen Funktion* $h(x)$; die Formel (6) aber heißt *„Lagrangesche Interpolationsformel"*, da sie von Lagrange für den vorliegenden Zweck benutzt wurde.

Wenn man nun fragt, ob man unter allen Umständen berechtigt ist, in dem einzelnen Teilintervalle $\alpha_{k-1} < x < \alpha_k$ die Werte $h(x)$ als Näherungswerte für $f(x)$ anzusehen, so ist die Frage in dieser Allgemeinheit allerdings zu verneinen. Es könnte ja z. B. sein, daß die Funktion $f(x)$ im Teilintervalle einen Unendlichkeitspunkt besitzt; in dessen Umgebung würde dann natürlich keine Rede davon sein, daß die Werte $h(x)$ der *ganzen* Funktion Näherungswerte für die $f(x)$ sein könnten. Man wird eine nützliche Verwendbarkeit der Interpolationsformel (6) jedoch dann erwarten dürfen, wenn die Funktion $f(x)$ im Intervalle $\alpha_1 \leqq x \leqq \alpha_n$ nicht zu starke Schwankungen erfährt oder vielleicht gar *monoton* ist.

Um ein Beispiel anzuführen und übrigens spätere Entwicklungen vorzubereiten, nehmen wir den besonderen Fall an, daß ein Intervall $a \leqq x \leqq b$ in $(n-1)$ *gleiche* Teilintervalle der Länge $\lambda = \frac{b-a}{n-1}$ geteilt ist. Dann ist:

$$\alpha_1 = a,\ \alpha_2 = a + \lambda,\ \alpha_3 = a + 2\lambda, \ldots,\ \alpha_n = a + (n-1)\lambda = b,$$

und die ganze Funktion n^{ten} Grades $g(x)$ ist:

$$g(x) = (x-a)(x-a-\lambda)(x-a-2\lambda)\cdots(x-a-(n-1)\lambda).$$

In diesem Falle findet man aus (5) leicht für $1 < k < n$:

$$g'(\alpha_k) = (k-1)\lambda\cdot(k-2)\lambda\cdots\lambda\cdot(-\lambda)(-2\lambda)\cdots(-(n-k)\lambda),$$
$$g'(\alpha_k) = (-1)^{n-k}(n-k)!\,(k-1)!\,\lambda^{n-1},$$

eine Regel, die auch für $k=1$ und $k=n$ gilt, wenn man $0! = 1$ setzt. Für die Näherungsfunktion gilt nun die Darstellung:

$$h(x) = \frac{1}{\lambda^{n-1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\beta_k}{(n-k)!\,(k-1)!}\,g_k(x), \tag{8}$$

an die wir später anknüpfen.

Als Beispiel betrachten wir $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ und nehmen $n = 3$, so daß $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta_3 = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ und

$$g(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$$

zu setzen ist. Die Gleichung (8) ergibt als Näherungsfunktion zweiten Grades:

$$h(x) = (-1 + 2\sqrt{2})x - 2(-1+\sqrt{2})x^2. \tag{9}$$

Zur Probe stellen wir die Werte nebeneinander:

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = 0{,}57\cdots,\ h\left(\tfrac{1}{3}\right) = 0{,}51\cdots \text{ und } f\left(\tfrac{2}{3}\right) = 0{,}81\cdots,\ h\left(\tfrac{2}{3}\right) = 0{,}85\cdots.$$

Sehr lehrreich ist es, die beiden Kurven der Funktionen $f(x)$ und $h(x)$ miteinander zu vergleichen; in Fig. 39 ist die Kurve der Funktion $f(x)$ ausgezogen, die „Näherungskurve" dagegen punktiert. Beide Kurven sind Parabeln, die in der Tat im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ dicht nebeneinander herlaufen, aber außerhalb dieses Intervalles alsbald weit auseinander gehen. Bemerkenswert ist, daß die Näherungskurve im Teilintervall $0 < x < \frac{1}{2}$ unterhalb der Kurve der Funktion $f(x)$ verläuft, im Teilintervall $\frac{1}{2} < x < 1$ jedoch über derselben, was die obigen Zahlenangaben für $x = \frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ bestätigen. Hätten wir demnach die Aufgabe, den Inhalt des Flächenstücks zu bestimmen, das über dem Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ der x-Achse liegt und oben durch die Kurve der Funktion $f(x)$ begrenzt ist, so würden, wenn wir bei Lösung der Aufgabe $f(x)$ durch die Näherungsfunktion $h(x)$ ersetzen, die Unterschiede, die bei den einzelnen Ordinaten vorliegen, für die beiden Inhaltszahlen (den genauen und den angenäherten Inhalt) wenigstens teilweise ausgeglichen werden. Im Gebiete der Flächenbestimmungen liegt denn auch die wichtigste Verwendung der Interpolationsformel (6), worauf wir später ausführlich zurückkommen.

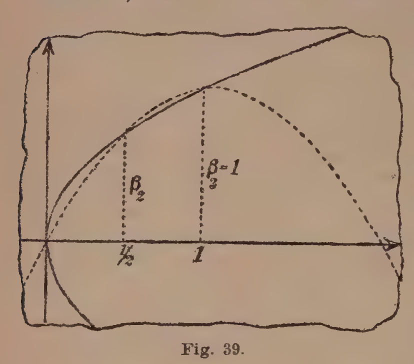


Fig. 39.

2. Die Lehrsätze von Taylor und Mac Laurin. Eine zweite Methode, irgend eine der Berechnung zunächst unzugängliche Funktion $f(x)$ durch eine rationale ganze Näherungsfunktion $g(x)$ vom Grade $(n-1)$ zu ersetzen, gründet man auf die Forderung, *daß an irgend einer vorgeschriebenen Stelle $x = a$ der Funktionswert $g(a) = f(a)$ sein soll, und daß hier auch noch die $(n-1)$ ersten Ableitungen von $g(x)$ mit denen von $f(x)$ übereinstimmen sollen:*

(1) $$g'(a) = f'(a), \; g''(a) = f''(a), \ldots, g^{(n-1)}(a) = f^{(n-1)}(a).$$

Die Näherungsfunktion $g(x)$, welche dieser Forderung entspricht, ist sofort angebbar; sie hat die Gestalt:

(2) $$g(x) = f(a) + f'(a)\cdot\frac{x-a}{1!} + f''(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(a)\cdot\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Hier gilt nämlich erstlich $g(a) = f(a)$, und wir finden andrerseits für irgend eine der Ableitungen $g'(x), g''(x), \ldots, g^{(n-1)}(x)$:

$$g^{(k)}(x) = f^{(k)}(a) + f^{(k+1)}(a)\cdot\frac{x-a}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(a)\cdot\frac{(x-a)^{n-k-1}}{(n-k-1!)},$$

so daß die Gleichungen (1) erfüllt sind; daß aber $g(x)$ eine ganze Funktion „höchstens" $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, leuchtet aus der rechten Seite von (2) direkt ein.[1])

Diese Näherungsfunktion $g(x)$ ist für die Berechnung von $f(x)$ deshalb von größter Wichtigkeit, weil es sehr leicht gelingt, den „Rest":

$$(3) \qquad R_n = f(x) - g(x),$$

welcher übrig bleibt, wenn wir vom Funktionswerte $f(x)$ den Näherungswert $g(x)$ der Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades abziehen, in eine zugängliche Gestalt zu setzen. Man wolle zu diesem Zwecke bei stehendem Werte von x den Ausdruck:

$$(4) \quad \varphi(u) = f(x) - f(u) - f'(u)\cdot\frac{x-u}{1!} - f''(u)\cdot\frac{(x-u)^2}{2!} - \cdots - f^{(n-1)}(u)\cdot\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}$$

als Funktion von u betrachten und den Mittelwertsatz (6) S. 129, bezogen auf das Intervall $a \leqq u \leqq x$ bzw. $x \leqq u \leqq a$, auf $\varphi(u)$ anwenden. Damit $\varphi(u)$ in diesem Intervalle eindeutig und stetig ist, wollen wir annehmen, daß die Ableitungen $f'(u), f''(u), \ldots, f^{(n-1)}(u)$ existieren, sowie daß $f(u)$ und diese Ableitungen im fraglichen Intervalle eindeutig und stetig sind. Um den Mittelwertsatz anwenden zu können, möge auch noch $f^{(n)}(u)$ im Intervall existieren und stetig sein; dann gilt nämlich dasselbe für die Ableitung $\varphi'(u)$ der Funktion $\varphi(u)$. Aus dem Mittelwertsatze (6) S. 129 folgt nun für die vorliegende Funktion:

$$(5) \qquad \varphi(x) - \varphi(a) = \frac{x-a}{m(1-\vartheta)^{m-1}} \cdot \varphi'(a + \vartheta(x-a)),$$

wo m als positive ganze Zahl willkürlich wählbar ist und ϑ eine allgemein nicht näher bestimmbare Zahl des Intervalles $0 < \vartheta < 1$ bedeutet. Differenzieren wir die in (4) gegebene Funktion $\varphi(u)$ nach u, so ist vom dritten Gliede rechter Hand ab die „Produktregel" anzuwenden. Dabei zeigt sich, daß sich im Ergebnis je zwei aufeinander folgende Glieder aufheben bis auf ein letztes allein übrigbleibendes Glied:

$$(6) \qquad \varphi'(u) = -\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u).$$

Übrigens folgt aus (4), (3) und (6):

$$\varphi(x) = 0, \qquad \varphi(a) = f(x) - g(x) = R_n,$$

$$\varphi'(a + \vartheta(x-a)) = -\frac{(x-a-\vartheta(x-a))^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \vartheta(x-a)).$$

1) Es läßt sich auch leicht zeigen, daß die Funktion (2) die einzige ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, welche der gestellten Forderung entspricht. Doch ist dieser Umstand für die nächsten Entwicklungen des Textes ohne Bedeutung.

Die Gleichung (5) liefert daraufhin nach einer einfachen Zwischenrechnung:

$$(7) \qquad R_n = \frac{(x-a)^n (1-\vartheta)^{n-m}}{(n-1)! \cdot m} \cdot f^{(n)}(a + \vartheta(x-a)).$$

Aus den verschiedenen hiermit zur Verfügung stehenden Formen von R_n greifen wir die beiden für $m = n$ und $m = 1$ heraus, denen die Zahlen ϑ und ϑ' entsprechen mögen. Indem wir sodann $f(x) = g(x) + R_n$ schreiben, ergibt sich der nach Taylor benannte Lehrsatz: *Hat die im Intervall $a \leqq u \leqq x$ bzw. $x \leqq u \leqq a$ eindeutige und stetige Funktion $f(u)$ Abteitungen $f'(u)$, $f''(u)$, ... bis zur n^{ten} Ordnung $f^{(n)}(u)$, die daselbst gleichfalls eindeutig und stetig sind, so gilt für die Darstellung von $f(x)$ durch die Näherungsfunktion $g(x)$:*

$$(8) \quad f(x) = f(a) + f'(a) \cdot \frac{x-a}{1!} + f''(a) \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(a) \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

wobei wir für das „Restglied" R_n dieser sogenannten „Taylorschen Formel" als erste oder nach „Lagrange" benannte Gestalt:

$$(9) \qquad R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \vartheta(x-a)), \qquad 0 < \vartheta < 1$$

anmerken und als zweite oder nach „Cauchy" benannte Gestalt:

$$(10) \qquad R_n = \frac{(x-a)^n (1-\vartheta')^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(a + \vartheta'(x-a)), \qquad 0 < \vartheta' < 1.$$

Der besondere Fall $a = 0$ liefert den nach Mac Laurin benannten Lehrsatz: *Hat die im Intervall $0 \leqq u \leqq x$ bzw. $x \leqq u \leqq 0$ eindeutige und stetige Funktion $f(u)$ Ableitungen $f'(u)$, $f''(u)$, ... bis zur n^{ten} Ordnung $f^{(n)}(u)$, die daselbst gleichfalls eindeutig und stetig sind, so gilt die „Mac Laurinsche Formel":*

$$(11) \quad f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(0) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

wobei die beiden den Ausdrücken (9) und (10) entsprechenden Gestalten des „Restgliedes" R_n die folgenden sind:

$$(12) \qquad R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\vartheta x), \qquad R_n = \frac{x^n (1-\vartheta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\vartheta' x).$$

Die Taylorsche Formel kleidet man vielfach in eine etwas andere Gestalt. Setzt man $x = a + h$, so ergibt sich aus (8) eine Entwicklung von $f(a+h)$ nach Potenzen von h. Setzen wir an Stelle von a erneut x ein, so folgt etwa unter Benutzung des Lagrangeschen Restgliedes als Gestalt der Taylorschen Formel:

$$(13) \qquad f(x+h) = f(x) + f'(x) \frac{h}{1!} + f''(x) \frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(x) \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x + \vartheta h) \frac{h^n}{n!},$$

deren Gültigkeitsbedingungen sich aus den oben angegebenen leicht entnehmen lassen. Für $n = 1$ kommen wir auf den Mittelwertsatz (9) S. 129 zurück und können demnach in Gleichung (13) auch eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes sehen.

Die Brauchbarkeit von $g(x)$ als Näherungsfunktion zur Berechnung von $f(x)$ hängt nun offenbar von dem Verhalten des Restgliedes R_n ab. Wir nehmen an, daß in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ oder $b \leqq x \leqq a$ der Ansatz (8) für jedes endliche n gültig sei, und daß wir die Werte $f(a)$, $f'(a), f''(a), \ldots$ sämtlich bereits kennen. *Wenn alsdann für ein einzelnes x sich zeigen läßt, daß die Werte R_n mit wachsendem n eine Zahlenreihe mit der Grenze 0 darstellen:*

$$(14) \qquad \lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

so liefern die Näherungsfunktionen $g(x)$ wachsender Grade $(n-1)$ eine Zahlenreihe mit der Grenze $f(x)$, und wir können also durch ausreichend groß gewähltes n einen Näherungswert $g(x)$ für $f(x)$ mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit angeben. Ist aber für das fragliche x die Bedingung (14) nicht erfüllt, so hat eben die Reihe der Funktionswerte $g(x)$ nicht die Grenze $f(x)$, und die in Ansatz gebrachte Methode zur Berechnung von Näherungswerten für $f(x)$ versagt.

3. Berechnung der Basis e der natürlichen Logarithmen. Um die Brauchbarkeit der in § 2 entwickelten Ansätze für numerische Rechnungen darzulegen, wählen wir als erstes Beispiel die natürliche *Exponentialfunktion* $f(x) = e^x$. Hier ist für jedes endliche n wieder $f^{(n)}(x) = e^x$, so daß die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Mac Laurinschen Formel (11) S. 168 für jedes endliche x und jedes n erfüllt sind. Unter Benutzung der ersten Gestalt des Restgliedes ergibt sich:

$$(1) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \cdot e^{\vartheta x},$$

da hier in einfachster Weise $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1, \ldots$ zutrifft.

Um das Verhalten des Restgliedes R_n bei wachsendem n zu untersuchen, denken wir x irgendwie fest gewählt und betrachten von vornherein nur ganze Zahlen n, welche $> |x|$ sind. Es sei etwa l die kleinste ganze Zahl, welche nicht kleiner als $|x|$ ist. Wir schreiben dann $n = l + m$ und vollziehen den Grenzübergang $\lim n = \infty$ dadurch, daß wir $\lim m = \infty$ vorschreiben. Für eine beliebige positive ganze Zahl m können wir $R_n = R_{l+m}$ so zerlegen:

$$(2) \qquad R_n = R_{l+m} = \frac{x^l}{l!} \cdot e^{\vartheta x} \cdot \frac{x}{l+1} \cdot \frac{x}{l+2} \cdots \frac{x}{l+m}.$$

Da ϑ zwischen 0 und 1 liegt und die Exponentialfunktion nur positive, mit wachsendem x wachsende Werte hat, so ist sicher:

$$|e^{\vartheta x}| < e^{|x|}.$$

Berechnen wir uns demnach für das gewählte x die *endliche* Zahl:

$$\frac{|x|^l}{l!} \cdot e^{|x|} = L,$$

so folgt aus (2):

$$|R_{l+m}| < L \cdot \left|\frac{x}{l+1}\right| \cdot \left|\frac{x}{l+2}\right| \cdots \left|\frac{x}{l+m}\right|.$$

Unter den m letzten Faktoren rechter Hand hat der erste den größten Wert. Nennen wir diesen Wert c, so folgt aus $|x| \leqq l$ sofort $0 < c < 1$. Für den absoluten Wert von R_{l+m} aber findet sich:

$$|R_{l+m}| < L \cdot c^m.$$

Da nun die Potenzen des bestimmten echten Bruches c nach S. 9 eine monoton gegen die Grenze 0 abnehmende Zahlenreihe liefern, so ist auch $\lim\limits_{m=\infty} R_{l+m} = \lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$. *Das Restglied R_n der Entwicklung* (1) *der natürlichen Exponentialfunktion e^x nähert sich bei beliebig gewähltem x für* $\lim n = \infty$ *der Grenze* 0, *so daß man auf die Darstellung* (1) *Näherungsrechnungen für e^x gründen kann.*

Für $x = 1$ liefert die Gleichung (1) folgende Darstellung der Basis e der natürlichen Logarithmen:

$$(3) \qquad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\vartheta}{n!},$$

aus welcher man Näherungswerte für e mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit berechnen kann. Man prüfe z. B., welche Genauigkeit mit der Wahl $n = 12$ erreichbar ist, wobei man nach den Näherungsrechnungen von S. 34 setzen kann $e^\vartheta < e < 2{,}8$. Man findet:

$$R_{12} = \frac{e^\vartheta}{12!} < 0{,}000\,000\,0021 \cdot 2{,}8$$

und also $R_{12} < 0{,}000\,000\,006$, d. h. kleiner als 6 Einheiten der neunten Dezimalstelle. Berechnen wir demnach die Glieder der rechten Seite von (3) auf neun Stellen, so ist:

$$2 + \frac{1}{2!} = 2{,}500\,000\,000$$

$$\frac{1}{3!} = 0{,}166\,666\,66\underline{7}$$

$$\frac{1}{4!} = 0{,}041\,666\,66\underline{7}$$

$$\frac{1}{5!} = 0{,}008\,333\,333$$

$$\frac{1}{6!} = 0{,}001\,388\,88\underline{9}$$

$$\frac{1}{7!} = 0{,}000\,198\,41\underline{3}$$

$$\frac{1}{8!} = 0{,}000\,024\,80\underline{2}$$

$$\frac{1}{9!} = 0{,}000\,002\,75\underline{6}$$

$$\frac{1}{10!} = 0{,}000\,000\,27\underline{6}$$

$$\frac{1}{11!} = 0{,}000\,000\,025.$$

Ein Strich unter der letzten Ziffer bedeutet, daß der Näherungswert um weniger als die Hälfte der Einheit der letzten Stelle zu groß ist, während er in den übrigen Fällen, abgesehen von der exakten Angabe der ersten Gleichung, um weniger als die Hälfte einer Einheit der letzten Stelle zu klein ist. Demzufolge ergibt die Addition der vorstehenden zehn Gleichungen:

$$2{,}718\,281\,825\,5 < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{11!} < 2{,}718\,281\,829.$$

Mit Rücksicht auf die für die positive Zahl R_{12} oben schon angegebene Schranke folgt hieraus weiter:

$$2{,}718\,281\,825\,5 < e < 2{,}718\,281\,835.$$

Wir erzielen also durch die Auswahl $n = 12$ Sicherheit bis zur siebenten Dezimalstelle $e = 2{,}7182818\ldots$, womit insoweit zugleich die Angabe (8) S. 12 bestätigt ist.

Für numerische Berechnungen von e^x bei Werten von x, die nicht nahe bei 0 liegen, ist die Formel (1) ungeeignet, da die für brauchbare Näherungswerte von e^x zu benutzende Gliederanzahl n mit wachsendem x schnell steigt. Übrigens wird auch die Berechnung von e^x dadurch überflüssig, daß wir alsbald ausführlich auf die Berechnung der zu e^x inversen Funktion $\ln x$ eingehen.

4. Berechnung der trigonometrischen Funktionen. Für die Überlegenheit der Mac Laurinschen Formel bei numerischen Rechnungen gegenüber den Methoden der Einleitung (s. S. 62 ff.) ist das Beispiel der trigonometrischen Funktionen besonders lehrreich. Da man $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ als Quotienten von $\sin x$ und $\cos x$ darstellen kann, so darf man

sich auf die Berechnung von $\sin x$ und $\cos x$ beschränken. Ist erstlich $f(x) = \sin x$, so stellten wir bereits S. 134 fest, daß:

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, \qquad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$$

ist, woraus sich $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ ergibt. Die Mac Laurinsche Formel (11) S. 168 lautet demnach für $\sin x$, falls wir in jener Formel die Zahl n durch $(2n+1)$ ersetzen:

$$(1)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos(\vartheta x),$$

und man findet entsprechend für die Funktion $\cos x$:

$$(2)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos(\vartheta' x).$$

Da $|\cos(\vartheta x)| \leqq 1$ für jedes x gilt, so erledigt sich die Frage nach dem Verhalten des Restgliedes R_n bei wachsendem n durch die Rechnung von S. 169 ff. sogleich mit: *Für jedes beliebig gewählte x erfüllen die Restglieder der Formeln* (1) *und* (2) *die Bedingung:*

$$\lim R_n = 0,$$

so daß man in beiden Fällen Näherungsfunktionen gewinnt.

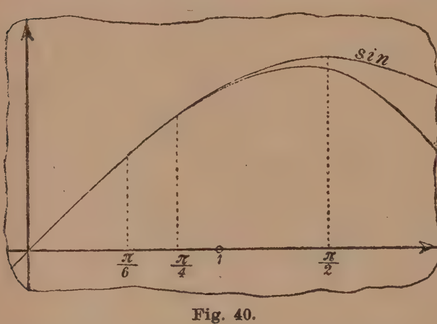


Fig. 40.

Um die Annäherung zu veranschaulichen, die im Falle der Funktion $\sin x$ bereits für $n = 2$ erzielt wird, sind in Fig. 40 die Kurven der beiden Funktionen $y = \sin x$ und $y = x - \frac{1}{6}x^3$ gezeichnet. Die Annäherung ist jedenfalls für die Werte x zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ sehr gut. Noch günstiger gestaltet sich, wie Fig. 41 zeigt, die Annäherung der Kurve der Funktion $y = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ an die Kosinuskurve, *so daß man für hinreichend kleine Argumente x ohne wesentlichen Fehler* $\sin x$ *und* $\cos x$ *durch die ganzen rationalen Näherungsfunktionen ersetzen kann:*

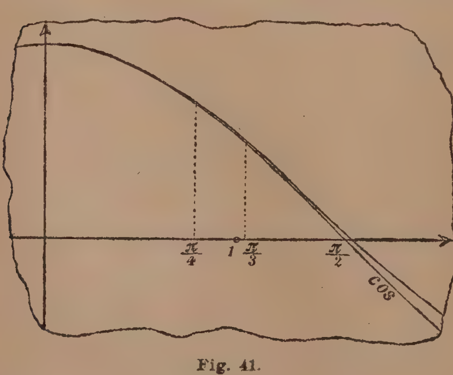


Fig. 41.

$$y = x - \frac{1}{6}x^3,$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

Dieses Ergebnis ist um so

günstiger, als es bekanntlich genügt, die Werte der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ zu kennen, um von da aus auf Grund elementarer Beziehungen alle Werte der trigonometrischen Funktionen berechnen zu können. Um eine Probe für die hier in Betracht kommenden Rechnungen zu geben, möge $\sin 27^{\underline{0}}$ berechnet werden. Der S. 51 angegebene Wert:

$$\operatorname{arc} 1^{\underline{0}} = 0{,}017\,453\,293$$

ist um etwas weniger als die Hälfte einer Einheit der neunten Stelle zu groß. Das 27-fache dieser Zahl wird also in den beiden letzten Stellen unsicher, so daß wir uns mit dem bis zur siebenten Stelle genauen Werte:

$$(3) \qquad x = \operatorname{arc} 27^{\underline{0}} = 0{,}471\,2389$$

begnügen müssen. Eine größere Genauigkeit können wir demnach auch für $\sin x$ auf diesem Wege nicht erzielen. Nun ist aber, wenn wir die Gleichung (1) für $n = 4$ bilden, das Restglied zwischen 0 und 0,000 000 005 gelegen. Wir erhalten also einen auf sieben Stellen gesicherten Wert, wenn wir setzen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

Unter Benutzung der S. 170ff. angegebenen reziproken Werte von 3!, 5! und 7! findet man für das in (3) berechnete Argument x auf diese Weise:

$$\sin 27^0 = 0{,}453\,9906$$

und daraus mit Hilfe einer siebenstelligen Logarithmentafel:

$$^{10}\log \sin 27^{\underline{0}} = 9{,}657\,0468 - 10,$$

ein Ergebnis, das durch eine siebenstellige trigonometrische Tafel bestätigt wird.

5. Berechnung der Logarithmen. Die Funktion $f(x) = \ln x$ hat für $x = 0$ keinen endlichen Wert und befriedigt demnach nicht die Vorbedingungen für die Gültigkeit der Mac Laurinschen Formel (11) S. 168. Demgegenüber ist die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ mit ihren in (7) S. 134 angegebenen Ableitungen aller endlichen Ordnungen n in jedem Intervalle $-1 < a \leqq x \leqq b$ eindeutig und stetig, und es folgt aus der genannten Formel (7) S. 134 für jedes n der Wert $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Hier also können wir den Ansatz (11) S. 168 heranziehen und finden:

$$(1) \qquad \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n,$$

wobei wir für das Restglied die beiden Gestalten (12) S. 168 notieren:

$$(2) \qquad R_n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\cdot\frac{1}{(1+\vartheta x)^n}, \quad R_n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{1+\vartheta' x}\left(\frac{1-\vartheta'}{1+\vartheta' x}\right)^{n-1}.$$

Gehört x dem Intervalle $0 < x \leqq 1$ an, so gilt $1 + \vartheta x > 1$, so daß zufolge der ersten Gleichung (2) die Bedingung $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ erfüllt ist. Ist hingegen $-1 < x < 0$, so ziehen wir durch Multiplikation dieser Ungleichung mit der *positiven* Zahl ϑ' die Folgerungen:

$$-\vartheta' < \vartheta' x, \qquad 0 < 1 - \vartheta' < 1 + \vartheta' x$$

und daraus die Ungleichungen:

$$0 < \frac{1 - \vartheta'}{1 + \vartheta' x} < 1. \tag{3}$$

Andrerseits folgt durch Multiplikation der Ungleichung $\vartheta' < 1$ mit der jetzt positiven Zahl $-x$:

$$-\vartheta' x < -x, \qquad x < \vartheta' x, \qquad 0 < 1 + x < 1 + \vartheta' x$$

und also weiter:

$$0 < \frac{1}{1 + \vartheta' x} < \frac{1}{1 + x}. \tag{4}$$

Für jedes bestimmte, dem Intervalle $-1 < x < 0$ entnommene x gilt demnach zufolge der zweiten Gestalt (2) von R_n wegen der darin auftretenden Potenz x^n mit Rücksicht auf (3) und (4) wieder $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, besteht für $|x| > 1$ die Bedingung $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ nicht mehr: *Nur im Intervalle* $-1 < x \leqq +1$ *können wir auf die Mac Laurinsche Formel* (1) *Näherungsrechnungen für den natürlichen Logarithmus* $\ln(1 + x)$ *gründen.*

Da man nun für logarithmische Rechnungen nur die Logarithmen der ganzzahligen Numeri $\ln 2, \ln 3, \ln 4, \ldots$ zu kennen braucht, so versagt zunächst der Ansatz (1) gerade in den Fällen, für welche man die Berechnung der Logarithmen durchzuführen hätte. Nur für den niedersten Fall $x = 1$ haben wir noch $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ und könnten Näherungsrechnungen für $\ln 2$ auf die Formel gründen:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{1}{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+\vartheta)^n}.$$

Doch sind auch diese Rechnungen praktisch undurchführbar; denn wenn wir einen Näherungswert haben wollen, der von dem wahren Werte $\ln 2$ um weniger als eine Einheit auch nur der dritten Dezimalstelle absteht, so müßten wir, wie aus der Bauart des Restgliedes folgt, bereits $n > 1000$ nehmen. Wir können also auch nicht einmal $\ln 2$ mit einem brauchbaren Näherungswerte aus dem Ansatze (1) berechnen.

Gleichwohl erweist sich der Ansatz (1) durch eine Kette von Hilfsbetrachtungen verwendungsfähig. Zunächst wollen wir unter der Vor-

aussetzung eines dem Intervalle $0 < x < 1$ angehörigen Wertes x neben die Formel (1) noch eine zweite ähnliche Gleichung reihen. Da die Formel (1) sowohl für das gewählte x als auch für $-x$ angesetzt werden darf, so schreiben wir, indem wir das eine Mal die erste, das andere Mal die zweite Gestalt (2) für R_n benutzen und übrigens an Stelle der beliebigen Anzahl n sogleich die ungerade Zahl $(2n+1)$ treten lassen:

$$(5)\quad \begin{cases} \ln(1+x) = +x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots - \dfrac{x^{2n}}{2n} + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\vartheta_1, \\ \ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \cdots - \dfrac{x^{2n}}{2} - \dfrac{x^{2n+1}}{1-x}\cdot\vartheta_2, \end{cases}$$

wo die beiden Zahlen ϑ_1 und ϑ_2 dem Intervalle $0 < \vartheta < 1$ angehören. Im ersten Falle ist nämlich einfach $(1+\vartheta x)^{-2n-1} = \vartheta_1$ gesetzt; im zweiten Falle ist ϑ_2 erklärt durch:

$$\frac{1-x}{1-\vartheta' x}\left(\frac{1-\vartheta'}{1-\vartheta' x}\right)^{2n} = \vartheta_2,$$

eine Zahl, von der wir durch die oben für positives x und also negatives, dem Intervalle $-1 < -x < 0$ angehörendes $-x$ durchgeführte Rechnung erkennen, daß sie zwischen 0 und 1 liegt. Durch Substration der zweiten Gleichung (5) von der ersten ergibt sich die in Aussicht genommene Formel in der Gestalt:

$$(6)\quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + x^{2n+1}\left(\frac{\vartheta_1}{2n+1} + \frac{\vartheta_2}{1-x}\right).$$

Auf Grund dieser Formel kann man bereits numerische Rechnungen mit Erfolg unternehmen. So gilt z. B. für $x = \frac{1}{3}$:

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}\right) + \frac{1}{3^{2n+1}}\left(\frac{\vartheta_1}{2n+1} + \frac{3}{2}\vartheta_2\right);$$

hier würde etwa für $n = 5$ das Restglied bereits kleiner als 10^{-5} ausfallen.

Um $\ln N$ für irgend einen ganzzahligen Numerus N zu berechnen, hat man $x = \dfrac{N-1}{N+1}$ in (6) einzutragen, einen Wert, der der Forderung $0 < x < 1$ entspricht. Leider aber nähern sich diese Werte x mit wachsendem N der Einheit. Das hat zur Folge, daß das Restglied der Entwicklung (6) um so langsamer gegen 0 abnimmt, je größer der Numerus N ist; man muß also die Zahl n immer größer wählen, d. h. immer mehr Glieder der Entwicklung (6) ausrechnen, um für die steigenden Numeri N brauchbare Näherungswerte $\ln N$ zu erhalten.

Man könnte diesem ungünstigen Umstande dadurch begegnen, daß man die Logarithmen der ganzzahligen Numeri N auf folgende Art re-

kurrent zu berechnen versucht. Durch Eintragung von $x = \frac{1}{N}$ in (1) folgt leicht:

$$(7)\quad \ln(N+1) = \ln N + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)N^{n-1}} + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(N+\vartheta)^n},$$

und in ähnlicher Art gewinnt man durch Eintragung von $x = \frac{1}{2N+1}$ in (6):

$$(8)\quad \ln(N+1) = \ln N + 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2N+1)^{2n-1}}\right) + \frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}\left(\frac{\vartheta_1}{2n+1} + \frac{2N+1}{2N}\vartheta_2\right).$$

In diesen Formeln nehmen die Restglieder, zumal wenn N nicht mehr ganz klein ist, mit wachsendem n außerordentlich schnell ab, so daß man durch eine kurze Rechnung den Wert $\ln(N+1)$ aus $\ln N$ berechnen kann.

Aber auch bei diesen Rekursionsrechnungen stellt sich eine Schwierigkeit ein. Wir nehmen an, daß für $\ln N$ der genaueste bei ν Dezimalstellen erreichbare Näherungswert $(\ln N)_0$ bekannt sei, so daß die Differenz $\ln N - (\ln N)_0$, absolut genommen, kleiner als die Hälfte einer Einheit der ν^{ten} Stelle ist:

$$\ln N = (\ln N)_0 + \tfrac{1}{2}\eta \cdot 10^{-\nu}, \qquad -1 < \eta < +1;$$

auch sei bekannt, ob $(\ln N)_0$ zu klein oder zu groß ist, d. h. ob $\eta > 0$ oder < 0 ist. Die Differenz $D = \ln(N+1) - \ln N$ denken wir aus (7) oder (8) berechnet und schreiben:

$$D = D_0 + \vartheta \cdot 10^{-\nu}, \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

wo D_0 die von den ersten ν Dezimalstellen gelieferte Zahl ist und also ϑ zwischen den Schranken 0 und 1 liegt. Nun ist:

$$(9)\qquad \ln(N+1) = (\ln N)_0 + D_0 + (\vartheta + \tfrac{1}{2}\eta)\cdot 10^{-\nu},$$

und es sei $(\ln(N+1))_0$ wieder der Näherungswert, welcher von $\ln(N+1)$ um weniger als die Hälfte einer Einheit der ν^{ten} Stelle absteht. Dann gilt zufolge (9), falls $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ und $\eta < 0$ ist, $(\ln(N+1))_0 = (\ln N)_0 + D_0$ und, falls $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ und $\eta > 0$ ist, $(\ln(N+1))_0 = (\ln N)_0 + D_0 + 10^{-\nu}$; indessen wissen wir, da η nicht näher bekannt ist, weder im einen noch im anderen Falle, ob der Näherungswert $> \ln(N+1)$ oder $< \ln(N+1)$ ist. Ist hingegen $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ und $\eta > 0$ oder $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ und $\eta < 0$, so wissen wir nicht einmal, ob der Näherungswert $(\ln(N+1))_0$ durch $(\ln N)_0 + D_0$ oder durch $(\ln N)_0 + D_0 + 10^{-\nu}$ gegeben ist. In jedem

Falle wird also bei zweimaliger Anwendung der Rekursionsformel die ν^{te} Dezimalstelle unsicher. Auch ist einleuchtend, daß bei weiterer Fortsetzung der Rekursionsrechnung die Unsicherheit der Ergebnisse beständig größer wird.

Man ist nun, um all diesen Umständlichkeiten zu begegnen, folgenden Weg gegangen: Zunächst hat man sich durch einen Kunstgriff sehr genaue Werte für die Logarithmen der niedersten Primzahlen 2, 3, 5, 7 verschafft.[1]) Es ist nämlich:

$$\ln\frac{10}{9} = +\ln 2 - 2\cdot\ln 3 + \ln 5\,,$$

$$\ln\frac{25}{24} = -3\cdot\ln 2 - \ln 3 + 2\cdot\ln 5\,,$$

$$\ln\frac{81}{80} = -4\cdot\ln 2 + 4\cdot\ln 3 - \ln 5\,,$$

da man $\frac{10}{9} = 2\cdot 3^{-2}\cdot 5$ usw. setzen kann. Hieraus findet man durch Auflösung nach $\ln 2$, $\ln 3$ und $\ln 5$:

$$\text{(10)}\qquad \begin{cases} \ln 2 = 7\ln\frac{10}{9} - 2\ln\frac{25}{24} + 3\ln\frac{81}{80}, \\ \ln 3 = 11\ln\frac{10}{9} - 3\ln\frac{25}{24} + 5\ln\frac{81}{80}, \\ \ln 5 = 16\ln\frac{10}{9} - 4\ln\frac{25}{24} + 7\ln\frac{81}{80}. \end{cases}$$

Für die rechts stehenden Logarithmen folgt aber aus (1) und (2):

$$\ln\frac{10}{9} = -\ln\left(1-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2\cdot 10^2} + \frac{1}{3\cdot 10^3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\,10^{n-1}} + \frac{1}{n(10-\vartheta)^n},$$

$$\ln\frac{25}{24} = -\ln\left(1-\frac{4}{100}\right) = \frac{4}{100} + \frac{4^2}{2\cdot 100^2} + \cdots + \frac{4^{n-1}}{(n-1)\,100^{n-1}} + \frac{4^n}{n(100-4\,\vartheta)^n},$$

$$\ln\frac{81}{80} = \ln\left(1+\frac{125}{10000}\right) = \frac{125}{10000} - \frac{125^2}{2\cdot 10000^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}\cdot 125^{n-1}}{(n-1)\cdot 10000^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 125^n}{n(10000+125\,\vartheta)^n}.$$

Diese Darstellungen sind dadurch ausgezeichnet, daß die Restglieder sich sehr schnell dem Werte 0 nähern, sowie auch dadurch, daß die einzelnen zu berechnenden Glieder der rechten Seiten infolge der in den Nennern auftretenden Potenzen von 10 sehr leicht in Dezimalbrüchen angebbar sind. Um z. B. auf 12 Dezimalstellen gesicherte Werte für $\ln\frac{10}{9}, \cdots$ zu

1) Die Rechnungen sind hier sogar bis auf 262 Dezimalstellen getrieben.

finden, genügt es, in den drei letzten Gleichungen $n = 12$ bzw. $n = 9$ und $n = 7$ zu nehmen; man berechnet in ziemlich kurzer Zeit:

$$\ln\frac{10}{9} = 0{,}105\,360\,515\,65\underline{8},$$

$$\ln\frac{25}{24} = 0{,}040\,821\,994\,520,$$

$$\ln\frac{81}{80} = 0{,}012\,422\,519\,99\underline{9},$$

Hier sind der erste und dritte Näherungswert um weniger als die Hälfte einer Einheit der zwölften Stelle zu groß, der zweite Näherungswert ist um einen solchen Betrag zu klein. Tragen wir demnach diese Werte in (10) rechts ein, so sind die zu gewinnenden Näherungswerte für ln 2, ln 3, ln 5 größer als die genauen Werte dieser Logarithmen; aber die Überschüsse sind kleiner als 6 bzw. 10 und 14 Einheiten der 12ten Stelle:

$$0{,}693\,147\,180\,563 > \ln 2 > 0{,}693\,147\,180\,557,$$

$$1{,}098\,612\,288\,673 > \ln 3 > 1{,}098\,612\,288\,663,$$

$$1{,}609\,437\,912\,441 > \ln 5 > 1{,}609\,437\,912\,427.$$

Tatsächlich sind die bei 12 Dezimalstellen erreichbaren genauesten Werte:

$$(11)\qquad \begin{cases} \ln 2 = 0{,}693\,147\,180\,5\underline{60}, \\ \ln 3 = 1{,}098\,612\,288\,668, \\ \ln 5 = 1{,}609\,437\,912\,434; \end{cases}$$

dieses sind übrigens in allen drei Fällen die arithmetischen Mittel der berechneten Schranken. Für die Berechnung von ln 7 setze man an:

$$\ln 7 = \frac{1}{2}\ln 49 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 + 2\ln 5 + \ln\frac{49}{50}\right)$$

und berechne das letzte Glied rechter Hand aus:

$$\ln\frac{49}{50} = \ln\left(1 - \frac{2}{100}\right) = -\frac{2}{100} - \frac{2^2}{2\cdot 100^2} - \cdots - \frac{2^{n-1}}{(n-1)\cdot 100^{n-1}} - \frac{2^n}{n(100-2\vartheta)^n},$$

wobei zur Gewinnung des zwölfstelligen Näherungswertes $n = 7$ zu nehmen ist. Man findet unter Benutzung der Werte von ln 2 und ln 5:

$$(12)\qquad \ln 7 = 1{,}945\,910\,149\,055.$$

Man hat nun in der Weise weiter zu gehen, daß man etwa aus den ganzen Zahlen 2, 3, ..., 100 zunächst die 45 Zahlen herausgreift, welche sich aus den Faktoren 2, 3, 5, 7 aufbauen. Dabei sind im Höchstfalle, nämlich bei 64 und 96 sechs Faktoren zusammenzufügen, so daß z. B. bei 64, wenn wir den Näherungswert (11) für ln 2 benutzen, das Ergebnis:

$$\ln 64 = 4{,}158\,883\,083\,360$$

sicher um nicht mehr als drei Einheiten der letzten Stelle zu groß ist. Man wird sich demnach weiterhin auf 11 Stellen beschränken müssen und hat jedenfalls:

$$\ln 64 = 4{,}158\,883\,083\,3\underline{6}.$$

Für die 54 noch fehlenden ganzen Zahlen 11, 13, 17, ... zwischen 2 und 100 hat man sich dann auf Interpolationsrechnungen zu stützen, und zwar mittelst einer Formel, die man etwa aus (6) S. 175 durch Eintragung von $x = \frac{\nu}{2N+\nu}$ ableitet:

$$(13)\quad \ln(N+\nu) = \ln N + 2\left(\frac{\nu}{2N+\nu} + \frac{\nu^3}{3(2N+\nu)^3} + \cdots + \frac{\nu^{2n-1}}{(2n-1)(2N+\nu)^{2n-1}}\right) + \frac{\nu^{2n+1}}{(2N+\nu)^{2n+1}}\left(\frac{\vartheta_1}{2n+1} + \frac{2N+\nu}{2N}\,\vartheta_2\right).$$

Drei Male, nämlich bei $N = 64$, 84 und 90 hat man hierbei bis $\nu = 5$ zu gehen; im übrigen reichen kleinere Werte von ν. Nach S. 176 büßen wir bei diesen Rechnungen wieder eine Dezimalstelle ein; doch gewinnen wir auf zehn Dezimalstellen gesicherte Werte der natürlichen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 2 bis 100.

Will man den Übergang zu den dekadischen Logarithmen gewinnen und etwa eine Tabelle für die Mantissen der dekadischen Logarithmen aller vierstelligen ganzen Zahlen herstellen, so wird man zunächst im Gebiete der bisher berechneten natürlichen Logarithmen weitere nach Hundertsteln der Einheit fortschreitende Interpolationen vorzunehmen haben, indem man aus $\ln N$ wieder auf Grund der Formel (6) S. 175 die Logarithmen $\ln\left(N + \frac{\nu_1}{10} + \frac{\nu_2}{100}\right)$ berechnet, was in jedem Einzelfalle eine ziemlich kurze Rechnung ist. Erreichbar sind auf Grund der bisherigen Ergebnisse neunstellige Näherungswerte. Der Übergang zu den dekadischen Logarithmen vollzieht sich dann nach (8) S. 40 auf Grund der Formel:

$$(14)\quad {}^{10}\log N = \mu_{10}\cdot \ln N = \left(\frac{1}{\ln 10}\right)\cdot \ln N$$

durch Multiplikation mit dem „Modul" μ_{10} des Systems der dekadischen Logarithmen, d. i. dem reziproken Werte von ln 10. Ein fünfstelliger Näherungswert von μ_{10} ist in (10) S. 41 angegeben; indem wir aus (11) S. 178:

$$\frac{1}{\mu_{10}} = \ln 10 = 2{,}302\,585\,092\,994$$

entnehmen, sind wir im stande, den weit genaueren Wert:

$$(15)\quad \mu_{10} = 0{,}434\,294\,481\,903$$

zu notieren. Diese Genauigkeit hat für praktische Zwecke meist keine

Bedeutung. Will man z. B. $^{10}\log 5$ auf sieben Dezimalstellen berechnen, so genügt es, μ_{10} auf acht und $\ln 5$ auf sieben Stellen zu kürzen:

$$\mu_{10} = 0{,}434\,294\,48, \qquad \ln 5 = 1{,}609\,437\,9;$$

die abgekürzte Multiplikation liefert $^{10}\log 5 = 0{,}698\,9700$ als Näherungswert.

Die beschriebenen Rechnungen würden übrigens für die vierziffrigen ganzen Zahlen die Mantissen der dekadischen Logarithmen mit neunstelliger Sicherheit liefern. Für mehrziffrige Zahlen würde man aufs neue Interpolationsrechnungen auf die Formel (6) S. 175 zu gründen haben; sie führen zu einer sehr einfachen Regel, die der Berechnung der „partes proportionales" der Logarithmentafeln zugrunde liegt.

In den letzten drei Paragraphen, welche numerischen Entwicklungen gewidmet waren, wurden Übungsaufgaben nicht hinzugefügt. Doch ist dem Leser dringend zu empfehlen, sich selbständig Aufgaben zu suchen. So ist z. B. die Berechnung von $^{10}\log 11$ und $^{10}\log 13$ auf Grund der Ansätze:

$$^{10}\log 11 = \mu_{10}\left\{2\ln 2 - 2\ln 3 + 2\ln 5 + \ln\left(1 - \frac{1}{100}\right)\right\},$$

$$^{10}\log 13 = \mu_{10}\left\{2\ln 5 - \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{4}{100}\right)\right\}$$

eine nützliche Übung.

6. Näherungsmethoden bei der Lösung von Gleichungen. Eine wichtige Anwendung der Taylorschen Formel (13) S. 168 auf die Auflösung einer Gleichung $f(x) = 0$ mit einer Unbekannten führt auf eine „Näherungsformel" für die Lösung x, welche teilweise bereits Newton bekannt war und nach ihm als die „Newtonsche Näherungsformel" bezeichnet wird. Wir nehmen an, daß ein Näherungswert x_0 für die zu suchende Lösung x bereits bekannt sei, und daß die Differenz $h = x - x_0$ der Lösung x und des Näherungswertes x_0 eine nur wenig von 0 verschiedene Zahl sei. Gilt dann entsprechend dem allgemeinen Ansatze (13) S. 168:

$$f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\frac{h}{1!} + f''(x_0 + \vartheta h)\frac{h^2}{2!},$$

und dürfen wir wegen der Kleinheit von h das letzte Glied rechter Hand, das h^2 als Faktor hat, neben dem mittleren, das die erste Potenz von h enthält, vernachlässigen, so führt die Forderung $f(x) = 0$ auf die Gleichung $f(x_0) + f'(x_0)\cdot h = 0$, aus welcher wir h und damit die gesuchte Lösung x in der Gestalt der „Newtonschen Näherungsformel" berechnen:

$$(1) \qquad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Um diesen Gedanken zur Ausbildung eines exakten Näherungsverfahrens zu benutzen, nehmen wir an, daß zwei Näherungswerte x_0 und x_0'

für die Lösung x der Gleichung $f(x) = 0$ bekannt seien, von denen der eine größer, der andere kleiner als die Lösung x ist. Es sollen ferner die Voraussetzungen gelten, *daß die „Funktion"* $f(x)$ *und ihre beiden ersten Ableitungen* $f'(x)$ *und* $f''(x)$ *im Intervalle* $x_0 \leqq x \leqq x_0'$ *bzw.* $x_0' \leqq x \leqq x_0$ *eindeutig und stetig seien, und daß* $f'(x)$ *und* $f''(x)$ *daselbst nirgends verschwinden.*

Hieraus folgt, daß $f'(x)$ im Intervalle entweder nur positive oder nur negative Werte hat. Beide Male ist $f(x)$ monoton, und zwar im ersten Falle mit wachsendem x wachsend, im zweiten Falle abnehmend. Gehen wir auf die in (2) S. 98 angegebene geometrische Bedeutung der Ableitung $f'(x)$ zurück, so bedeutet eine mit wachsendem x abnehmende Funktion $f'(x)$, wie sie für $f''(x) < 0$ eintritt, daß der damals mit α bezeichnete Winkel bei wachsendem x gleichfalls abnimmt. Da α der Winkel zwischen der nach rechts gerichteten Tangente der Kurve von $f(x)$ und der positiven x-Achse ist, so dreht sich diese Tangente im fraglichen Falle ($f''(x) < 0$), wenn ihr Berührungspunkt im Sinne wachsender x über die Kurve hingeführt wird, im Sinne der Uhrzeigerdrehung. Der Verlauf der Kurve ist also in diesem Falle ein solcher, daß die konkave oder hohle Seite der Kurve nach unten (Richtung abnehmender y) gerichtet ist, was man sich an Fig. 42 deutlich machen wolle.

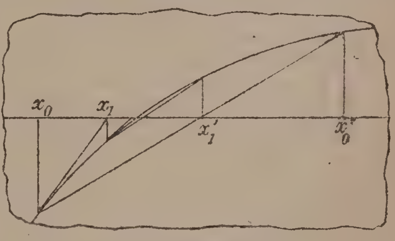


Fig. 42.

Um nun gleich in diesem Falle, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, das Annäherungsverfahren auszubilden, verstehen wir unter x_0 den kleineren Näherungswert. Dann liefert, wie man leicht feststellt, der aus der Newtonschen Formel (1) sich ergebende Näherungswert:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

den Schnittpunkt der x-Achse mit der Tangente der Kurve von $f(x)$ im Punkte der Abszisse x_0. Offenbar (Fig. 42) gilt hierbei $x_0 < x_1 < x$, unter x wieder die zu suchende Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ verstanden. Durch wiederholte Anwendung der Newtonschen Formel (Fig. 42) gewinnen wir eine Reihe von Näherungswerten:

$$(2) \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \ldots,$$

von denen die Ungleichungen feststehen:

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x.$$

Die $x_0, x_1, x_2, \ldots$ bilden also jedenfalls eine monotone Reihe wachsen-

der Zahlen, welche alle $< x$ sind. Die Reihe hat notwendig eine Grenze $\lim_{n=\infty} x_n$, von der freilich zunächst nur feststeht, daß sie $\leqq x$ ist (S. 8). Doch ist es nicht schwer einzusehen, daß hier nur das Gleichheitszeichen gelten kann. Da nämlich in unserem Falle die $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$ alle negativ sind, und die $f'(x_0), f'(x_1), f'(x_2), \ldots$ eine Reihe abnehmender positiver Zahlen darstellen, so gilt:

$$x_{k+1} - x_k = \frac{|f(x_k)|}{f'(x_k)} \geqq \frac{|f(x_k)|}{f'(x_0)},$$

wo das Gleichheitszeichen nur für $k = 0$ zutrifft. Bilden wir diese Ungleichungen für $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ und addieren sie, so folgt:

$$x_n > x_0 + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \{|f(x_0)| + |f(x_1)| + |f(x_2)| + \cdots + |f(x_{n-1})|\}.$$

Wäre nun $\lim_{n=\infty} x_n = x' < x$, so wären alle Beträge $|f(x_k)|$ größer als die positive, von 0 verschiedene Zahl $|f(x')|$, so daß die Summe auf der rechten Seite der letzten Ungleichung für $\lim n = \infty$ selber über alle Grenzen wachsen und also $\lim_{n=\infty} x_n = \infty$ entgegen der Ungleichung $x_n < x$ sein würde. Es ist also sicher $\lim_{n=\infty} x_n = x$.

Man wolle sich nun die übrigen Zeichenkombinationen $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, ferner $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ und endlich $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ gleichfalls durch Figuren veranschaulichen. Man wird dann leicht den Satz feststellen: *Treffen über $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ die oben aufgestellten Bedingungen zu, und ist x_0 der kleinere oder der größere unter den beiden x einschließenden Näherungswerten, je nachdem $f'(x)$ und $f''(x)$ von verschiedenem oder von gleichem Vorzeichen sind, so bilden die nach der Newtonschen Formel berechneten Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine monotone Reihe, deren Grenze die gesuchte Lösung x der Gleichung $f(x) = 0$ ist.*

Wenn nun auch $\lim_{n=\infty} x_n = x$ feststeht, so haben wir doch noch kein Urteil darüber, welcher Grad der Annäherung an x beim einzelnen n erreicht ist. Wir bilden demnach zunächst im Falle der Fig. 42 noch eine zweite Zahlenreihe, mit der wir uns der Grenze x von der anderen Seite her annähern. Setzen wir abkürzend $f(x_0) = y_0$, $f(x_0') = y_0'$, so stellt sich die die beiden Kurvenpunkte (x_0, y_0) und (x_0', y_0') verbindende Sehne durch die Gleichung:

$$x(y_0 - y_0') + y(x_0' - x_0) + (x_0 y_0' - x_0' y_0) = 0$$

dar. Als zweiten Näherungswert x_1' benutzen wir den Schnittpunkt dieser Sehne mit der x-Achse:

(3) $$x_1' = \frac{x_0 f(x_0') - x_0' f(x_0)}{f(x_0') - f(x_0)}$$

und haben dann jedenfalls (vgl. Fig. 42) die Ungleichung $x < x_1' < x_0'$. Mit den schon berechneten Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ bilden wir uns allgemein die Zahlenreihe:

$$(4)\quad x_1' = \frac{x_0 f(x_0') - x_0' f(x_0)}{f(x_0') - f(x_0)},\quad x_2' = \frac{x_1 f(x_1') - x_1' f(x_1)}{f(x_1') - f(x_1)},\quad x_3' = \frac{x_2 f(x_2') - x_2' f(x_2)}{f(x_2') - f(x_2)},\ldots,$$

welche die Ungleichungen befriedigt:

$$x_0' > x_1' > x_2' > x_3' > \cdots > x.$$

Auch hier ist unmittelbar einleuchtend, daß $\lim\limits_{n=\infty} x_n' = x$ sein muß. Wäre nämlich $\lim\limits_{n=\infty} x_n' = x' > x$, so würde $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n') = f(x') > 0$ sein, und wir würden aus den schon bewiesenen Angaben $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = 0$ die Folgerung ziehen:

$$\lim_{n=\infty} x_{n+1}' = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x_n f(x_n') - x_n' f(x_n)}{f(x_n') - f(x_n)}\right) = \lim_{n=\infty} x_n = x,$$

der Annahme widersprechend. Indem man die Betrachtung leicht auch in den anderen drei Fällen durchführt, gelangt man zum Ergebnis: *Die Regel* (4) *liefert von dem anderen Näherungswerte* x_0' *aus eine gleichfalls monotone Reihe* $x_0', x_1', x_2', \ldots$ *mit der Grenze* x; *und zwar liegt die gesuchte Lösung jedesmal zwischen* x_n *und* x_n', *so daß wir:*

$$(5)\qquad x = x_n + \vartheta(x_n' - x_n),\qquad 0 < \vartheta < 1$$

zu setzen haben und mittelst der Differenz $(x_n' - x_n)$ *den Grad der beim einzelnen* n *erreichten Annäherung abschätzen können.*

Praktisch wertvoll sind die entwickelten Regeln vornehmlich dann, wenn man bereits für $n = 1$ oder $n = 2$ brauchbare Näherungswerte gewinnt. Um ein ganz einfaches Beispiel auszuführen, wollen wir $\sqrt{3}$ berechnen und setzen zu diesem Zwecke $f(x) = x^2 - 3$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$. Da für $x > 0$ die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ von gleichem Zeichen sind, so muß x_0 der größere Näherungswert sein; wir setzen also etwa $x_0 = 1{,}8$ und $x_0' = 1{,}7$. Aus (2) und (4) berechnet man für die vorliegende Funktion $f(x)$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2x_n},\qquad x_{n+1}' = \frac{x_n x_n' + 3}{x_n' + x_n}.$$

Die gewählten Näherungswerte x_0 und x_0' liefern:

$$x_1 = \frac{26}{15} = 1{,}7333\ldots,\qquad x_1' = \frac{303}{175} = 1{,}7314\ldots,$$

als zweite Näherungswerte, welche sich nicht mehr ganz um zwei Einheiten der dritten Dezimalstelle unterscheiden. Weiter findet man:

$$x_2 = \frac{1351}{780} = 1{,}732\,051\,28\ldots,\qquad x_2' = \frac{15753}{9095} = 1{,}732\,050\,577\ldots,$$

zwei Werte, die nur noch um weniger als eine Einheit der sechsten Stelle voneinander abweichen.

Auch auf die Lösung von transzendenten Gleichungen ist das Verfahren anwendbar. So hat z. B. die Gleichung:

$$f(x) = x \cdot {}^{10}\log x - 1 = 0$$

eine zwischen $x_0' = 2$ und $x_0 = 3$ gelegene Lösung. Da in diesem Falle:

$$f'(x) = \mu_{10} + {}^{10}\log x, \qquad f''(x) = \frac{\mu_{10}}{x}$$

gilt, unter μ_{10} den Modul der dekadischen Logarithmen verstanden, so sind die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ im Intervalle $2 \leqq x \leqq 3$ positiv, so daß x_0 als größerer Näherungswert zu wählen ist. Wir wollen hier nur das Näherungsverfahren (2) ausüben, wobei die Newtonsche Formel die Gestalt:

(6)
$$x_{n+1} = \frac{1 + \mu_{10} \cdot x_n}{\mu_{10} + {}^{10}\log x_n}$$

annimmt; für μ_{10} benutzen wir den siebenstelligen Näherungswert:

$$\mu_{10} = 0{,}434\,2945,$$

was bei Gebrauch einer siebenstelligen Logarithmentafel am Platze ist. Indem man $x_0 = 3$ in (6) einträgt, ergibt sich:

$$x_1 = 2{,}526\,7155\ldots$$

Kürzen wir der Bequemlichkeit wegen auf $x_1 = 2{,}527$, so folgt:

$$x_2 = 2{,}506\,23\ldots, \qquad x_3 = 2{,}506\,184\ldots$$

Der letzte Wert ist in der Tat auf sechs Stellen genau.

7. Die Nullpunkte und die Unendlichkeitspunkte der Funktionen. Eine ganze Funktion $f(x)$ vom n^{ten} Grade möge im Sinne von S. 73 ff. die reelle Zahl a als ν-fache Wurzel haben. Wir können dann $f(x)$ nach (7) S. 76 in folgendes Produkt zerlegen:

(1)
$$f(x) = (x - a)^{\nu} \cdot f_1(x), \qquad f_1(a) \neq 0,$$

wo $f_1(x)$ eine ganze Funktion $(n - \nu)^{\text{ten}}$ Grades ist, die (wie schon unter (1) angedeutet wurde) für $x = a$ nicht verschwindet. Die erste Ableitung der Funktion $f(x)$:

(2)
$$f'(x) = (x - a)^{\nu - 1}\{\nu \cdot f_1(x) + (x - a) f_1'(x)\}$$

ist eine ganze Funktion $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades, welche a noch als $(\nu - 1)$-fache Wurzel hat; denn die in (2) rechts in der großen Klammer stehende Funktion $(n - \nu)^{\text{ten}}$ Grades hat für $x = a$ den von 0 verschiedenen Wert $\nu \cdot f_1(a)$. Nach der schon S. 76 vereinbarten Sprechweise wollten wir

sagen, *daß $f(x)$ im Punkte a einen Nullpunkt ν^{ter} Ordnung habe.* So oft $\nu > 1$ ist, lehrt die Gleichung (2), daß auch noch $f'(a) = 0$ ist, *und daß $f'(x)$ im Punkte a noch einen Nullpunkt $(\nu - 1)^{ter}$ Ordnung hat.* Durch Fortsetzung des Schlußverfahrens ergibt sich, daß $f''(x)$ an der Stelle a einen Nullpunkt $(\nu - 2)^{ter}$ Ordnung hat, sofern $\nu > 2$ ist, *sowie daß allgemein $f^{(\nu)}(x)$ die niederste an der Stelle $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von $f(x)$ ist.* Unter den hier vorliegenden Verhältnissen nimmt die Taylorsche Formel (8) S. 168 die besondere Gestalt an:

$$(3)\quad f(x) = f^{(\nu)}(a)\frac{(x-a)^\nu}{\nu!} + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(a + \vartheta(x-a))\frac{(x-a)^n}{n!},$$

wobei $f^{(\nu)}(a) \neq 0$ ist und übrigens im letzten Gliede an Stelle von $f^{(n)}(a + \vartheta(x-a))$ auch $f^{(n)}(a)$ gesetzt werden kann, da die n^{te} Ableitung einer ganzen Funktion n^{ten} Grades konstant ist und also für a und $(a + \vartheta(x - a))$ gleiche Werte besitzt.

Es sei jetzt $f(x)$ eine beliebige Funktion, welche für $x = a$ verschwinde, im übrigen aber in einer gewissen Umgebung von $x = a$ mit ihren n ersten Ableitungen eindeutig und stetig sei. Dann gilt für jedes x dieser Umgebung die Taylorsche Formel (8) S. 168. Nehmen wir sogleich wieder an, daß neben $f(a)$ auch noch $f'(a), f''(a), \ldots, f^{(\nu-1)}(a)$ gleich 0 seien, unter ν irgend einen Index $< n$ verstanden, daß jedoch $f^{(\nu)}(a) \neq 0$ zutreffe, so ist auch die jetzige Funktion $f(x)$ in der Umgebung von $x = a$ in der Gestalt (3) darstellbar. Wir sagen dann wieder, $f(x)$ *habe an der Stelle $x = a$ einen Nullpunkt ν^{ter} Ordnung*, und können als Kennzeichen hierfür auch angeben, *daß das Produkt $(x - a)^{-\nu} \cdot f(x)$ für* $\lim x = a$ *einen endlichen und von 0 verschiedenen Grenzwert besitzt.* So gilt z. B. für die Funktion $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \sin x$ in der Umgebung ihres Nullpunktes $x = 0$:

$$f(x) = -\frac{x^5}{120} + \sin\vartheta x \cdot \frac{x^6}{720},$$

woraus hervorgeht, daß diese Funktion bei $x = 0$ einen Nullpunkt fünfter Ordnung hat.

Die letzte Erklärung können wir auch auf „Nullpunkte nicht ganzzahliger Ordnungen“ übertragen und finden solche Nullpunkte bei algebraischen oder auch bei transzendenten Funktionen. So ist z. B. für irgend einen reellen Exponenten ν die Funktion $f(x) = (x - a)^\nu$ jedenfalls für alle $x \geqq a$ und $f(x) = (a - x)^\nu$ für alle $x \leqq a$ erklärt (s. S. 86). Ist $\nu > 0$, so liegt bei jeder dieser beiden Funktionen im Punkte a ein Nullpunkt der Ordnung ν vor. *Ist ν irgend eine ganze, gebrochene oder irrationale positive Zahl, so sagen wir, $f(x)$ habe an der Stelle a einen Nullpunkt der Ordnung ν, falls das Produkt $|x - a|^{-\nu} \cdot f(x)$ für* $\lim x = a$ *einen endlichen und von 0 verschiedenen Grenzwert hat.* Um im Falle einer

gebrochenen Zahl ν mit geradem Nenner oder einer irrationalen Zahl ν die Annäherung an a sowohl von rechts als auch von links her zu ermöglichen, müssen wir hier mit dem absoluten Betrage $|x - a|$ arbeiten.

Auch hiermit sind noch nicht die gesamten Nullpunkte, welche bei elementaren Funktionen auftreten können, erschöpfend behandelt, wie weiter unten zu betrachtende Beispiele zeigen werden. Vorerst wollen wir noch einige Ergänzungen der bisherigen Betrachtungen vornehmen.

Hat die Funktion $f(x)$ für $\lim x = +\infty$ oder $x = -\infty$ den Grenzwert 0, so wird, falls wir die neue Variable $x_1 = x^{-1}$ einführen, die Funktion $f\left(\frac{1}{x_1}\right)$ für $\lim x_1 = +0$ oder $\lim x_1 = -0$ (s. betreffs dieser Bezeichnungen S. 88) den Grenzwert 0 besitzen. Läßt sich dann eine positive reelle Zahl ν derart angeben, daß:

$$(4) \qquad \lim_{x_1 = \pm 0} \left(|x_1|^{-\nu} f\left(\frac{1}{x_1}\right)\right) = \lim_{x = \pm\infty} (|x|^{\nu} f(x))$$

einen bestimmten endlichen und von 0 verschiedenen Wert besitzt, so hat $f\left(\frac{1}{x_1}\right)$ im Sinne der vorstehenden Erklärung bei $x_1 = 0$ einen Nullpunkt ν^{ter} Ordnung. Mit Rücksicht auf die rechte Seite von (4) können wir demnach auch sagen: Ist $\lim\limits_{x=\pm\infty} f(x) = 0$, so hat die Funktion $f(x)$ für $\lim x = +\infty$ bzw. $-\infty$ einen Nullpunkt ν^{ter} Ordnung, falls $\lim\limits_{x=\pm\infty} (|x|^{\nu} \cdot f(x))$ einen endlichen und von 0 verschiedenen Wert hat.

Die Betrachtung der „*Unendlichkeitspunkte*“ der Funktionen können wir leicht auf diejenige der Nullpunkte zurückführen. Wird $f(x)$ für $x = a$ unendlich, so hat die reziproke Funktion $(f(x))^{-1}$ daselbst einen Nullpunkt. Hat der letztere die Ordnung ν, so sagen wir, $f(x)$ *habe an der Stelle a einen Unendlichkeitspunkt ν^{ter} Ordnung;* Kennzeichen hierfür ist dann einfach, *daß* $|x - a|^{-\nu} \cdot (f(x))^{-1}$ *oder (was noch einfacher ist)* $|x - a|^{\nu} \cdot f(x)$ *für* $\lim x = a$ *einen endlichen und von 0 verschiedenen Grenzwert hat.* Ganz entsprechend ist *ein Unendlichkeitspunkt ν^{ter} Ordnung bei $+\infty$ oder bei $-\infty$* dadurch angezeigt, *daß* $\lim\limits_{x=\pm\infty} (|x|^{-\nu} \cdot f(x))$ *bestimmt, endlich und von 0 verschieden ist.* So hat die S. 80ff. betrachtete rationale Funktion, deren Nenner die daselbst unter (9) genannte Zerlegung besitzt, an den Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ Unendlichkeitspunkte der Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$. Andrerseits hat z. B. eine ganze Funktion n^{ten} Grades sowohl für $x = +\infty$ als für $x = -\infty$ einen Unendlichkeitspunkt n^{ter} Ordnung.

Haben zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ einen Unendlichkeitspunkt gemein, und ist derselbe ein solcher der μ^{ten} Ordnung für $\varphi(x)$ und der ν^{ten} Ordnung für $\psi(x)$, so gilt:

$$\lim_{x=a} \frac{|x-a|^{\mu}\varphi(x)}{|x-a|^{\nu}\psi(x)} = \lim_{x=a}\left(|x-a|^{\mu-\nu}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = g, \tag{5}$$

wo g eine endliche und von 0 verschiedene Zahl ist. *Ist $\mu = \nu$, so hat der Quotient der beiden Funktionen im Punkte a den endlichen, nicht verschwindenden Grenzwert g; ist $\mu > \nu$, so hat der Quotient $\varphi(x):\psi(x)$ im Punkte a einen Unendlichkeitspunkt, während er für $\mu < \nu$ einen Nullpunkt hat.* Wir charakterisieren den zweiten Fall $\mu > \nu$ auch dahin, daß die Funktion $\varphi(x)$ mit dem Unendlichkeitspunkte höherer Ordnung *im Punkte a stärker unendlich werde* als die Funktion $\psi(x)$. Man wird diese Betrachtung sofort auf den Fall übertragen, daß an Stelle des endlichen Punktes a das Argument $+\infty$ oder $-\infty$ tritt.

Für die Nullpunkte gelten entsprechende Aussagen. Hat $\varphi(x)$ im Punkte $x = a$ einen Nullpunkt μ^{ter} Ordnung und $\psi(x)$ einen solchen der Ordnung ν, so haben wir wieder eine endliche, nicht-verschwindende Grenze:

$$\lim_{x=a} \frac{|x-a|^{-\mu}\varphi(x)}{|x-a|^{-\nu}\psi(x)} = \lim_{x=a}\left(|x-a|^{-(\mu-\nu)}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = g. \tag{6}$$

Ist insbesondere $\mu > \nu$, so hat auch der Quotient $\varphi(x):\psi(x)$ bei a einen Nullpunkt; wir sagen dann, $\varphi(x)$ verschwinde schneller oder stärker als $\psi(x)$, oder auch, $\psi(x)$ verschwinde langsamer oder schwächer als $\varphi(x)$.

Als Maß für das Verschwinden oder Unendlichwerden der Funktionen $f(x)$ haben wir im vorstehenden das Verhalten der Potenzen $|x-a|^{\nu}$ bzw. $|x-a|^{-\nu}$ zugrunde gelegt. Es ist indessen keineswegs gesagt, daß wir mit diesem Maße das Verschwinden oder Unendlichwerden jeder Funktion zu messen im stande wären. Z. B. können wir bei der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ die Argumente $\pm\infty$ zulassen, denen die Funktionswerte $f(+\infty) = +\infty$ und $f(-\infty) = 0$ zugehören. Um zunächst zu prüfen, ob es sich bei $x = +\infty$ um einen Unendlichkeitspunkt bestimmter Ordnung ν handelt, gehen wir auf die Gleichung (1) S. 169:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^{\vartheta x}\cdot\frac{x^n}{n!}$$

zurück, welche für eine beliebig gewählte ganze Zahl n und für jedes endliche x gilt. Ist $x > 0$, so sind alle Glieder rechter Hand > 0, und es ist $e^{\vartheta x} > 1$, so daß für $x > 0$ und für eine beliebige ganze Zahl n die Ungleichung gilt:

$$e^x > \frac{x^n}{n!}. \tag{7}$$

Nimmt man nun an, der Unendlichkeitspunkt $+\infty$ von e^x habe die

Ordnung ν, so wähle man die ganze Zahl $n > \nu + 1$, so daß $n - \nu > 1$ gilt. Aus (7) folgt dann für $x > 1$:

$$x^{-\nu} \cdot e^x > \frac{x^{n-\nu}}{n!} > \frac{1}{n!} \cdot x,$$

woraus sich $\lim_{x=+\infty}(x^{-\nu} \cdot e^x) = +\infty$ entgegen der Annahme ergibt. *Es existiert demnach keine Ordnung ν, die dem Unendlichkeitspunkte $+\infty$ von e^x zukäme; vielmehr werden wir die für jedes noch so groß gewählte ν bestehende Gleichung:*

$$\lim_{x=+\infty}\left(\frac{e^x}{x^\nu}\right) = +\infty \tag{8}$$

dahin charakterisieren, daß das Unendlichwerden von e^x für $\lim x = +\infty$ *das Unendlichwerden jeder endlichen noch so groß gewählten Ordnung ν übertrifft.*

Da man aus (8) weiter die Folgerungen zieht:

$$\lim_{x=+\infty}\left(\frac{1}{|x|^\nu \cdot e^{-x}}\right) = +\infty, \quad \lim_{x=+\infty}(|x|^\nu \cdot e^{-x}) = \lim_{x=-\infty}(|x|^\nu \cdot e^x) = 0, \tag{9}$$

so gibt es auch keine Ordnung ν für den Nullpunkt von e^x bei $-\infty$; vielmehr ist das Verschwinden von e^x für $\lim x = -\infty$ *stärker oder schneller als dasjenige jeder endlichen, noch so groß gewählten Ordnung ν.*

Ein Gegenstück hierzu liefert die Funktion $f(x) = \ln x$, welche sowohl bei $x = 0$ als bei $x = +\infty$ Unendlichkeitspunkte besitzt. Zunächst schließen wir aus (8), unter μ irgend eine *positive* Zahl verstanden, auf:

$$\lim_{x=+\infty}\left(\frac{e^{\mu x}}{x^{\mu\nu}}\right) = +\infty,$$

da mit $\lim y = +\infty$ auch $\lim y^\mu = +\infty$ gilt. Nehmen wir nun μ gleich dem reziproken Werte von ν, so folgt weiter:

$$\lim_{x=+\infty}\left(\frac{x}{e^{\mu x}}\right) = 0.$$

Wenn man demnach $e^x = x_1$ und also $x = \ln x_1$ setzt, so ergibt sich bei Umrechnung auf x_1 nach Fortlassung des Index 1:

$$\lim_{x=+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^\mu}\right) = \lim_{x=+\infty}(x^{-\mu} \cdot \ln x) = 0 \tag{10}$$

für jede noch so klein gewählte *positive* Zahl μ. *Dem Unendlichkeitspunkte von* $\ln x$ *bei $+\infty$ kommt keine von 0 verschiedene Ordnung μ zu; vielmehr ist das Unendlichwerden des natürlichen Logarithmus* $\ln x$ *schwächer als dasjenige jeder noch so klein gewählten positiven Ordnung μ.* Den gleichen

Charakter hat der Unendlichkeitspunkt von $\ln x$ bei $x = 0$; man liest dies sofort aus der Gleichung:

$$\text{(11)} \qquad \lim_{x=+0} (x^{\mu} \cdot \ln x) = 0$$

ab, welche aus (10) durch die Substitution $x = \frac{1}{x_1}$ bei nachheriger Fortlassung des Index 1 hervorgeht.

Das Ergebnis (11) können wir auch noch in die folgende Gestalt kleiden:

$$\text{(12)} \qquad \lim_{x=+0} \left(x^{-\mu} \cdot \frac{-1}{\ln x}\right) = +\infty.$$

Die Funktion $f(x) = \frac{-1}{\ln x}$, welche im Innern des Intervalles $0 \leq x < 1$ positiv ist, hat bei $x = 0$ einen Nullpunkt; *diesem Nullpunkte kommt aber keine von 0 verschiedene Ordnung μ zu, vielmehr ist das Verschwinden der Funktion schwächer oder langsamer als das jeder noch so klein gewählten Ordnung $\mu > 0$.*

8. Unbestimmte Formen bei Funktionen $f(x)$. Eine Funktion $f(x)$ sei als Quotient $\varphi(x):\psi(x)$ zweier Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegeben, so daß man für das einzelne Argument $x = a$ den Funktionswert $f(a)$ als Quotienten der Werte $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ zu berechnen hat. Ist $\psi(a) = 0$, so wäre freilich die Division durch diesen Wert zunächst unstatthaft; doch werden wir dem bisherigen Brauche folgend in diesem Falle ∞ als Funktionswert $f(a)$ erklären, wenn $\varphi(a)$ von 0 verschieden ist. Ist aber $\psi(a) = 0$ und zugleich $\varphi(a) = 0$, so kleidet sich, wie man sagt, die Funktion an der Stelle $x = a$ in die „*unbestimmte Form*" $\frac{0}{0}$, und es ist nicht möglich, einen Funktionswert $f(a)$ unmittelbar aus den Werten $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ zu berechnen.

Ist zweitens $\psi(a) = \infty$ und $\varphi(a)$ endlich, so ist $f(a) = 0$. Trifft aber zugleich $\varphi(a) = \infty$ und $\psi(a) = \infty$ zu, so haben wir wieder eine „*unbestimmte Form*", *nämlich* $\frac{\infty}{\infty}$, und es erscheint auch hier unmöglich, einen Funktionswert $f(a)$ unmittelbar aus $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ zu berechnen.

Auch wenn $f(x)$ als Produkt $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ zweier Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegeben ist, kann eine ähnliche Unbestimmtheit auftreten, nämlich wenn für ein einzelnes Argument a der eine Faktor gleich 0 und zugleich der andere gleich ∞ wird. Als dritte „*unbestimmte Form*" haben wir also $0 \cdot \infty$ bei Funktionen der Gestalt $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ anzureihen.

In allen drei Fällen erklären wir *als Funktionswert $f(a)$ den Grenzwert:*

$$\text{(1)} \qquad f(a) = \lim_{x=a} f(x),$$

sofern ein solcher existiert. Ob wir dabei von beiden Seiten die Annäherung an a vollziehen können oder nur von der einen Seite, muß nach der Natur der im einzelnen Falle vorliegenden Funktion entschieden werden. Aus den Entwicklungen von § 7 ergeben sich nun unmittelbar folgende Sätze: *Haben im ersten Falle der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ im Punkte a Nullpunkte „gleicher“ Ordnung, so ist $f(a)$ ein bestimmter endlicher, nicht-verschwindender Wert; dagegen ist $f(a) = 0$ oder $f(a) = \infty$, falls das Verschwinden von $\varphi(x)$ stärker bzw. schwächer als das von $\psi(x)$ ist.* Entsprechendes gilt im zweiten und dritten Falle; insbesondere folgt: *Haben im zweiten Falle der unbestimmten Form $\frac{\infty}{\infty}$ Zähler und Nenner von $f(x)$ an der Stelle a Unendlichkeitspunkte „gleicher“ Ordnung, so ist $f(a)$ ein endlicher und von 0 verschiedener Wert; dasselbe gilt im dritten Falle $0 \cdot \infty$, sofern der Nullpunkt von $\varphi(x)$ und der Unendlichkeitspunkt von $\psi(x)$ an der Stelle a „gleiche“ Ordnungen besitzen.* Ist nämlich z. B. im Falle $\frac{0}{0}$ die Stelle a ein Nullpunkt μ^{ter} Ordnung für $\varphi(x)$ und ein solcher ν^{ter} Ordnung für $\psi(x)$, so folgen aus:

$$f(a) = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \left\{ |x-a|^{\mu-\nu} \cdot \frac{|x-a|^{-\mu}\varphi(x)}{|x-a|^{-\nu}\psi(x)} \right\}$$

die Angaben des ersten Satzes, da der letzte Quotient rechter Hand einen endlichen und nicht-verschwindenden Grenzwert hat.

Zu einer sehr einfachen Regel kommen wir im Fall $\frac{0}{0}$, wenn die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mit ihren Ableitungen, soweit dieselben gebraucht werden, in der Umgebung von a eindeutig und stetig sind. Wir können dann $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für die dieser Umgebung angehörenden x nach der Taylorschen Formel (8) S. 168 darstellen, wobei der Annahme gemäß jedenfalls die beiden Absolutglieder $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ verschwinden. Es möge aber auch noch $\varphi'(a) = 0, \ldots, \varphi^{(\mu-1)}(a) = 0$ gelten und ebenso $\psi'(a) = 0, \ldots, \psi^{(\nu-1)}(a) = 0$, während $\varphi^{(\mu)}(a) \neq 0$ und $\psi^{(\nu)}(a) \neq 0$ zutreffe; die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ haben dann Nullpunkte der Ordnungen μ bzw. ν an der Stelle a. Sind die Zahlen μ und ν ungleich, so bezeichnen wir mit m die kleinere von ihnen; ist $\mu = \nu$, so sei auch m ihnen gleich. In jedem Falle gilt dann:

$$\varphi(x) = \varphi^{(m)}(a)\frac{(x-a)^m}{m!} + \cdots + \varphi^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \varphi^{(n)}(a+\vartheta(x-a))\frac{(x-a)^n}{n!},$$

$$\psi(x) = \psi^{(m)}(a)\frac{(x-a)^m}{m!} + \cdots + \psi^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \psi^{(n)}(a+\vartheta(x-a))\frac{(x-a)^n}{n!},$$

und man gewinnt für $f(x)$ die Darstellung:

$$f(x) = \frac{\varphi^{(m)}(a) + \cdots + \frac{m!}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-m-1} + \frac{m!}{n!}\varphi^{(n)}(a+\vartheta(x-a))(x-a)^{n-m}}{\psi^{(m)}(a) + \cdots + \frac{m!}{(n-1)!}\psi^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-m-1} + \frac{m!}{n!}\psi^{(n)}(a+\vartheta(x-a))(x-a)^{n-m}},$$

wo mindestens eines der Absolutglieder $\varphi^{(m)}(a)$ und $\psi^{(m)}(a)$ von 0 verschieden und natürlich endlich ist. Hieraus ergibt sich:

$$(2) \qquad f(a) = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(m)}(a)}{\psi^{(m)}(a)},$$

so daß die folgende Regel gilt: *Kleidet sich $f(x) = \varphi(x) : \psi(x)$ für $x = a$ in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, so differenziere man Zähler und Nenner einzeln*[1]) *und bilde die Quotienten der Ableitungen:*

$$(3) \qquad \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}, \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}, \ldots, \frac{\varphi^{(m)}(x)}{\psi^{(m)}(x)},$$

und zwar so lange, bis man zu einem ersten Quotienten gelangt, der bei $x = a$ nicht mehr die Form $\frac{0}{0}$ annimmt; dieser ergibt dann nach der Regel (2) *den Funktionswert $f(a)$.*

Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ganze Funktionen, und ist also $f(x)$ eine rationale Funktion, die an der Stelle a die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so haben nach S. 76 die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ eine Potenz von $(x-a)$ als gemeinsamen Faktor. Nach Forthebung dieses gemeinsamen Faktors gelangt man zu einem Ausdruck für $f(x)$, der bei $x = a$ nicht mehr die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Doch kann es auch einfacher sein, den Wert $f(a)$ nach der eben ausgesprochenen Regel zu berechnen. Hat man z. B. für ein von 0 verschiedenes a die Funktion $f(x) = (x^7 - a^7) : (x^5 - a^5)$, so findet man bei Division von Zähler und Nenner durch den gemeinsamen Faktor $(x-a)$:

$$f(x) = \frac{x^7 - a^7}{x^5 - a^5} = \frac{x^6 + x^5 a + x^4 a^2 + \cdots + a^6}{x^4 + x^3 a + x^2 a^2 + x a^3 + a^4},$$

woraus $f(a) = \frac{7}{5} a^2$ folgt; kürzer ergibt sich dasselbe aus:

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{7x^6}{5x^4} = \frac{7}{5} x^2.$$

Bei transzendenten Funktionen wende man die Regel (2) an. Um z. B.:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

für $x = 0$ zu berechnen, bestimme man die Reihe der Quotienten (3) und wird finden, daß zuerst bei $m = 3$ die unbestimmte Form nicht mehr vorliegt:

$$\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)} = \frac{e^x + e^{\sin x} \sin x \cos x (3 + \sin x)}{\cos x}.$$

Hier gilt $f(0) = 1$.

---

1) Bei Anwendung der Regel ist man anfänglich leicht geneigt, statt der einzelnen Differentiationen von Zähler und Nenner irrtümlich die Differentiation von $\varphi(x) : \psi(x)$ nach der „Quotientenregel" zu vollziehen, worauf zur Vermeidung dieses Fehlers aufmerksam gemacht wird.

Nicht immer sind Zähler und Nenner nach der Taylorschen Formel, welche der Regel (2) zugrunde liegt, entwickelbar. So ist bei der Funktion:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

in welcher $x \geqq a > 0$ sein soll und alle Wurzeln mit positiven Zeichen genommen werden mögen, nur der Zähler nach (8) S. 168 entwickelbar und ergibt:

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) - \frac{(x-a)^2}{8(\sqrt{a + \vartheta(x-a)})^3},$$

während beim Nenner bereits die erste Ableitung für $x = a$ nicht mehr endlich ist. Doch ist hier eine weitere Entwicklung des Nenners gar nicht nötig, da aus:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = (x-a)^{\frac{1}{2}} \sqrt{x+a}$$

hervorgeht, daß im Punkte a ein Nullpunkt der Ordnung $\frac{1}{2}$ vorliegt. Indem wir der Funktion $f(x)$ die Gestalt verleihen:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{(x-a)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{a}\sqrt{x+a}} - \frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{8\sqrt{x+a}\,(\sqrt{a + \vartheta(x-a)})^3},$$

ist einleuchtend, daß $f(a) = 0$ zutrifft.

Ganz einfache und nach der Regel (2) zu erledigende Beispiele sind:

$$(4) \qquad \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

in denen wir frühere Angaben über den Sinus und Tangens verschwindend kleiner x bestätigt finden.

Ein bemerkenswertes Beispiel für die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ liefert die Funktion:

$$f(x) = \frac{\ln \varphi(x)}{\ln \psi(x)},$$

falls $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x = a$ verschwinden oder unendlich werden. Es liege etwa bei $\varphi(x)$ ein Nullpunkt μ^{ter} Ordnung vor und für $\psi(x)$ ein solcher ν^{ter} Ordnung; dann läßt sich die Funktion $f(x)$ in die folgende Gestalt umschreiben:

$$f(x) = \frac{\ln(|x-a|^{-\mu}\varphi(x)) + \mu \ln|x-a|}{\ln(|x-a|^{-\nu}\psi(x)) + \nu \ln|x-a|} = \frac{\mu + \dfrac{\ln(|x-a|^{-\mu}\varphi(x))}{\ln|x-a|}}{\nu + \dfrac{\ln(|x-a|^{-\nu}\psi(x))}{\ln|x-a|}}.$$

Da nun $|x-a|^{-\mu}\varphi(x)$ und $|x-a|^{-\nu}\psi(x)$ für $\lim x = a$ endliche und von 0 verschiedene Grenzwerte haben, so ergibt sich $f(a) = \frac{\mu}{\nu}$.

Als ein hiermit verwandtes Beispiel betrachten wir noch die Funktion:

$$f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{\ln(x^2 - 1)},$$

welche für $x = \infty$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt. Man gestalte die Funktion um in:

$$f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x + \ln(1 - x^{-2})} = \frac{\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)}{2 + \frac{\ln(1 - x^{-2})}{\ln x}}.$$

Für den Zähler gilt, wenn wir die Abkürzung $\ln x = x_1$ gebrauchen:

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right) = \lim_{x_1=\infty}\left(\frac{\ln x_1}{x_1}\right) = 0,$$

wie in (10) S. 188 gezeigt wurde. Der Nenner hat den Grenzwert 2, so daß $f(\infty) = 0$ gewonnen wird. —

Außer den hier betrachteten unbestimmten Formen haben wir jetzt weiter die folgenden zu nennen:

I. Bei Funktionen der Gestalt $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$;

II. Bei Funktionen der Gestalt $\varphi(x)^{\psi(x)}$ die drei unbestimmten Formen 0^0, ∞^0 und 1^∞.

Ist $x = a$ die Stelle, an der eine dieser unbestimmten Formen vorliegt, so wird man wieder als Funktionswert $f(a)$ für diese Stelle den Grenzwert $f(a) = \lim\limits_{x=a} f(x)$ erklären, sofern ein solcher existiert. Die Berechnung des Wertes $f(a)$ sucht man dadurch zu leisten, *daß man die neuen unbestimmten Formen auf die schon behandelten zurückführt.* Dies gelingt in den drei unter II genannten Fällen einfach dadurch, daß man von $f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$ zunächst zum Logarithmus von $f(x)$ übergeht:

$$\ln f(x) = \psi(x) \cdot \ln \varphi(x),$$

der in allen drei Fällen die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ annimmt. Im Falle I sind die zu $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ reziproken Funktionen:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, \qquad \psi_1(x) = \frac{1}{\psi(x)}$$

an der Stelle a gleichzeitig gleich 0. In ihnen aber stellt sich $f(x)$ so dar:

$$f(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} - \frac{1}{\psi_1(x)} = \frac{\psi_1(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_1(x) \cdot \psi_1(x)};$$

für die so geschriebene Funktion liegt aber an der Stelle a die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ vor.

Für $x = 1$ nimmt die Funktion:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$$

die unbestimmte Gestalt $\infty - \infty$ an; kleidet man $f(x)$ in die Gestalt:

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln x - x + 1}{(x-1)\ln x},$$

so gibt die Regel (2) für $m = 2$ den Wert $f(1) = \frac{1}{2}$. Die Funktion $f(x) = x^x$ nimmt für $x = 0$ die unbestimmte Gestalt 0^0 an. Hier findet man auf Grund eines S. 188ff. ausgesprochenen Satzes über das Unendlichwerden von $\ln x$ für $\lim x = +0$:

$$\lim_{x=+0} \ln f(x) = \lim_{x=+0} (x \cdot \ln x) = 0,$$

so daß $\ln f(0) = 0$, $f(0) = 1$ gilt. Um $f(x) = x^{\ln(1+x)}$ für $x = 0$, wo gleichfalls die Form 0^0 vorliegt, zu berechnen, setze man:

$$\ln f(x) = \ln(1+x) \cdot \ln x = \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \cdot (x \cdot \ln x).$$

Für die erste Klammer findet man bei $x = 0$ auf Grund der Regel (2) den Wert 1, während $\lim\limits_{x=+0} (x \cdot \ln x) = 0$ ist; somit ist wieder $\ln f(0) = 0$, $f(0) = 1$.

Bei der Funktion:

$$f(x) = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

treten für $x = 0$ zwei unbestimmte Formen zugleich auf; der in der Klammer stehende Quotient hat für $x = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ und zufolge (4) den Grenzwert 1, so daß die rechte Seite die Form 1^∞ annimmt. Die Logarithmierung von $f(x)$ liefert:

$$\ln f(x) = \frac{\ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)}{x^2} = \frac{\ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)}{\frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1} \cdot \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}.$$

Beim ersten Faktor rechter Hand finden wir unter Benutzung der Abkürzung $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = x_1$ mittelst der Regel (2):

$$\lim_{x=0} \left(\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)}{\frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1}\right) = \lim_{x_1=1} \left(\frac{\ln x_1}{x_1 - 1}\right) = 1,$$

ebenso für den zweiten Faktor auf Grund der Regel (2):

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Hieraus ergibt sich $\ln f(0) = \frac{1}{3}$ und $f(0) = \sqrt[3]{e}$.

Aufgaben: Die folgenden Angaben sind zu bestätigen:

1) $\lim\limits_{x=3} \frac{x^3 - x^2 - 7x + 3}{x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 3} = \frac{14}{31}$.

2) $\lim\limits_{y=5} \frac{y^2 - 6y + 5}{y^3 - 12y^2 + 47y - 60} = 2$.

3) $\lim\limits_{z=0} \frac{a^z - b^z}{\sin z} = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

4) $\lim\limits_{x=0} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} = \frac{1}{2a}$.

5) $\lim\limits_{t=0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \frac{1}{6}$.

6) $\lim\limits_{x=1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = -2$.

7) $\lim\limits_{x=0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 2x} = 1$.

8) $\lim\limits_{x=0} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \lim\limits_{x=0} \left(\frac{x \cdot \ln x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = 0$.

9) $\lim\limits_{z=0} \left(\frac{1}{z \sin z} - \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{6}$.

10) $\lim\limits_{x=0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$.

11) $\lim\limits_{x=0} x^{\sin x} = 1$, $\quad \ln f(x) = \sin x \cdot \ln x = \frac{\sin x}{x} \cdot (x \cdot \ln x)$.

12) $\lim\limits_{x=0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1$, $\quad \ln f(x) = -\operatorname{tg} x \cdot \ln x = -\frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot (x \cdot \ln x)$.

13) $\lim\limits_{u=0} (1 + xu)^{\frac{1}{u}} = e^x$, $\quad \lim\limits_{u=0} \ln f(u) = \lim\limits_{u=0} \frac{\ln(1 + xu)}{u} = x$.

14) $\lim\limits_{x=\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$, $\quad \ln f(x) = \frac{\ln(\ln x) - \ln x}{x} = \left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} - 1\right)\frac{\ln x}{x}$.

9. Der Taylorsche Lehrsatz für Funktionen mehrerer Variablen. Der in § 2 besprochene Grundsatz für die Bildung ganzer rationaler Näherungsfunktionen ist leicht auf Funktionen mehrerer Variablen übertragbar. Es mag genügen, den Fall einer Funktion $f(x, y)$ *zweier* Variablen ausführlich zu betrachten; die durchzuführende Überlegung bleibt, wie man leicht erkennen wird, auch für Funktionen von mehr als zwei Argumenten in Kraft.

Die Funktion $f(x, y)$ sei in der Umgebung der Stelle (a, b) der Zahlenebene mit ihren sämtlichen partiellen Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung einschließlich eindeutig und stetig. Wir wollen dann eine ganze rationale Näherungsfunktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$g(x,y) = c_0 + (c_1(x-a) + c_1'(y-b)) + (c_2(x-a)^2 + c_2'(x-a)(y-b) + c_2''(y-b)^2)$$
$$+ \cdots + (c_{n-1}(x-a)^{n-1} + c'_{n-1}(x-a)^{n-2}(y-b) + \cdots + c_{n-1}^{(n-1)}(y-b)^{n-1})$$

zu bilden versuchen, welche im Punkte (a, b) mit $f(x, y)$ den Funktionswert und die Werte aller partiellen Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschließlich gemeinsam haben soll. Ist ν irgend eine der Ordnungen $0, 1, 2, \ldots, n-1$, so ergibt sich aus dem Ansatze für $g(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial^{\nu} g(x,y)}{\partial x^{\nu-i}\partial y^{i}}\right)_{\substack{x=a\\ y=b}} = (\nu - i)!\, i!\, c_{\nu}^{(i)},$$

wo durch das links stehende Klammersymbol angedeutet werden soll, daß nach Ausführung der Differentiation $x = a$, $y = b$ einzutragen ist[1]). Für diese Argumente aber sollte der Wert der Ableitung von g gleich der entsprechenden Ableitung $f^{(\nu)}_{x^{(\nu-i)},\, y^{(i)}}(a,b)$ von $f(x, y)$ sein. Man berechnet daraus leicht die Bedeutung von $c_{\nu}^{(i)}$ und damit den Ausdruck der gesuchten Näherungsfunktion $g(x,y)$. Indem man $f(x,y) - g(x,y) = R_n$ setzt, gelangt man zu dem Ansatze:

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{\nu} f^{(\nu)}_{x^{(\nu-i)},\, y^{(i)}}(a, b)\,\frac{(x-a)^{\nu-i}(y-b)^{i}}{(\nu-i)!\, i!}\right) + R_n,$$

dem man bei Benutzung der Binomialkoeffizienten auch die Gestalt geben kann:

$$(1)\quad f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\nu!}\sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i} f^{(\nu)}_{x^{(\nu-i)},\, y^{(i)}}(a, b)\,(x-a)^{\nu-i}(y-b)^{i}\right) + R_n.$$

Man kann dem Restgliede R_n eine der Lagrangeschen Formel (9) S. 168 entsprechende Gestalt geben. Man denke zu diesem Zwecke den Punkt (x, y) auf einem vom Punkte (a, b) in der Zahlenebene ausziehenden geradlinigen Strahle variabel, welcher gegen die positive x-Achse den Winkel α bilde[2]). Ist s die Entfernung der Punkte (x, y) und (a, b), so können wir:

$$R_n = f(x, y) - g(x, y) = \varphi(s)$$

als Funktion der Variablen s betrachten und haben dann für die Differentiation nach s die Regeln (8) und (9) S. 161 zu benutzen, wobei:

$$(2)\qquad \frac{x-a}{s} = \cos\alpha, \qquad \frac{y-b}{s} = \sin\alpha$$

zu setzen ist. Nun sind aber die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ und $g(x, y)$ bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung für den Punkt (a, b) bzw. einander gleich. Es ergibt sich demnach $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\ldots$, $\varphi^{(n-1)}(0) = 0$,

1) Das Symbol $0!$ soll gleich 1 sein, ebenso der gleich auftretende „Binomialkoeffizient" $\binom{0}{0}$.

2) S. Fig. 38, S. 150, wo jedoch a, b an Stelle von x, y treten müssen.

so daß die Mac Laurinsche Formel (11) S. 168 für $\varphi(s)$ unter Benutzung der ersten Formel (12) S. 168 liefert:

$$\varphi(s) = \frac{s^n}{n!}\varphi^{(n)}(\vartheta s).$$

Da nun alle partiellen Ableitungen n^{ter} Ordnung von $g(x, y)$ mit 0 identisch sind und übrigens dem Werte ϑs der Punkt $(a+\vartheta(x-a), b+\vartheta(y-b))$ zugehört, so ergibt sich unter Benutzung von (2) mit Hilfe der Regel (8) S. 161:

$$(3) \quad R_n = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} f^{(n)}_{x^{(n-i)}, y^{(i)}}(a+\vartheta(x-a), b+\vartheta(y-b))(x-a)^{n-i}(y-b)^i,$$

womit die Darstellung des Restgliedes gewonnen ist.

Die soeben gebrauchte Mac Laurinsche Formel setzt voraus, daß die Verbindungsgerade der Punkte (x, y) und (a, b) aus lauter Punkten besteht, in denen die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ bis zur n^{ten} Ordnung existieren, und daß diese Ableitungen stetige Funktionen sind. Dem *„Taylorschen Lehrsatze"* für die Funktion $f(x, y)$ zweier Variablen geben wir demnach folgende Gestalt: *Ist die Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (a, b) mit ihren partiellen Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung eindeutig und stetig, so gilt, falls der Punkt (x, y) und die Verbindungsgerade der Punkte (x, y) und (a, b) jener Umgebung angehören, für $f(x, y)$ die Darstellung* (1), *wobei das Restglied R_n in die Gestalt* (3) *gekleidet werden kann.*

Häufig benutzt man die Taylorsche Formel (1) auch in einer der Gleichung (13) S. 168 entsprechenden Gestalt. Um sie zu erhalten, setzen wir $x-a=h$, $y-b=k$ und also $x=a+h$, $y=b+k$ und schreiben hernach statt a und b wieder x und y. Auf diese Weise gewinnen wir als Ausdruck des Taylorschen Lehrsatzes:

$$(4) \quad f(x+h, y+k) = f(x,y) + (f'_x \cdot h + f'_y \cdot k) + \frac{1}{2!}(f''_{x,x}h^2 + 2f''_{x,y}hk + f''_{y,y}k^2)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(f^{(n-1)}_{x^{(n-1)}}h^{n-1} + \binom{n-1}{1} f^{(n-1)}_{x^{(n-2)}, y}h^{n-2}k + \cdots + f^{(n-1)}_{y^{(n-1)}}k^{n-1}\right) + R_n,$$

wobei das Restglied die Gestalt annimmt:

$$(5) \quad R_n = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}_{x^{(n)}}(x+\vartheta h, y+\vartheta k)h^n + \binom{n}{1} f^{(n)}_{x^{(n-1)}, y}(x+\vartheta h, y+\vartheta k)h^{n-1}k + \cdots\right);$$

in Gleichung (4) sind überall da, wo keine Argumente bei den partiellen Ableitungen angegeben sind, x und y als solche zu denken.

Der Übertragung auf Funktionen mehrerer Variablen steht nichts im Wege. Ausgedehnteren Gebrauch haben wir indessen nur vom Taylorschen Lehrsatz im Falle der Funktionen $f(x,y)$ zweier Variablen zu machen.

Kapitel II. Konvergenz der unendlichen Reihen.

1. Begriffe der Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen. Es sei eine unbegrenzte, nach einem gewissen Gesetze gebildete Reihe von konstanten Größen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ vorgelegt. Wir werfen die Frage auf, ob wir einen bestimmten Sinn mit der Aufgabe verknüpfen können, *diese unendlich vielen Größen in der angegebenen Anordnung zueinander zu addieren*:

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots.$$

Wir nennen diese Aneinanderreihung der Zahlen u_k eine „*unendliche Reihe*" und die einzelnen Zahlen u_k die „*Glieder*" der unendlichen Reihe.

Eine wirkliche Durchführung der Addition ist für jede begrenzte Anzahl von Größen u_k möglich. Es möge die Summe der n ersten Glieder der Reihe (1) gleich S_n sein:

$$(2) \qquad S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}.$$

Wir sind also imstande, der vorgelegten Zahlenreihe und damit der unendlichen Reihe (1) eine zweite, nicht begrenzte Reihe von Zahlen $S_1, S_2, S_3, \cdots$ zuzuordnen, und haben, diese letzte Reihe betreffend, immer eine der beiden sich ausschließenden Möglichkeiten, *daß entweder eine endliche Grenze* $S = \lim_{n=\infty} S_n$ *der Zahlenreihe* $S_1, S_2, \ldots$ *existiert, oder daß dies nicht der Fall ist.* Existiert eine endliche Grenze $S = \lim_{n=\infty} S_n$, so bezeichnen wir die Reihe (1) als „*konvergent*"; hat die Zahlenreihe $S_1, S_2, S_3, \ldots$ aber keine endliche Grenze, so sagen wir, die unendliche Reihe (1) „*divergiere*" oder sei „*divergent*". Den Fall der Konvergenz können wir auch dahin charakterisieren, *daß eine bestimmte endliche Zahl S existieren muß, die der Gleichung genügt*:

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} (S - S_n) = 0.$$

Da das im Anschluß an (3) S. 5 angegebene Kriterium für die Existenz der Grenze einer Größenreihe nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, so können wir die Bedingung für die Konvergenz auch so aussprechen: *Die Reihe* (1) *ist stets und nur dann konvergent, wenn nach Auswahl einer „beliebig kleinen" Zahl* δ *stets ein Index m der Art angebbar ist, daß:*

$$(4) \qquad |S_{n+k} - S_n| = |u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k-1}| < \delta$$

für „alle" der Bedingung $n \geqq m$ *genügenden Indizes n und „jede" Anzahl k erfüllt ist.*

Da wir für die Konvergenz eine „endliche“ Grenze $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ forderten, so ist, falls $\lim\limits_{n=\infty} S_n = +\infty$ oder $= -\infty$ zutrifft, die Reihe (1) als divergent zu bezeichnen. Andrerseits gehört zur Divergenz der Fall, daß die Zahlen $S_1, S_2, \ldots$ überhaupt keine Grenze besitzen, d. h. weder eine endliche Grenze noch eine der Grenzen $\pm\infty$. Ist die Zahlenreihe $S_1, S_2, \ldots$ von irgend einem endlichen Index m ab monoton, so existiert stets eine Grenze $\lim\limits_{n=\infty} S_n$, die auch gleich $+\infty$ oder $-\infty$ sein kann (S. 8). Soll demnach keine Grenze $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ existieren, so kann von keinem endlichen Index m ab Monotonie der Reihe $S_1, S_2, \ldots$ vorliegen; vielmehr muß $S_1, S_2, \ldots$ eine *beständig schwankende Zahlenreihe* vorstellen und zwar von der Art, daß dabei eben keine Grenze $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ zutage tritt. Man bezeichnet in diesem Falle die divergente Reihe (1) auch wohl als eine „*oszillierende*“ Reihe.

Im Falle der *Konvergenz* und nur in diesem wollen wir nun die anfänglich vorgelegte Aufgabe, die *unendlich vielen Zahlen* $u_0, u_1, u_2, \ldots$ *in dieser Reihenfolge zu addieren*, als lösbar und in der Weise als gelöst ansehen, *daß wir die endliche Grenze* $S = \lim\limits_{n=\infty} S_n$ *als Ergebnis der Aufgabe und damit als „Summe der unendlichen Reihe“* (1) *erklären.*

Beispiele konvergenter Reihen sind dem vorigen Kapitel leicht zu entnehmen. Für $u_n = \frac{1}{n!}$ erhalten wie die unendliche Reihe[1]):

$$(5) \qquad 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

oder bei Ausrechnung der Nenner in den ersten Gliedern:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \frac{1}{362880} + \cdots.$$

Diese Reihe ist konvergent und hat die Summe e; denn aus (3) S. 170 folgt für die Reihe (5), wenn S den Wert e bedeutet:

$$S - S_n = \frac{e^{\vartheta}}{n!}, \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

woraus $\lim\limits_{n=\infty}(S - S_n) = 0$ sofort hervorgeht. Wir setzen weiter $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ und gewinnen die unendliche Reihe:

$$(6) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

1) Wie S. 196 ist unter 0! der Wert 1 zu verstehen.

Hier wechselt stets ein positives Glied mit einem negativen ab; Reihen dieser Art sollen als „*alternierende Reihen*“ bezeichnet werden. Nennen wir die rationalen Brüche mit dem Zähler 1 „*Stammbrüche*“, so haben wir in (6) „*die alternierende Reihe der Stammbrüche*“ vor uns. *Auch diese Reihe ist konvergent und hat die Summe* ln 2; setzen wir nämlich $S = \ln 2$, so folgt aus der S. 174 bewiesenen Gleichung:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\vartheta)^{n+1}}$$

für die Differenz $(S - S_n)$ bei der Reihe (6):

$$S - S_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\vartheta)^{n+1}}, \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

woraus $\lim\limits_{n=\infty} (S - S_n) = 0$ wieder unmittelbar hervorgeht. Ist a irgend eine von 0 verschiedene endliche Zahl, so bezeichnet man:

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots$$

als die *unendliche geometrische Reihe des Quotienten* a. Ist $a = 1$, so hat man $S_n = n$; ist $a \neq 1$, so gilt (s. S. 11):

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a} \cdot a^n.$$

Nach den Regeln (4) und (2) S. 9 gilt aber $\lim\limits_{n=\infty} |a|^n = 0$ für $|a| < 1$ und $\lim\limits_{n=\infty} |a|^n = \infty$ für $|a| > 1$; für $a = -1$ endlich haben die Zahlen $S_1, S_2, S_3, \ldots$ abwechselnd die Werte 1 und 0. *Die unendliche geometrische Reihe ist für* $|a| < 1$ *konvergent und hat die Summe* $S = \frac{1}{1-a}$; *für* $|a| \geqq 1$ *ist sie divergent, und zwar gilt für* $a \geqq 1$ *offenbar* $\lim\limits_{n=\infty} S_n = +\infty$, *während für* $a \leqq -1$ *die Reihe als „oszillierend“ zu bezeichnen ist.*

Bei den drei eben betrachteten Beispielen konvergenter Reihen gilt für die einzelnen Reihenglieder jedesmal die Regel $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$. Es ist leicht einzusehen, *daß bei jeder konvergenten Reihe* (1) *die Glieder* u_n, *einzeln genommen, mit wachsendem Index n die Zahl* 0 *zur Grenze haben müssen:*

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Man kann nämlich u_n in der Gestalt $u_n = S_{n+1} - S_n$ darstellen und hat zum Beweise der Gleichung (7) nur zu beachten, daß sich S_{n+1} und S_n für $\lim n = \infty$ einer und derselben Grenze S annähern.

Die Bedingung (7), welche notwendig bei jeder konvergenten Reihe

zutreffen muß, ist aber *keineswegs eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz.* So trifft z. B. diese Bedingung bei der Reihe der Stammbrüche:

$$(8)\qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

zu; es ist aber leicht zu zeigen, *daß diese Reihe divergent ist.* Hier gilt nämlich für *jeden* Index n:

$$|u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{2n-1}|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{2},$$

da von den n hier zusammenaddierten Stammbrüchen die $(n-1)$ ersten größer als der letzte $\frac{1}{2n}$ sind. Die notwendige Konvergenzbedingung (4) ist also hier für keinen Index n erfüllbar.

2. Absolute und unbedingte Konvergenz einer unendlichen Reihe. Es sei eine unendliche Reihe konstanter Glieder:

$$(1)\qquad u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots$$

vorgelegt. Wir greifen aus dieser Reihe in irgend einer Art Glieder in unbegrenzter Anzahl heraus und bilden aus ihnen die neue Reihe:

$$(2)\qquad u_0'+u_1'+u_2'+u_3'+\cdots.$$

Es sollen also die Glieder $u_0', u_1', u_2', \ldots$ der Reihe (2) identisch sein mit Gliedern $u_0'=u_i$, $u_1'=u_k$, $u_2'=u_l, \ldots$ der Reihe (1); jedoch soll ein einmal aus der Reihe (1) herausgegriffenes Glied nicht etwa noch ein zweites Mal als Glied der Reihe (2) gesetzt werden. Übrigens sei keineswegs vorausgesetzt, daß die Glieder $u_0'=u_i$, $u_1'=u_k$, $u_2'=u_l, \cdots$ gerade in dieser Aufeinanderfolge in der Reihe (1) auftreten. Eine auf diese Art aus der Reihe (1) erhaltene Reihe (2) nennen wir einen „*Bestandteil*“ der Reihe (1).

Einfache Beispiele gewinnen wir, wenn wir etwa aus der Reihe (1) alle Glieder mit geradem Index herausgreifen und in irgend einer Anordnung zur Reihe (2) zusammenfügen, oder wenn wir z. B. alle Glieder mit primzahligen Indizes herausgreifen usw.

Übrigens widerspricht es der gegebenen Erklärung keineswegs, wenn wir bei Herstellung der Reihe (2) nach und nach *alle* Glieder der Reihe (1) aufgreifen und zur Bildung der Reihe (2) heranziehen. In diesem Falle kann man durch den gleichen Prozeß aus (2) auch wieder die Reihe (1) herstellen; es ist dann *jede Reihe ein Bestandteil der anderen,* und man sagt, *die Reihen entstehen auseinander durch Umordnung der Glieder, oder sie seien abgesehen von der Gliederanordnung einander gleich.*

Es gelte nun zunächst die Voraussetzung, *daß kein Glied der Reihe*

(1) *negativ sei*, $u_k \geqq 0$[1]). Dann bilden die $S_1, S_2, S_3, \ldots$ eine monotone Reihe nicht-abnehmender Zahlen, so daß nach S. 8 entweder $\lim_{n=\infty} S_n = \infty$ gilt oder eine endliche Grenze $S = \lim_{n=\infty} S_n$ existiert. *Bei einer Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern ist entweder* $\lim_{n=\infty} S_n = \infty$, *oder die Reihe ist konvergent.*

Auch für jeden Bestandteil (2) dieser Reihe gilt $u_k' \geqq 0$. Ist unter den n ersten Gliedern des Bestandteils $u_h' = u_{m-1}$ dasjenige, welches als Glied der Reihe (1) den höchsten Index hat, so sind alle Glieder der endlichen Summe $S_n' = u_0' + u_1' + \cdots + u_{n-1}'$ auch enthalten in der Summe $S_m = u_0 + u_1 + \cdots + u_{m-1}$. Ist also die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ konvergent, und hat sie die Summe S, so gilt:

$$S_n' \leqq S_m < S$$

für jeden endlichen Index n. Demnach ist $\lim_{n=\infty} S_n' = \infty$ ausgeschlossen, vielmehr existiert eine endliche Grenze $\lim_{n=\infty} S_n' = S' \leqq S$. *Jeder Bestandteil einer konvergenten Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern von der Summe S ist wieder eine konvergente Reihe mit einer Summe $S' \leqq S$.*

Entsteht die zweite Reihe aus der ersten durch Gliederumordnung, so ist auch die erste Reihe ein Bestandteil der zweiten, so daß im Falle der Konvergenz aus dem eben bewiesenen Satze auch $S \leqq S'$ und damit $S' = S$ folgt *Eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern bleibt auch nach einer beliebigen Gliederumordnung konvergent und hat in der neuen Gestalt dieselbe Summe S wie in der ursprünglichen.*

Die letzten Betrachtungen übertragen sich unmittelbar auf den Fall von Reihen mit lauter nicht-positiven Gliedern, wie man am einfachsten durch Zeichenwechsel aller Glieder erkennt. *Gilt für alle Glieder $u_k \leqq 0$, so ist entweder* $\lim_{n=\infty} S_n = -\infty$ *oder die Reihe ist konvergent; im letzteren Falle bleibt sie auch nach jeder Gliederumordnung unter Wahrung ihrer Summe S konvergent.*

Von der Reihe (1) sagt man, sie sei „*absolut konvergent*“, falls die „*zugehörige Reihe der absoluten Beträge*“:

(3) $$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$$

konvergiert. So ist z. B. die geometrische Reihe des Quotienten $-\frac{1}{2}$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots$$

1) Aus formalen Gründen lassen wir die Möglichkeit offen, daß Glieder in der Reihe vorkommen, die den Wert 0 haben.

absolut konvergent; dagegen ist die konvergente Reihe:

$$(4)\qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

nicht absolut konvergent, da die zugehörige Reihe (3) nach S. 201 divergiert.

Man bezeichnet ferner eine konvergente Reihe als *„unbedingt konvergent", falls sie nach jeder Gliederumordnung konvergent bleibt und die gleiche Summe behält;* dagegen heißt eine konvergente Reihe *„bedingt konvergent", falls man eine Gliederumordnung vornehmen kann, welche die Summe ändert.* Ein Beispiel einer bedingt konvergenten Reihe haben wir in (4) vor uns. Man gelangt z. B. durch Umordnung zu der Reihe:

$$(5)\qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

indem man immer zwei positive Glieder und dann ein negatives Glied aus (4) unter Einhaltung der in (4) vorliegenden Anordnung herausgreift. Da auch in dieser Reihe $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$ gilt, so ist $\lim\limits_{n=\infty} (S'_{3n} - S'_{3n\pm 1}) = 0$, so daß wir uns bei der Untersuchung ihrer Konvergenz auf die Betrachtung der Zahlenreihe S_3', S_6', S_9', ... beschränken dürfen. Nun ist aber:

$$S'_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right),$$

und wir können hier die rechte Seite so entwickeln:

$$S'_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)\right\}.$$

Unter Heranziehung der Summen S_n der Reihe (4) folgt also:

$$S'_{3n} = S_{4n} + \frac{1}{2} S_{2n}.$$

Da $\lim\limits_{n=\infty} S_{4n} = \lim\limits_{n=\infty} S_{2n} = \ln 2$ ist, so folgt $\lim\limits_{n=\infty} S'_{3n} = \frac{3}{2}\ln 2$ und also nach der vorausgeschickten Bemerkung $\lim\limits_{n=\infty} S'_n = \frac{3}{2}\ln 2$. *Die umgeordnete Reihe* (5) *ist konvergent, hat aber als Summe das* $\frac{3}{2}$*-fache der Summe* $\ln 2$ *der Reihe* (4).

Es besteht nun der wichtige Satz: *Eine absolut konvergente Reihe ist stets unbedingt konvergent.* Eine konvergente Reihe (1), in der nur *endlich viele* negative Glieder enthalten sind, ist stets auch absolut konvergent. Hier geht nämlich die zugehörige Reihe (3) durch Zeichenwechsel *endlich vieler* Glieder aus (1) hervor, wobei sich die Reihensumme

einfach um den doppelten Betrag $2|S_0|$ der Summe S_0 jener negativen Glieder erhöht. Bei einer Neuordnung behält die zugehörige Reihe $|u_0'| + |u_1'| + |u_2'| + \cdots$, wie schon bewiesen ist, die gleiche Summe. Aber von der letzten Summe gelangen wir durch Abzug von $2|S_0|$ zur Summe der Reihe $u_0' + u_1' + u_2' + \cdots$ zurück. Es ist also die Summe der letzteren Reihe gleich der von $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$, so daß die unbedingte Konvergenz dieser Reihe erkannt ist. Diese Betrachtung überträgt sich sofort auch auf den Fall, daß die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ nur endlich viele positive Glieder enthält. Wir haben hiernach nur noch den Fall zu untersuchen, daß die absolut konvergente Reihe (1) sowohl positive als negative Glieder in unendlicher Anzahl enthält. Ersetzen wir in (1) alle *negativen* Glieder durch 0, so entstehe die durch $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ zu bezeichnende Reihe nicht-negativer Glieder. Da die Summe V_n der n ersten Glieder dieser Reihe nicht größer als die Summe $\bar{S}_n$ der n ersten Glieder der zu (1) gehörenden Reihe (3) der absoluten Beträge ist, so hat zufolge der Konvergenz der Reihe (3) auch die Reihe $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ eine bestimmte endliche Summe:

$$V = \lim_{n=\infty} V_n = \lim_{n=\infty} (v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}),$$

von der wir auch wissen, daß sie bei Gliederumordnung unverändert bleibt. Ersetzen wir andrerseits in (1) alle *positiven* Glieder durch 0, so entstehe die unendliche Reihe $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ nicht-positiver Glieder. Von ihr erkennen wir wieder durch Vergleichung mit der Reihe (3), daß sie eine von der Gliederanordnung unabhängige endliche Summe:

$$W = \lim_{n=\infty} W_n = \lim_{n=\infty} (w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1})$$

besitzt. Nun gilt aber für die Summe der n ersten Glieder der Reihe (1) einfach $S_n = V_n + W_n$, woraus sich für $\lim n = \infty$ als Summe unserer Reihe (1) ergibt:

$$S = \lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} (V_n + W_n) = V + W.$$

Aus der Unabhängigkeit der Summen V und W von der Gliederanordnung folgt dann aber weiter, daß auch nach einer beliebigen Umordnung der Glieder in (1) wieder dieselbe Summe S herauskommen muß. Die absolut konvergente Reihe (1) ist also in der Tat unbedingt konvergent.

An den hiermit bewiesenen Satz reiht sich endlich noch der folgende an[1]): *Eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe ist stets „bedingt“ konvergent und kann einer solchen Gliederumordnung unterworfen werden, daß die Reihe in der neuen Anordnung eine „beliebig“ vorgeschriebene Zahl S als Summe hat.*

---

1) Die in Kleindruck gegebene, weiterhin nicht zur Verwendung kommende Entwicklung darf beim ersten Studium übersprungen werden.

Wie wir soeben sahen, ist eine konvergente Reihe, die entweder nur endlich viele negative oder nur endlich viele positive Glieder hat, stets auch absolut konvergent. Die jetzt vorgelegte Reihe, die zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent sein soll, muß also notwendig sowohl positive wie negative Glieder in unendlicher Anzahl enthalten. Wir gebrauchen die Reihen $v_0 + v_1 + \cdots$ und $w_0 + w_1 + \cdots$ im eben erklärten Sinne und haben wieder für die Summe S_n der n ersten Glieder der Reihe (1) die Darstellung $S_n = V_n + W_n$, während für die zugehörige Reihe (3) die Summe $\bar{S}_n$ der n ersten Glieder gegeben ist durch:

$$\bar{S}_n = V_n - W_n = V_n + |W_n|.$$

Nun ist der Annahme gemäß $\lim\limits_{n=\infty} \bar{S}_n = \infty$; also ist mindestens eine der Gleichungen:

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} V_n = +\infty, \qquad \lim_{n=\infty} W_n = -\infty$$

erfüllt. Wäre aber nur eine erfüllt, so könnte nicht $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ eine endliche Zahl sein; also bestehen beide Gleichungen (6), *d. h. die beiden Reihen $v_0 + v_1 + \cdots$ und $w_0 + w_1 + \cdots$ sind divergent.*

Bevor wir nun eine Gliederumordnung der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ vornehmen, wollen wir mit den beiden divergenten Reihen:

$$(7) \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots, \qquad w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

erst noch eine unwesentliche Umgestaltung vornehmen. Wir lassen in der zweiten Reihe alle Glieder des Wertes 0 fort, in der ersten Reihe aber alle diejenigen Glieder des Wertes 0, die negativen u_k entsprechen; dann erschöpfen die beiden divergenten Reihen (7) die Glieder der Reihe (1) gerade einfach und vollständig. Um nun durch Neuanordnung eine beliebig gewählte Zahl S als Summe zu gewinnen, schalten wir die Glieder der Reihen (7) in folgender Art zwischen einander: Ist etwa $S \geq 0$, so beginnen wir mit den ν_1 ersten Gliedern der ersten[1]) Reihe (7) und können (wegen der ersten Bedingung (6)) die Anzahl ν_1 so bestimmen, daß:

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{\nu_1 - 1} > S$$

ist, während die um ihr letztes Glied $v_{\nu_1 - 1}$ verminderte links stehende Summe noch nicht $> S$ ist. Sodann fügen wir die μ_1 ersten Glieder der zweiten Reihe (7) an und können dabei μ_1 so bestimmen (s. die zweite Gleichung (6)), daß:

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_{\nu_1 - 1} + w_0 + w_1 + \cdots + w_{\mu_1 - 1} < S$$

wird, während die vom letzten Gliede $w_{\mu_1 - 1}$ befreite links stehende Summe noch nicht $< S$ ist. Man wolle nun beachten, daß auch noch die Reihenreste:

$$v_{\nu_1} + v_{\nu_1 + 1} + v_{\nu_1 + 2} + \cdots, \qquad w_{\mu_1} + w_{\mu_1 + 1} + w_{\mu_1 + 2} + \cdots$$

für sich divergente Reihen darstellen. Fügen wir also jetzt die weiteren Glieder $v_{\nu_1}, v_{\nu_1 + 1}, \ldots, v_{\nu_2 - 1}$ an, so können wir die Anzahl ν_2 dabei so wählen, daß:

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_{\nu_1 - 1} + w_0 + w_1 + \cdots + w_{\mu_1 - 1} + v_{\nu_1} + v_{\nu_1 + 1} + \cdots + v_{\nu_2 - 1} > S$$

wird, während die um $v_{\nu_2 - 1}$ verminderte linke Seite noch nicht $> S$ ist. Dann folgen weitere Glieder $w_{\mu_1}, \ldots$ usw. So werden nach und nach alle Glieder der ursprünglichen Reihe untergebracht.

Bilden wir nun für die in dieser Art neugeordnete Reihe $u_0' + u_1' + u_2' + \cdots$ die Summe der n ersten Glieder $S_n' = u_0' + u_1' + \cdots + u_{n-1}'$, so ist aus den eben

---

1) Ist $S < 0$, so hat man mit der zweiten Reihe (7) zu beginnen.

betrachteten Ungleichungen leicht folgender Schluß zu ziehen: Ist u'_{n-1} eine Zahl v, etwa v_{v_i+l}, so ist $|S - S'_n|$ jedenfalls nicht größer als die größere der beiden Zahlen $|w_{\mu_i - 1}|$ und $v_{v_{i+1}-1}$; ist aber $u'_{n-1} = w_{\mu_k + m}$, so ist $|S - S'_n|$ nicht größer als die größere der Zahlen $v_{v_{k+1}-1}$ und $|w_{\mu_{k+1}-1}|$. Zufolge (7) S. 200 nähern sich aber die v und w als Glieder der konvergenten Reihe $u_0 + u_1 + \cdots$ mit wachsenden Indizes der Grenze 0. Es ist also:

$$\lim_{n=\infty} |S - S'_n| = 0;$$

d. h. die Summe der neu angeordneten Reihe ist in der Tat die willkürlich gewählte Zahl S.

3. Addition, Subtraktion und Multiplikation unendlicher Reihen. Als „Summe" der beiden unendlichen Reihen:

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \qquad u_0' + u_1' + u_2' + \cdots$$

wollen wir die unendliche Reihe:

$$(2) \qquad u_0'' + u_1'' + u_2'' + \cdots$$

bezeichnen, deren Glieder nach dem Gesetze:

$$u_0'' = u_0 + u_0', \quad u_1'' = u_1 + u_1', \quad u_2'' = u_2 + u_2', \ldots$$

gebildet sind; entsprechend heißt die Reihe (2) die „Differenz" der beiden Reihen (1), falls:

$$u_0'' = u_0 - u_0', \quad u_1'' = u_1 - u_1', \quad u_2'' = u_2 - u_2', \ldots$$

zutrifft. Dann gilt folgender Satz: *Sind die beiden Reihen (1) konvergent, und sind S und S' die Werte ihrer Summen, so stellt auch die Summe (2) der beiden Reihen sowie ihre Differenz (2) je eine konvergente Reihe dar, und es ist deren Summe $S'' = S + S'$ bzw. $= S - S'$.* Sind nämlich S_n, S_n', S_n'' die Summen der n ersten Glieder der Reihen (1) und (2), so ist:

$$S_n'' = S_n + S_n' \quad \text{bzw.} \quad S_n'' = S_n - S_n',$$

je nachdem in (2) die Summe oder Differenz der Reihen (1) vorliegt. Hieraus folgt für $\lim n = \infty$ der aufgestellte Satz.

Da der absolute Betrag einer Summe oder einer Differenz zweier Zahlen nicht größer als die Summe der absoluten Beträge der beiden Zahlen ist:

$$|u_k \pm u_k'| \leqq |u_k| + |u_k'|,$$

so folgt leicht weiter, *daß die Reihe (2), d. h. die Summe oder die Differenz der beiden Reihen (1), „absolut" konvergent ist, falls dies von den beiden Reihen (1) gilt.* Übrigens werden die gewonnenen Sätze durch wiederholte Anwendung sofort *auf Summen von drei, vier usw. Reihen* übertragen.

Auch ein „Produkt" der beiden unendlichen Reihen (1) können wir erklären, indem wir diese Reihen wie endliche Aggregate ausmultiplizieren und die Produkte der einzelnen Glieder in geeigneter Weise zusammenfassen. Wir setzen nämlich jetzt:

$$u_k'' = u_0 u_k' + u_1 u_{k-1}' + u_2 u_{k-2}' + \cdots + u_k u_0', \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3}$$

und nennen die mit diesen $u_0'', u_1'', u_2'', \cdots$ gebildete Reihe (2) das „*Produkt*" der Reihen (1). Hier gilt dann der Satz: *Sind die beiden Reihen* (1) *absolut konvergent, und sind S und S' ihre Summen, so ist auch das Produkt* (2) *absolut konvergent und hat die Summe $S'' = S \cdot S'$.*

Wir beweisen diesen Satz zunächst unter der Voraussetzung, daß $u_k \geqq 0$, $u_k' \geqq 0$ gilt, daß also die Reihen (1) lauter nicht-negative Glieder haben. Das Produkt der beiden n-gliedrigen Summen:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}, \qquad S_n' = u_0' + u_1' + \cdots + u_{n-1}'$$

können wir in folgender Art anordnen:

$$S_n \cdot S_n' = (u_0 u_0') + (u_0 u_1' + u_1 u_0') + \cdots + (u_0 u_{n-1}' + u_1 u_{n-2}' + \cdots + u_{n-1} u_0')$$
$$+ (u_1 u_{n-1}' + u_2 u_{n-2}' + \cdots + u_{n-1} u_1') + \cdots + (u_{n-1} u_{n-1}').$$

Die ersten n Klammern sind die Glieder $u_0'', u_1'', \ldots, u_{n-1}''$ des Produktes der beiden Reihen; da die weiter folgenden Klammern wegen $u_k \geqq 0$, $u_k' \geqq 0$ lauter nicht-negative Werte haben, so folgt $S_n'' \leqq S_n \cdot S_n'$. Diese $(n-1)$ weiter folgenden Klammern aber enthalten je einen Teil der Glieder $u_n'', u_{n+1}'', \ldots, u_{2n-2}''$, sind also (wieder wegen $u_k \geqq 0$, $u_k' \geqq 0$) jedenfalls nicht größer als diese Glieder; demnach gilt $S_n \cdot S_n' \leqq S_{2n-1}''$.

Nun ist im vorliegenden Falle $S_k'' \leqq S_{k+1}''$, so daß die $S_1'', S_2'', \ldots$ eine monotone Reihe „nicht-abnehmender" Zahlen bilden. Somit existiert eine Grenze $\lim\limits_{n=\infty} S_n'' = S''$, die endlich oder auch gleich $+\infty$ sein kann. Aus:

$$S_n'' \leqq S_n \cdot S_n' < S \cdot S'$$

folgt aber, daß $S'' \leqq S \cdot S'$ und damit *endlich* ist. Aus $S_n \cdot S_n' \leqq S_{2n-1}''$ folgt ferner:

$$S'' = \lim_{n=\infty} S_{2n-1}'' \geqq \lim_{n=\infty} (S_n \cdot S_n') = S \cdot S',$$

so daß nur $S'' = S \cdot S'$ übrig bleibt. Das „Produkt" (2) ist also in der Tat konvergent und (wegen $u_k'' \geqq 0$) auch absolut konvergent; auch hat es, wie behauptet, die Summe $S'' = S \cdot S'$.

Gilt $u_k \leqq 0$, $u_k' \geqq 0$, so gilt $u_k'' \leqq 0$, und wir finden, wie soeben, leicht $S_n'' \geqq S_n \cdot S_n'$ und $S_n \cdot S_n' \geqq S_{2n-1}''$, woraus die Gültigkeit des Satzes auch in diesem Falle hervorgeht. Auch der Fall $u_k \leqq 0$, $u_k' \leqq 0$ erledigt sich ebenso leicht: Der über das Produkt (2) aufgestellte Satz ist also jedenfalls auch in dem Falle richtig, daß eine der Reihen (1) lauter nicht-

positive und die andere lauter nicht-negative Glieder enthält, sowie daß beide Reihen aus lauter nicht-positiven Gliedern bestehen.

Es bleibt jetzt nur noch der Fall, daß in den beiden absolut konvergenten Reihen (1) positive und negative Glieder in beliebiger Art vorkommen. Man wolle dann aus $u_0 + u_1 + u_3 + \cdots$ wie S. 204 dadurch, daß man alle negativen Glieder durch 0 ersetzt, die Reihe $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ herstellen, die Reihe $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ aber dadurch, daß man alle positiven Glieder durch 0 ersetzt. Dann ist natürlich $u_k = v_k + w_k$, wo jedesmal mindestens einer der Summanden den Wert 0 hat; übrigens sind die beiden Reihen $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ und $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ (wegen der absoluten Konvergenz von $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$) selbst konvergent und mögen die Summen V und W haben, welche $S = V + W$ als Summe von $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ liefern. Ebenso erklären wir von der zweiten Reihe (1) aus die beiden Reihen $v_0' + v_1' + v_2' + \cdots$ und $w_0' + w_1' + w_2' + \cdots$ mit den Summen V' und W', welche $S' = V' + W'$ als Summe der Reihe $u_0' + u_1' + u_2' + \cdots$ liefern.

Kombinieren wir jetzt die Reihen $v_0 + v_1 + \cdots$, $w_0 + w_1 \cdots$ mit $v_0' + v_1' + \cdots$, $w_0' + w_1' + \cdots$ auf alle vier Arten zu Paaren, so gewinnen wir als die Produkte je zweier kombinierter Reihen vier neue unendliche Reihen, deren allgemeine Glieder zufolge (3) die Gestalt haben:

$$(4) \qquad \sum_{\nu=0}^{k} v_\nu v'_{k-\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{k} v_\nu w'_{k-\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{k} w_\nu v'_{k-\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{k} w_\nu w'_{k-\nu}.$$

Für diese vier Produkte ist unser Satz bereits bewiesen; die vier unendlichen Reihen der allgemeinen Glieder (4) sind also absolut konvergent und haben die Summen $V \cdot V'$, $V \cdot W'$, $W \cdot V'$, $W \cdot W'$. Durch Addition dieser vier Reihen gewinnt man die Reihe des allgemeinen Gliedes:

$$\sum_{\nu=0}^{k} (v_\nu v'_{k-\nu} + v_\nu w'_{k-\nu} + w_\nu v'_{k-\nu} + w_\nu w'_{k-\nu}) = \sum_{\nu=0}^{k} (v_\nu + w_\nu)(v'_{k-\nu} + w'_{k-\nu})$$
$$= \sum_{\nu=0}^{k} u_\nu u'_{k-\nu},$$

welche nach den Sätzen über Addition unendlicher Reihen wieder absolut konvergent ist und die Summe:

$$VV' + VW' + WV' + WW' = (V + W)(V' + W') = S \cdot S'$$

hat. Die hiermit gewonnene Reihe ist aber zufolge (3) keine andere als das „Produkt“ der beiden Reihen (1), so daß nunmehr unser Satz im vollen Umfange bewiesen ist.

4. Hinreichende Kennzeichen der Konvergenz und der Divergenz. Es besteht folgendes hinreichende, aber nicht notwendige Kennzeichen der Konvergenz: *Eine unendliche Reihe*:

(1) $$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

mit lauter von 0 verschiedenen Gliedern ist absolut konvergent, wenn von irgend einem Gliede u_m *ab der Quotient jedes Gliedes* u_{k+1} *und des nächst voraufgehenden Gliedes* u_k *absolut nicht größer als eine positive Zahl* q *ist, die selbst kleiner als* 1 *ist:*

(2) $$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leqq q < 1, \qquad k = m, m+1, m+2, \ldots$$

Wir ziehen nämlich aus dieser Voraussetzung die Folgerungen:

$$\begin{aligned} |u_{m+1}| &\leqq q \cdot |u_m|, \\ |u_{m+2}| &\leqq q \cdot |u_{m+1}| \leqq q^2 \cdot |u_m|, \\ |u_{m+3}| &\leqq q \cdot |u_{m+2}| \leqq q^3 \cdot |u_m|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |u_{m+n-1}| &\leqq q \cdot |u_{m+n-2}| \leqq q^{n-1} \cdot |u_m|. \end{aligned}$$

Wenn wir demnach mit $\bar{S}_{m+n}$ die Summe der $(m+n)$ ersten Glieder der zu (1) gehörigen Reihe der absoluten Beträge $|u_k|$ bezeichnen, so folgt aus den vorstehenden Ungleichungen für die Summe:

$$\bar{S}_{m+n} = \bar{S}_m + |u_m| + |u_{m+1}| + \cdots + |u_{m+n-1}|$$

die weitere Ungleichung:

$$\bar{S}_{m+n} \leqq \bar{S}_m + |u_m| \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}).$$

Aber aus $0 < q < 1$ ergibt sich:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1}{1-q} - q^n \cdot \frac{1}{1-q} < \frac{1}{1-q},$$

so daß wir für *jedes* $n > 0$ die Ungleichung:

$$\bar{S}_{m+n} < \bar{S}_m + |u_m| \cdot \frac{1}{1-q}$$

gewinnen. Somit ist $\lim\limits_{n=\infty} \bar{S}_{m+n}$ selbst nicht größer als die rechte Seite der letzten Ungleichung, so daß die Reihe (1) tatsächlich absolut konvergent ist.

Dem bewiesenen Satze steht der folgende weitere Satz gegenüber: *Die Reihe* (1) *ist divergent, falls von irgend einem Gliede* u_m *ab der Quotient jedes Gliedes* u_{k+1} *und des nächst voraufgehenden Gliedes* u_k *absolut nicht kleiner als* 1 *ist:*

(3) $$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \geqq 1, \qquad k = m, m+1, m+2, \cdots.$$

Hier ist nämlich für jedes n die Ungleichung $|u_{m+n}| \geqq |u_m|$ erfüllt. Da aber u_m als von 0 verschieden gilt, so ist die nach (7) S. 200 notwendige Konvergenzbedingung $\lim\limits_{n=\infty} u_{m+n} = 0$ nicht erfüllt, d. h. die Reihe divergiert.

In vielen Fällen nähert sich der in (2) und (3) betrachtete Quotient für $\lim k = \infty$ einer Grenze g. Ist $g < 1$, so ist die Zahl $\delta = \frac{1}{2}(1-g) > 0$. Es gibt dann einen zu diesem δ gehörenden Index m der Art, daß

$$(4) \qquad -\delta < \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| - g < +\delta, \qquad k = m,\ m+1,\ m+2, \ldots$$

zutrifft. Nun ist aber, wenn $g + \delta = q$ gesetzt wird:

$$0 < q = g + \delta = \frac{1}{2}(g+1) < 1.$$

Für die hiermit erklärte Zahl q trifft dann die Konvergenzbedingung (2) tatsächlich zu. Ist zweitens $g > 1$, so setze man $\delta = g - 1$ und hat dann wieder einen Index m, von dem an die Ungleichung (4) gilt. Da jetzt $g - \delta = 1$ ist, so trifft die Bedingung (3) der Divergenz zu. *Nähert sich der Quotient des einzelnen Gliedes u_{k+1} und des voraufgehenden Gliedes u_k, absolut genommen, mit wachsendem k einer Grenze:*

$$(5) \qquad \lim_{k=\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = g,$$

so ist die Reihe konvergent, wenn $g < 1$ ist, und divergent für $g > 1$.

Für eine Reihe, bei der zwar eine Grenze (5) existiert, für welche jedoch diese Grenze gleich 1 ist, geben die entwickelten Kriterien noch keinen Aufschluß über die Konvergenz. Ein hierher gehöriges Beispiel liefert die Reihe:

$$(6) \qquad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots,$$

in welcher s eine positive Konstante sein soll und die Werte $1^s, 2^s, 3^s, \ldots$ im Sinne von (7) S. 40 reell und positiv genommen werden mögen. Nach S. 201 liegt für $s = 1$ Divergenz vor, und also ist, da in (6) nur positive Glieder auftreten, $\lim\limits_{n=\infty} S_n = \infty$. Ist $s < 1$, so gilt für alle ganzen Zahlen $n > 1$:

$$n^s < n, \qquad \frac{1}{n^s} > \frac{1}{n},$$

so daß auch jetzt $\lim\limits_{n=\infty} S_n = \infty$ sein muß. Ist $s > 1$, so bilde man die Summe S_n für $n = 2^\nu - 1$, unter ν eine ganze Zahl > 1 verstanden. Die n Glieder dieser Summe können wir in folgender Art zusammenfassen:

$$S_n = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{7^s}\right) + \left(\frac{1}{8^s} + \cdots + \frac{1}{15^s}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{(2^{\nu-1})^s} + \frac{1}{(2^{\nu-1}+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(2^\nu - 1)^s}\right);$$

es sind also in der ersten Klammer 2 Glieder, in der zweiten 2^2 Glieder, usw., endlich in der letzten, d. i. der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Klammer, $2^{\nu-1}$ Glieder eingeschlossen. In jeder Klammer ist das erste Glied das größte; ersetzen wir also alle Glieder der einzelnen Klammer durch das erste, so wird die rechte Seite der letzten Gleichung dadurch vergrößert:

$$S_n < 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{4^s} + \cdots + \frac{2^{\nu-1}}{(2^{\nu-1})^s} = 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^{\nu-1})^{s-1}}.$$

Dieser Ungleichung können wir die Form geben:

$$S_n < 1 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^{\nu-1},$$

wo wir rechter Hand eine endliche geometrische Reihe mit dem Quotienten $2^{-(s-1)}$ gewonnen haben. Für $s-1>0$ ist aber dieser Quotient <1, so daß wir für alle $n=2^\nu-1$:

$$(7) \qquad S_n < \frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}} = \frac{2^s}{2^s-2}$$

erhalten. Nun bilden aber für unsere Reihe (6) mit lauter *positiven* Gliedern die $S_1, S_2, S_3, \ldots$ eine monotone Reihe *wachsender* Zahlen. Die Ungleichung (7) gilt demnach für alle Indizes n. *Die Reihe* (6) *divergiert für* $s \leq 1$; *für* $s>1$ *ist sie konvergent und hat eine Summe, die nicht größer als die in* (7) *rechts stehende Zahl ist.*

Ein zweites hinreichendes Kriterium der Konvergenz ist durch folgenden Satz gegeben: *Die Reihe* (1) *konvergiert absolut, falls von irgend einem endlichen Index* m *ab die* k^{te} *Wurzel aus dem absoluten Betrage* $|u_k|$ *nicht größer als eine positive Zahl* q *ist, die selbst kleiner als* 1 *ist:*

$$(8) \qquad \sqrt[k]{|u_k|} \leq q < 1, \qquad k = m, m+1, m+2, \ldots.$$

Hier gilt nämlich vom Index m ab $|u_k| \leq q^k$, so daß man für die zu (1) gehörige Reihe der absoluten Beträge findet:

$$\bar{S}_{m+n} = \bar{S}_m + |u_m| + |u_{m+1}| + \cdots + |u_{m+n-1}| \leq \bar{S}_m + q^m(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}),$$

woraus mit Rücksicht auf $q<1$ die Behauptung leicht folgt. Es reiht sich weiter der Satz an: *Die Reihe* (1) *divergiert, wenn kein endlicher Index* m *existiert, von dem ab* $\sqrt[k]{|u_k|}<1$ *beständig gilt.* In diesem Falle ist nämlich, wie groß wir auch m nehmen mögen, immer noch ein auf u_m folgendes Glied u_k nachweisbar, für welches $\sqrt[k]{|u_k|} \geq 1$ und also $|u_k| \geq 1$ gilt; dann aber ist die notwendige Konvergenzbedingung (7) S. 200 nicht erfüllt.

14*

5. Gleichmäßige Konvergenz einer unendlichen Reihe von Funktionen. Es soll jetzt eine unendliche Reihe betrachtet werden, deren Glieder Funktionen $u_k(x)$ einer unabhängigen Variablen x sind:

(1) $$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots.$$

Diese Funktionen $u_k(x)$ mögen in einem abgeschlossenen Intervall $a \leqq x \leqq b$ erklärt und daselbst *eindeutig* und *stetig* sein. Es soll ferner für jedes x des Intervalles die Reihe (1) konvergent sein, so daß jedem x eine bestimmte endliche Summe der Reihe zukommt, die wir als Funktion von x mit $S(x)$ bezeichnen. Weiter bezeichnen wir dem bisherigen Brauche entsprechend mit $S_n(x)$ die Summe der n ersten Glieder der Reihe und nennen:
$$S(x) - S_n(x) = R_n(x)$$
den „*Reihenrest*".

Der Annahme gemäß ist für jedes spezielle x des Intervalles nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl δ ein endlicher Index m derart angebbar, daß für *alle* Indizes $n \geqq m$ die Ungleichung zutrifft:

(2) $$|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| < \delta.$$

Es ist zunächst zu erwarten, daß der Index m, von dem ab die Ungleichung (2) erfüllt ist, nicht nur von δ, sondern auch von x abhängt. *Sollte sich indessen nach Auswahl von δ ein bestimmter endlicher Index m angeben lassen, von dem ab die Ungleichung* (2) *erfüllt ist, welcher Punkt x des Intervalles auch vorliegen mag, so heißt die Reihe* (1) *im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ „gleichmäßig" oder „im gleichen Grade" konvergent.*

Auf Reihen dieser Art bezieht sich folgender grundlegende Satz: *Eine in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig konvergente Reihe eindeutiger und stetiger Funktionen hat eine Summe $S(x)$, die in diesem Intervalle gleichfalls eindeutig und gleichmäßig stetig ist.* Sind nämlich x_1 und x_2 irgend zwei Punkte des Intervalles, so folgt aus $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$ zunächst:
$$|S(x_1) - S(x_2)| = |S_n(x_1) - S_n(x_2) + R_n(x_1) - R_n(x_2)|.$$
Nun ist aber der absolute Betrag eines Aggregates nicht größer als die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder des Aggregates:

(3) $$|S(x_1) - S(x_2)| \leqq |S_n(x_1) - S_n(x_2)| + |R_n(x_1)| + |R_n(x_2)|.$$

Ist nun eine beliebig kleine positive Zahl δ ausgewählt, so setze man $\delta' = \frac{1}{3}\delta$ und bestimme einen zugehörigen Index n von der Art, daß $|R_n(x)| < \delta'$ für jedes x des Intervalles, also auch für x_1 und x_2 zutrifft. Für dieses n ist $S_n(x)$ eine Summe von *endlich vielen*, nämlich von n im Intervalle eindeutigen und stetigen Funktionen, so daß $S_n(x)$ nach den Sätzen von S. 20 daselbst gleichfalls eine eindeutige und stetige Funk-

tion darstellt. Nach der Erklärung der Stetigkeit (S. 17) können wir demnach für das vorliegende δ' eine von 0 verschiedene positive Zahl λ angeben, so daß:

$$|S_n(x_1) - S_n(x_2)| < \delta'$$

zutrifft, sobald die Werte x_1 und x_2 des Intervalles die Ungleichung $|x_2 - x_1| \leqq \lambda$ erfüllen. Für dieses λ ist dann offenbar auch:

$$|S(x_1) - S(x_2)| < 3\delta' = \delta,$$

so daß die gleichmäßige Stetigkeit von $S(x)$ im ganzen Intervalle bewiesen ist.

Für die Erläuterung des Satzes ist ein einfaches Beispiel einer in einem Intervalle zwar konvergenten, aber nicht gleichmäßig konvergenten Reihe am lehrreichsten. Die Reihe:

$$(1-x) + (1-x)x + (1-x)x^2 + (1-x)x^3 + \cdots$$

ist im ganzen Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ konvergent; sie hat nämlich für jedes x dieses Intervalles mit Ausnahme von $x = 1$ die Summe 1 und für $x = 1$ die Summe 0. Am oberen Ende des Intervalles liegt also ein Unstetigkeitspunkt der Reihensumme $S(x)$ vor, so daß die „gleichmäßige“ Konvergenz im ganzen Intervalle ausgeschlossen sein muß. Prüfen wir nun den Reihenrest:

$$R_n(x) = (1-x)x^n + (1-x)x^{n+1} + (1-x)x^{n+2} + \cdots = x^n$$

und fordern das Zutreffen der Bedingung:

$$|R_n(x)| = x^n \leqq \delta,$$

so ist dieselbe beim einzelnen x für alle der Bedingung:

(4) $$n \geqq \frac{|\ln \delta|}{|\ln x|}$$

genügenden Indizes, aber nicht bereits für kleinere Indizes n erfüllt. Es liegt also tatsächlich an jeder besonderen Stelle $x < 1$ Konvergenz vor. Aber die rechte Seite der Ungleichung (4) nähert sich für $\lim x = 1$ der Grenze $+\infty$; es kann demnach nach Auswahl von δ *keine endliche* Zahl n geben, so daß die Bedingung (4) für *alle* x des Intervalles $0 \leqq x \leqq 1$ richtig wäre. Die Reihe ist also in der Tat im Intervalle *nicht* „gleichmäßig“ konvergent.

6. Haupteigenschaften der Potenzreihen. Als eine „Potenzreihe“ bezeichnet man die unendliche Reihe:

(1) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

in welcher $u_k(x) = a_k x^k$ das Produkt der k^{ten} Potenz von x und eines konstanten Koeffizienten a_k ist. Um auf diese Reihe das am Schlusse von

§ 4 entwickelte Konvergenzkriterium anzuwenden, betrachten wir die Reihe der nicht-negativen Zahlen $\sqrt[n]{|a_n|}$:

(2) $$|a_1|,\ \sqrt{|a_2|},\ \sqrt[3]{|a_3|},\ \sqrt[4]{|a_4|},\ \ldots$$

und unterscheiden betreffs derselben folgende zwei Fälle: Entweder existiert keine endliche Zahl, die größer ist als alle Zahlen (2), oder man kann eine solche Zahl angeben. Im ersten Falle mag man die endliche Zahl ω noch so groß wählen, es wird stets einen und demnach sogar unbegrenzt viele Indizes n geben, für die:

(3) $$\sqrt[n]{|a_n|} > \omega$$

zutrifft; hat man nämlich einen ersten Index n nachgewiesen, für den (3) gilt, so setze man $\sqrt[n]{|a_n|} = \omega'$ und kann einen zweiten von n verschiedenen Index n' nachweisen, für den $\sqrt[n']{|a_{n'}|} > \omega'$ gilt usw. Im zweiten Falle beweisen wir mittelst der S. 5ff. durchgeführten Überlegung die Existenz einer endlichen, nicht-negativen Zahl a von folgender Beschaffenheit: Ist δ eine beliebig klein gewählte positive Zahl, so gibt es in der Reihe (2) höchstens *endlich viele* Zahlen, die $> a + \delta$ sind, aber stets *unendlich viele*, die $> a - \delta$ sind. Übrigens können wir sagen, daß im Falle (3) die eben gemeinte Zahl a unendlich sei. Ist $a = 0$, so *muß* $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ sein; ist $a > 0$, so *kann* $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ sein.

Ist $g = a^{-1}$ der reziproke Wert von a, so gilt folgender grundlegende Satz: *Die Potenzreihe* (1) *ist absolut konvergent für jedes x des nicht-abgeschlossenen Intervalles $-g < x < +g$ und divergent für jedes x, dessen Betrag $|x| > g$ ist.* Dieses Intervall trägt demnach den Namen „*Konvergenzintervall*" der Reihe (1), und g heißt die „*obere*", $-g$ die „*untere Konvergenzgrenze*". Ist $a = \infty$, so existiert kein von 0 verschiedenes Konvergenzintervall der Reihe. Ist $a > 0$ und endlich, so gilt dasselbe von g; dann ist das Konvergenzintervall ein endlich ausgedehntes Intervall mit dem Mittelpunkte $x = 0$, und die Reihe möge „*beschränkt konvergent*" heißen. Ist $a = 0$ und also $g = \infty$, so besteht das Konvergenzintervall aus allen endlichen Werten x, und die Reihe heißt dann „*unbeschränkt konvergent*".

Beim Beweise des aufgestellten Satzes nehmen wir erstlich $g = 0$ und also $a = \infty$ an. Ist x irgend ein von 0 verschiedener Wert, so ist $|x|^{-1} = \omega$ endlich. Zufolge (3) gibt es keinen endlichen Index m, von dem ab $\sqrt[n]{|a_n|} < \omega = |x|^{-1}$ oder $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = \sqrt[n]{|u_n|} < 1$ beständig erfüllt wäre. Nach dem Schlußsatze von § 4 (S. 211) ist also die Reihe (1) für jeden von 0 verschiedenen Wert x divergent. Sind zweitens g und also $a = g^{-1}$ endlich und > 0, so befriedigt ein dem Innern des Intervalles

$-g < x < +g$ entnommenes, nicht verschwindendes x die Ungleichung $|x|^{-1} > a$, so daß die weiteren Ungleichungen gelten:

$$\delta = a\frac{|x|^{-1} - a}{|x|^{-1} + a} > 0, \qquad 0 < q = \frac{2a}{a + |x|^{-1}} < 1.$$

Die hiermit erklärten Zahlen δ und q ergeben $a + \delta = q \cdot |x|^{-1}$. Aus der Bedeutung von a folgt also, daß jetzt ein Index m angebbar ist, von dem an:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqq a + \delta = q \cdot |x|^{-1} \quad \text{oder} \quad \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = \sqrt[n]{|u_n|} \leqq q < 1$$

beständig erfüllt ist. Nach S. 211 ist also die absolute Konvergenz der Reihe für den gewählten Wert x sichergestellt. Ist hingegen $|x| > g$ und also $|x|^{-1} < a$, so setzen wir $a - |x|^{-1} = \delta$. Nun gibt es kein m, von dem ab:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < a - \delta = |x|^{-1}, \qquad \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = \sqrt[n]{|u_n|} < 1$$

beständig gültig wäre, so daß jetzt Divergenz vorliegt. Ist endlich $g = \infty$ und also $a = 0$, so gilt $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Wählt man irgend ein endliches x, so ist demnach auch:

$$\lim_{n=\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|\right) = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 0,$$

woraus die Konvergenz der Reihe nach S. 211 folgt. Damit ist der aufgestellte Satz im vollen Umfange bewiesen.

Leicht beweisbar ist weiter der folgende Satz: *Ist die Potenzreihe* (1) *für den positiven Wert $x = b$ absolut konvergent, so konvergiert sie gleichmäßig in dem abgeschlossenen Intervalle $-b \leqq x \leqq +b$.* Beziehen wir auf die zu (1) gehörende Reihe der absoluten Beträge die Bezeichnungen $\bar{S}_n$ und $\bar{R}_n$, so gibt es zufolge der Voraussetzung nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl $\delta > 0$ einen Index m der Art, daß für alle $n \geqq m$ die Ungleichung $\bar{R}_n(b) < \delta$ zutrifft. Da nun für jedes der Bedingung $|x| \leqq b$ genügende x die Ungleichung:

$$|R_n(x)| \leqq \bar{R}_n(x) \leqq \bar{R}_n(b)$$

zutrifft, so gilt *für das gleiche m* die Ungleichung $|R_n(x)| < \delta$ bei allen $n \geqq m$, womit die gleichmäßige Konvergenz festgestellt ist.

Der eben bewiesene Satz setzt natürlich $g > 0$ voraus, und er gilt für jedes der Bedingung $b < g$ genügende b; im Falle einer beschränkt konvergenten Reihe ist der Satz auch noch für $b = g$ richtig. Betreffs des Verhaltens einer beschränkt konvergenten Reihe (1) an den Grenzen der Konvergenz $\pm g$ ist das Beispiel der folgenden Reihe lehrreich:

$$x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \frac{x^4}{4^s} + \cdots. \tag{4}$$

Wir stellen zunächst mittelst einer Regel von S. 193 fest, daß

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

gilt[1]), so daß für jedes s die Konvergenzgrenzen der Reihe (4) durch $g = +1$ und -1 gegeben sind. Unter Benutzung der Ergebnisse von S. 210ff. folgern wir sofort: *Für $s > 1$ liegt absolute Konvergenz von (4) an beiden Grenzen ± 1 vor, für $s = 1$ divergiert die Reihe an der oberen Grenze und konvergiert „bedingt" an der unteren Grenze, für $s \leqq 0$ liegt endlich Divergenz an beiden Grenzen vor.*

Es kann hiernach der Fall eintreten, daß eine Reihe an der einen Grenze (wir wollen sie g nennen, auch wenn es die untere ist) bedingt konvergent ist, wo sie dann an der anderen Grenze entweder divergiert oder gleichfalls bedingt konvergiert[2]). *Auch in diesem Falle ist die Reihe in einem bis an g heranreichenden und diesen Punkt mit enthaltenden Intervalle gleichmäßig konvergent.*

Um den letzten Satz zu beweisen, genügt es, die gleichmäßige Konvergenz für irgend ein Intervall $0 < c \leqq x \leqq g$ bzw. $g \leqq x \leqq c < 0$ darzutun[3]). Es gelingt dies mittelst folgender Überlegung: Schreibt man für $R_n(g)$ unter Fortlassung des Argumentes g kurz R_n, so gilt:

$$R_n = a_n g^n + a_{n+1} g^{n+1} + a_{n+2} g^{n+2} + \cdots$$

für alle Indizes n. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die Koeffizienten $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ so darzustellen:

$$a_n = (R_n - R_{n+1}) g^{-n}, \qquad a_{n+1} = (R_{n+1} - R_{n+2}) g^{-n-1}, \ldots.$$

Nun gilt aber für jedes x des zugrunde liegenden Intervalles:

$$R_n(x) = \lim_{k=\infty} (a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots + a_{n+k} x^{n+k}).$$

Setzen wir hier die eben berechneten Ausdrücke der Koeffizienten ein, so folgt, daß $R_n(x)$ die für $\lim k = \infty$ eintretende Grenze des nachfolgenden Aggregates ist:

$$(R_n - R_{n+1}) \left(\frac{x}{g}\right)^n + (R_{n+1} - R_{n+2}) \left(\frac{x}{g}\right)^{n+1} + \cdots + (R_{n+k} - R_{n+k+1}) \left(\frac{x}{g}\right)^{n+k}.$$

---

1) Es nimmt nämlich die Funktion $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ für $x = \infty$ die unbestimmte Form ∞^0 an. Nach der genannten Regel stellt man leicht $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = 1$ fest.

2) Daß auch die letzte Möglichkeit vorliegen kann, lehre die Reihe:

$$x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} - \cdots,$$

deren Konvergenzgrenzen wieder ± 1 sind.

3) Es ist nämlich leicht einleuchtend, daß eine Potenzreihe, die in zwei z. T. sich deckenden Intervallen gleichmäßig konvergent ist, auch in dem aus beiden zusammengesetzten Intervalle gleichmäßig konvergiert.

Ordnen wir dieses Aggregat nach den R an, so gewinnt es die Gestalt:

$$(6)\qquad \left(\frac{x}{g}\right)^n R_n + \left(\frac{x}{g}\right)^n\left(\frac{x}{g}-1\right)R_{n+1} + \left(\frac{x}{g}\right)^{n+1}\left(\frac{x}{g}-1\right)R_{n+2} + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{x}{g}\right)^{n+k-1}\left(\frac{x}{g}-1\right)R_{n+k} - \left(\frac{x}{g}\right)^{n+k} R_{n+k+1}.$$

Wir wählen nun irgend ein $\delta > 0$, schreiben $\frac{1}{3}\delta = \delta'$ und können dann (wegen der Konvergenz unserer Potenzreihe an der Grenze g) einen Index m derart bestimmen, daß $|R_n| < \delta'$ für alle Indizes $n \geqq m$ zutrifft. Für den Absolutwert des Aggregates (6) kann man daraufhin leicht eine von k unabhängige Schranke angeben. Für das erste und letzte Glied gilt wegen $0 < \frac{x}{g} \leqq 1$:

$$\left|\left(\frac{x}{g}\right)^n R_n\right| < \delta', \qquad \left|-\left(\frac{x}{g}\right)^{n+k} R_{n+k+1}\right| < \delta'.$$

Der absolute Betrag der Summe der übrigen Glieder ist kleiner als:

$$\left(\frac{x}{g}\right)^n\left(1-\frac{x}{g}\right)\delta'\cdot\left\{1+\left(\frac{x}{g}\right)+\left(\frac{x}{g}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{g}\right)^{k-1}\right\} = \left(\frac{x}{g}\right)^n\delta'\left(1-\left(\frac{x}{g}\right)^k\right) < \delta'.$$

Somit ist der absolute Betrag des Aggregates (6) für jedes k kleiner als $3\delta' = \delta$, und dasselbe gilt auch von seiner für $\lim k = \infty$ eintretenden Grenze:

$$|R_n(x)| < \delta, \qquad n \geqq m.$$

Da für $n \geqq m$ auch $|R_n(g)| < \delta$ gilt, so ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe im Intervalle $c \leqq x \leqq g$ bzw. $g \leqq x \leqq c$ bewiesen.

Nach einem S. 212 aufgestellten Satze ist die Summe $S(x)$ einer unendlichen Reihe von Funktionen im Intervalle der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe eine gleichmäßig stetige Funktion von x. Für die Potenzreihen gilt demnach folgender abschließende Satz: *Die Summe $S(x)$ einer unbeschränkt konvergenten Potenzreihe ist eine in jedem endlichen Intervalle eindeutige und stetige Funktion; die Summe einer beschränkt konvergenten Potenzreihe ist in jedem Intervalle $-g < a \leqq x \leqq b < +g$ eine eindeutige und stetige Funktion von x; insbesondere kann auch $a = -g$ genommen werden, wenn die Reihe auch noch an der unteren Grenze konvergiert, und ebenso $b = +g$, falls auch noch an der oberen Grenze $+g$ Konvergenz stattfindet.*

7. Differentiation der Potenzreihen. Es sei irgend eine beschränkt oder unbeschränkt konvergente Potenzreihe:

$$(1)\qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

gegeben; es soll also die zur Zahlenreihe $|a_1|, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \ldots$ im Sinne von S. 214 gehörende Zahl a entweder > 0 und endlich oder $= 0$ sein,

wobei im letzteren Falle $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ gilt. Indem wir jedes Glied der Reihe (1) durch seine Ableitung in bezug auf x ersetzen, gewinnen wir die zu (1) gehörende *„abgeleitete Reihe"*:

(2) $$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$$

Von ihr können wir zeigen, daß sie dieselben Konvergenzgrenzen wie die Reihe (1) hat.

Da nämlich die Reihe (2) mit der Reihe:

$$a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + 4a_4x^4 + \cdots,$$

welche aus ihr durch Multiplikation mit x hervorgeht, stets zugleich konvergiert oder divergiert, so haben wir nur zu zeigen, daß zur Zahlenreihe $|a_1|, \sqrt{2|a_2|}, \sqrt[3]{3|a_3|}, \ldots$ dieselbe Zahl a gehört, wie zur Reihe $|a_1|, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \ldots$. Nennen wir die zur ersten Zahlenreihe $\sqrt[n]{n|a_n|}$ gehörende Zahl a zunächst etwa a', so ist jedenfalls $a' < a$ ausgeschlossen, da für $n > 1$ die Ungleichung $\sqrt[n]{n|a_n|} > \sqrt[n]{|a_n|}$ gilt. Ist aber etwa $a' > a$, so setze man $\delta = \frac{1}{3}(a' - a)$. Dann gibt es unbegrenzt viele n, für welche:

$$\sqrt[n]{n|a_n|} > a' - \delta = \frac{a + 2a'}{3}$$

gilt; und da von den zugehörigen Zahlen $\sqrt[n]{|a_n|}$ höchstens endlich viele $> a + \delta = \frac{2a + a'}{3}$ sind, so gibt es auch unbegrenzt viele Indizes n, für welche gleichzeitig die Ungleichungen bestehen:

$$\sqrt[n]{n|a_n|} > \frac{a + 2a'}{3}, \qquad \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \frac{2a + a'}{3},$$

und für welche demgemäß auch:

$$\sqrt[n]{n} > \frac{a + 2a'}{2a + a'}, \qquad \sqrt[n]{n} > 1 + \frac{a' - a}{2a + a'}$$

gilt. Dies aber widerspricht, da auf der rechten Seite der letzten Ungleichung im zweiten Gliede eine von 0 verschiedene positive Zahl steht, der in (5) S. 216 festgestellten Regel $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Es ist also auch $a' > a$ unmöglich, *so daß die abgeleitete Reihe* (2) *in der Tat dieselben Konvergenzgrenzen* $\pm g$ *wie die ursprüngliche Reihe hat.*

Übrigens folgt aus der Konvergenz der Reihe (1) an einer der Konvergenzgrenzen noch keineswegs allgemein auch die Konvergenz der abgeleiteten Reihe ebenda. So ist z. B. die Reihe:

$$x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \frac{x^5}{5^2} + \cdots$$

an der oberen Konvergenzgrenze 1 noch konvergent, während die abgeleitete Reihe daselbst divergiert.

Für die Argumente x im Innern des Konvergenzintervalles sind nun die Summen der Reihen (1) und (2) eindeutige und stetige Funktionen von x, die wir $f(x)$ und $F(x)$ nennen wollen. Um die Vermutung, die Funktion $f(x)$ sei differenzierbar und liefere als Ableitung die Funktion $F(x)$, zu prüfen, bilden wir zunächst den Differenzenquotienten von $f(x)$. Gehören die Argumente x und $(x + \Delta x)$ beide dem Innern des Konvergenzintervalles an, so gilt:

$$f(x + \Delta x) = a_0 + a_1(x + \Delta x) + a_2(x + \Delta x)^2 + a_3(x + \Delta x)^3 + \cdots,$$
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots.$$

Die nach Vorschrift von § 3, S. 206, herzustellende „Differenz" der beiden rechts stehenden konvergenten Reihen hat nach dem dort bewiesenen Satze die Reihensumme $f(x + \Delta x) - f(x)$. Dividieren wir durch Δx, so folgt:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(x+\Delta x)^k - x^k}{\Delta x}.$$

Nun ist aber zufolge des Mittelwertsatzes (S. 129):

$$\frac{(x+\Delta x)^k - x^k}{\Delta x} = k(x + \vartheta_k \cdot \Delta x)^{k-1}, \qquad 0 < \vartheta_k < 1,$$

so daß der Differenzenquotient von $f(x)$ durch folgende mit der abgeleiteten Reihe (2) verwandte Reihe darstellbar ist:

$$(3) \qquad \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x + \vartheta_k \cdot \Delta x)^{k-1}.$$

Es möge nun für $x \neq 0$ die Änderung Δx so klein angenommen werden, daß auch $x + \Delta x \neq 0$ und mit x von gleichem Zeichen ist. Dann ist die Funktion u^{k-1} in dem durch $u = x$ und $u = x + \Delta x$ eingegrenzten Intervalle monoton und behält diesen Charakter natürlich auch, falls wir Δx, absolut genommen, verkleinern[1]). Wir wollen nun unterscheiden, ob der einzelne Ausdruck:

$$(4) \qquad k a_k u^{k-1} = k a_k (x + \vartheta \cdot \Delta x)^{k-1},$$

falls ϑ als Variable von 0 bis 1 wächst, monoton abnimmt oder nicht[2]).

---

1) Das Vorzeichen von Δx ist zunächst willkürlich; doch soll bei Änderungen von Δx das einmal gewählte Vorzeichen beibehalten werden.

2) Zum letzten Falle gehören dann auch solche k, bei denen der Ausdruck (4) infolge Verschwindens von a_k konstant gleich 0 ist.

Im Anschluß hieran erklären wir zwei neue Systeme von Koeffizienten b_k und c_k durch folgende Festsetzung: Für diejenigen unter den Indizes k, bei denen der Ausdruck (4) mit wachsendem ϑ abnimmt, sei $b_k=0$, $c_k=a_k$; für die übrigen (unter Einschluß von $k=0$) sei $b_k=a_k$, $c_k=0$. Mit Hilfe der neuen Koeffizienten bilden wir die Ansätze:

$$(5) \qquad \varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \qquad \psi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

und bemerken, daß diese Reihen im bisherigen Konvergenzintervall jedenfalls auch konvergieren; denn die zugehörigen Reihen der absoluten Beträge sind „Bestandteile“ (s. S. 201) der zu (1) gehörenden Reihe der absoluten Beträge, und diese letztere Reihe konvergiert im Innern des Konvergenzintervalles absolut. Zu (5) gehören die „abgeleiteten Reihen“:

$$(6) \qquad \Phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k b_k x^{k-1}, \qquad \Psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}.$$

Andrerseits führt die Herstellung der Differenzenquotienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ auf die gleichfalls konvergenten Reihen:

$$\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}=\sum_{k=1}^{\infty} k b_k (x+\vartheta_k\cdot\Delta x)^{k-1}, \qquad \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}=\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x+\vartheta_k'\cdot\Delta x)^{k-1}.$$

Hier aber gilt zufolge der getroffenen Maßregel: Die Glieder der ersten Reihe werden nicht verkleinert, falls in jedem Gliede ϑ_k durch 1 ersetzt wird, und nicht vergrößert, falls überall ϑ_k durch 0 ersetzt wird; bei der zweiten Reihe gilt das Umgekehrte. Auch bleibt dieses Sachverhältnis bestehen, wenn wir Δx, absolut genommen, verkleinern. Also haben wir die Ungleichungen:

$$(7) \quad \Phi(x)\leqq\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}\leqq\Phi(x+\Delta x), \qquad \Psi(x)\geqq\frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}\geqq\Psi(x+\Delta x),$$

die auch bei abnehmendem Betrage $|\Delta x|$ gültig bleiben. Nun sind die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ im Konvergenzintervalle stetig; für $\lim \Delta x=0$ ergibt sich somit: Die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind differenzierbar und liefern als Ableitungen $\varphi'(x)=\Phi(x)$, $\psi'(x)=\Psi(x)$. Wegen $a_k=b_k+c_k$ ergibt endlich die Addition der Reihen (5) die Reihe (1) der Summe $\varphi(x)+\psi(x)=f(x)$, während die Addition der beiden Reihen (6) die abgeleitete Reihe (2) der Summe $\Phi(x)+\Psi(x)=F(x)$ liefert. Mit $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ist aber auch die Funktion $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ differenzierbar und ergibt als Ableitung:

$$f'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)=\Phi(x)+\Psi(x)=F(x).$$

Die durch die Summe einer Potenzreihe (1) *im Innern des Konvergenzintervalles dargestellte Funktion:*

(8) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

ist daselbst eindeutig, stetig und differenzierbar, und zwar gilt für die Ableitung die Darstellung:

(9) $$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$

mittelst einer Potenzreihe, welche dieselben Konvergenzgrenzen hat wie die Reihe (8). Man drückt dieses wichtige Theorem wohl kurz in der Weise aus, daß man sagt, eine Potenzreihe sei im Innern ihres Konvergenzintervalles *„gliedweise differenzierbar"*.

Über die Konvergenzgrenzen $\pm g$, sofern dieselben endlich sind, ist bei diesen Entwicklungen noch nichts ausgesagt. Doch ist aus dem Stetigkeitssatze am Schlusse von § 6, S. 217, einleuchtend, *daß, wenn die abgeleitete Reihe an einer der Grenzen* $\pm g$ *noch konvergiert, die Reihensumme daselbst* $\lim_{x=\pm g} f'(x)$ *ist.*

8. Die Reihen von Mac Laurin und Taylor. Auf Grund des Hauptsatzes von § 7 über die Differenzierbarkeit der durch die Reihe (1) S. 217 gelieferten Funktion $f(x)$ gewinnen wir durch wiederholte Anwendung die unbegrenzte Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,\\
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots,\\
f''(x) &= 2\cdot 1\cdot a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3 x + 4\cdot 3\cdot a_4 x^2 + \cdots,\\
f'''(x) &= 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4 x + 5\cdot 4\cdot 3\cdot a_5 x^2 + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Alle diese Reihen haben dieselben Konvergenzgrenzen $\pm g$, sind also insbesondere alle unbeschränkt konvergent, falls dies von der ersten Reihe gilt: *Die Funktion* $f(x)$ *hat also im Konvergenzintervalle Ableitungen jeder Ordnung.* Speziell gelten die vorstehenden Gleichungen für $x = 0$ und ergeben für dieses Argument:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \ldots.$$

Die Reihe (1) S. 217 kann demnach in die Gestalt gekleidet werden:

(1) $$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Im Anschluß an die Mac Laurinsche Formel (11) S. 168 nennen wir diese Reihe *die „Mac Laurinsche Reihe" der Funktion* $f(x)$. Unsere jetzigen

Entwicklungen schließen sich auf diese Weise zusammen mit denen von S. 167 ff., und wir gewinnen Aufschluß über die Frage, ob sich eine gegebene Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe entwickeln lasse. Wir haben als ersten Satz: *Ist eine Funktion $f(x)$ in eine beschränkt oder unbeschränkt konvergente Reihe $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$ entwickelbar, so ist diese Reihe immer die Mac Laurinsche Reihe* (1) *der Funktion, und also ist die Entwicklung nur in einer einzigen Art möglich.* Die Frage aber, ob diese eine Entwicklung zulässig ist, beantwortet der Mac Laurinsche Lehrsatz: *Hat die im Intervalle $0 \leqq u \leqq x$ bzw. $x \leqq u \leqq 0$ eindeutige und stetige Funktion $f(u)$ Ableitungen jeder Ordnung, die daselbst gleichfalls eindeutig und stetig sind, und gilt die „Konvergenzbedingung“ $\lim\limits_{n=\infty} R_n(x) = 0$, so nähern sich die Summen:*

$$S_n = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

mit wachsendem n der Grenze $f(x)$, und also besteht die Gleichung (1) *als die für das fragliche x konvergente Entwicklung von $f(x)$.*

Den Übergang zu einer an die Taylorsche Formel (8) S. 168 sich anschließenden „Taylorschen Reihe“ vermittelt folgende Betrachtung: Man setze $x - a = x_1$, unter a irgend eine Konstante verstanden, und schreibe zur Abkürzung $f(x) = f(a + x_1) = f_1(x_1)$. Durch Differentiation folgt:

$$f_1^{(n)}(x_1) = f^{(n)}(a + x_1) = f^{(n)}(x),$$

so daß insbesondere $f_1^{(n)}(0) = f^{(n)}(a)$ ist. Die Mac Laurinsche Reihe (1) der Funktion $f_1(x_1)$ nimmt dann, auf x und $f(x)$ umgerechnet, die Gestalt an:

$$(2)\quad f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots;$$

wir nennen sie *die „Taylorsche Reihe“ der Funktion $f(x)$* und sagen, sie liefere die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x)$ für die Umgebung der Stelle $x = a$, wobei sich für $a = 0$ die Potenzreihe (1) einordnet. Die Entwicklung (2) ist, wenn überhaupt, *nur in einer Weise möglich;* ihre Gültigkeitsbedingungen aber sind, *daß die im Intervalle $a \leqq u \leqq x$ bzw. $x \leqq u \leqq a$ eindeutige und stetige Funktion $f(x)$ daselbst eindeutige und stetige Ableitungen jeder Ordnung haben muß, und daß das nach* (9) *oder* (10) S. 168 *zu berechnende „Restglied“ die „Konvergenzbedingung“* $\lim\limits_{n=\infty} R_n(x) = 0$ *befriedigen muß.* Vielfach benutzt man auch die an (13) S. 168 sich anschließende Gestalt:

$$(3)\qquad f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1!} + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

der Taylorschen Reihe, deren Gültigkeitsbedingungen man aus den letzten Angaben leicht ablesen wird.

9. Ausführungen an Beispielen. Die Mac Laurinschen Formeln für die Funktionen e^x, $\sin x$ und $\cos x$ sind S. 169 und S. 172 angesetzt, und es zeigte sich, daß in allen drei Fällen $\lim_{n=\infty} R_n(x) = 0$ für jedes endliche Argument x zutraf. Aus (1) S. 169 sowie (1) und (2) S. 172 ergibt sich demnach: *Die Funktionen* e^x, $\sin x$ *und* $\cos x$ *gestatten die Entwicklungen in die unbeschränkt konvergenten Reihen:*

$$(1)\qquad \begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots. \end{cases}$$

Indem wir in der ersten dieser Gleichungen x im Zeichen wechseln, folgt als gleichfalls für jedes x gültig:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

Nun ist aber nach (7) S. 66 die halbe Summe von e^x und e^{-x} die Funktion $\mathfrak{Cos}\, x$ und die halbe Differenz die Funktion $\mathfrak{Sin}\, x$. Auf Grund der Regeln von S. 206 über Addition und Subtraktion konvergenter Reihen folgt somit: *Für die hyperbolischen Funktionen* $\mathfrak{Sin}\, x$ *und* $\mathfrak{Cos}\, x$ *gelten die Entwicklungen in die unbeschränkt konvergenten Reihen:*

$$(2)\quad \mathfrak{Sin}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad \mathfrak{Cos}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Bei der Mac Laurinschen Formel (1) S. 173 für die Funktion $\ln(1+x)$ gelang es uns damals nur, im Intervalle $-1 < x \leq +1$ die Gleichung $\lim_{n=\infty} R_n(x) = 0$ zu beweisen. In der Tat besteht der Satz: *Die Funktion* $\ln(1+x)$ *ist entwickelbar in die beschränkt konvergente Reihe:*

$$(3)\qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots,$$

deren Konvergenzintervall $-1 < x \leq +1$ *ist.* Hier ist nämlich zufolge (5) S. 216 $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, und es findet zwar an der oberen, aber nicht an der unteren Grenze des Konvergenzintervalles noch Konvergenz statt.

Die gewonnenen Reihen könnten innerhalb der jeweiligen Konvergenzintervalle geradezu als Erklärungen der dargestellten Funktionen gelten, und es muß demnach möglich sein, die Eigenschaften der Funktionen aus ihren Potenzreihen abzuleiten. So findet z. B. der Umstand, daß $\sin x$ eine ungerade Funktion ist, darin seinen Ausdruck, daß die

zweite Reihe (1) nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthält. Weiter liefert z. B. die Differentiation der ersten Gleichung (2), die wir rechts „gliedweise“ vollziehen dürfen (S. 221):

$$\frac{d\,\mathfrak{Sin}\,x}{dx} = 1 + \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} + \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

so daß die zweite Gleichung (2) die Funktion $\mathfrak{Cof}\,x$ als Ableitung von $\mathfrak{Sin}\,x$ ergibt.

Auch die Additionstheoreme sind leicht aus unseren Formeln ableitbar. Tragen wir z. B. in die Taylorsche Reihe (3) S. 222 die Funktion $f(x) = \cos x$ ein, so entsteht die unbeschränkt konvergente Reihe:

$$\cos(x+h) = \cos x - \sin x \cdot \frac{h}{1!} - \cos x \frac{h^2}{2!} + \sin x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cos x \cdot \frac{h^4}{4!} - \cdots.$$

Da diese Reihe absolut und demnach auch unbedingt konvergent ist (S. 203), so können wir sie durch Gliederumordnung auch in die Gestalt setzen:

$$\cos(x+h) = \cos x \left(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + \cdots\right) - \sin x \left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!} + \cdots\right).$$

Da aber zufolge (1) die beiden hier in Klammern stehenden, nach Potenzen von h fortschreitenden Reihen die Summen $\cos h$ und $\sin h$ haben, so folgt das Additionstheorem:

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h.$$

Die Additionstheoreme sind auch auf Grund der Regel über Multiplikation von unendlichen Reihen (S. 207) beweisbar. Multiplizieren wir z. B. die beiden Reihen:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots$$

miteinander, so hat das Glied u_n'' der als „Produkt“ sich ergebenden Reihe nach (3) S. 207 die Gestalt:

$$u_n'' = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{y}{1!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{y^k}{k!} + \cdots + \frac{y^n}{n!}.$$

Nun ist aber zufolge der ersten Gleichung (5) S. 137:

$$\frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{k},$$

wo rechter Hand im zweiten Faktor der k^{te} Binomialkoeffizient der n^{ten} Potenz steht. Es folgt also mit Benutzung des binomischen Lehrsatzes (6) S. 138:

$$u_n'' = \frac{1}{n!}\left(x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \cdots + y^n\right) = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Nun ist nach S. 207 die Summe der als „Produkt" sich ergebenden unendlichen Reihe $e^x \cdot e^y$:

$$e^x \cdot e^y = 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots.$$

Die rechts stehende Reihe aber ergibt sich aus der ersten Reihe (1), indem wir $(x+y)$ an Stelle von x eintragen. Die Summe der letzten Reihe ist also e^{x+y}, womit das Additionstheorem der Exponentialfunktion $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ wiedergewonnen ist.

Aufgaben: 1) Man zeige die Differentiationsregeln der Funktionen e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ auf Grund der Potenzreihen.

2) Man beweise die Additionstheoreme der hyperbolischen Funktionen:

$$\mathfrak{Cof}(x+h) = \mathfrak{Cof}\, x\, \mathfrak{Cof}\, h + \mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Sin}\, h, \qquad \mathfrak{Sin}(x+h) = \mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Cof}\, h + \mathfrak{Cof}\, x\, \mathfrak{Sin}\, h,$$

indem man $\mathfrak{Cof}(x+h)$ und $\mathfrak{Sin}(x+h)$ auf Grund der Taylorschen Reihe nach Potenzen von h entwickelt.

3) Man zeige die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

mittelst der Multiplikation der Potenzreihen von $\sin x$ und $\cos y$ usw.

4) Man beweise die für jede positive Basis b und jedes endliche x gültige Reihenentwicklung:

$$b^x = 1 + \frac{x \cdot \ln b}{1!} + \frac{(x \cdot \ln b)^2}{2!} + \frac{(x \cdot \ln b)^3}{3!} + \cdots.$$

10. Die Binomialreihe mit numerischen Anwendungen. Nach S. 86 ist die mit einer beliebigen endlichen Konstanten m gebildete Funktion:

$$(1) \qquad f(x) = (1+x)^m$$

in jedem endlichen Intervalle $-1 < a \leqq x \leqq b$ eindeutig und stetig; auch hat sie daselbst für jede Ordnung k eine eindeutige und stetige Ableitung:

$$(2) \qquad f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}.$$

Den Quotienten der beiden Produkte $m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)$ und $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ wollen wir auch dann, wenn m nicht eine positive ganze Zahl ist, durch das Symbol:

$$(3) \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$$

bezeichnen. Für die positiven ganzen Zahlen m kommen wir auf die „*Binomialkoeffizienten der* m^{ten} *Potenz*" zurück; hier verschwinden die Ausdrücke (3) für alle $k > m$. Ist indessen m eine negative ganze Zahl oder keine ganze Zahl[1]), so haben wir in (3) für $k = 1, 2, 3, \ldots$ eine unbegrenzte Reihe von 0 verschiedener Zahlen.

1) Der Fall $m = 0$, in dem $f(x)$ konstant gleich 1 ist, sei ausgeschlossen.

Mit Hilfe des Symbols (3) schreibt sich nun die Mac Laurinsche Formel (11) S. 168 der Funktion (1) so:

$$(4)\qquad (1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{n-1}x^{n-1} + R_n.$$

Für das Restglied aber finden wir aus (12) S. 168 die beiden Gestalten:

$$(5)\quad R_n(x) = \binom{m}{n}x^n(1+\vartheta x)^{m-n},\quad R_n(x) = n\binom{m}{n}x^n(1-\vartheta')^{n-1}(1+\vartheta' x)^{m-n}.$$

Hier ist zunächst deutlich, *daß wir bei einer positiven ganzen Zahl m für $n = m$ einfach den binomischen Lehrsatz* (6) S. 138 *wiedergewinnen.* In den übrigen Fällen erhält man demnach eine Verallgemeinerung dieses Satzes und bezeichnet deshalb die sich ergebende unendliche Reihe als „*Binomialreihe*“.

Um die Konvergenzfrage zu entscheiden, wählen wir erstlich ein x des Intervalles $0 < x < 1$ und verstehen unter q eine bestimmte, dem Intervalle $x < q < 1$ entnommene Zahl. Die rechte Seite der ersten Formel (5) können wir so zerlegen:

$$R_n(x) = \left[\frac{mx}{1}\cdot\frac{(m-1)x}{2}\cdot\frac{(m-2)x}{3}\cdots\frac{(m-n+1)x}{n}\right]\cdot\left(\frac{1}{1+\vartheta x}\right)^{n-m}.$$

Für den einzelnen Faktor des in die große Klammer eingeschlossenen Produktes gilt:

$$\lim_{k=\infty}\left|\frac{(m-k+1)x}{k}\right| = \lim_{k=\infty}\left|\left(1-\frac{m+1}{k}\right)x\right| = |x| < q.$$

Es läßt sich demnach eine bestimmte positive ganze Zahl l derart angeben, daß für alle Zahlen $k > l$ die Ungleichung:

$$\left|\frac{(m-k+1)x}{k}\right| < q$$

zutrifft. Für alle $n > l$ haben wir dann, wie man leicht ausrechnet:

$$|R_n(x)| < \left|\binom{m}{l}\right|\cdot\left(\frac{x}{q}\right)^l\cdot\left(\frac{1}{1+\vartheta x}\right)^{n-m}\cdot q^n.$$

Der erste Faktor rechter Hand ist eine von n unabhängige, bestimmte endliche Zahl, der zweite Faktor ist positiv und kleiner als 1, der dritte gleichfalls positiv und kleiner als 1 (sobald $n > m$ gilt). Endlich gilt für den vierten Faktor $\lim\limits_{n=\infty} q^n = 0$, so daß $\lim\limits_{n=\infty} R_n(x) = 0$ für das gewählte x bewiesen ist.

Ist zweitens $-1 < x < 0$, so wenden wir die zweite Formel (5) an und zerlegen die rechte Seite so:

$$R_n(x) = \left[\frac{(m-1)x}{1}\cdot\frac{(m-2)x}{2}\cdots\frac{(m-n+1)x}{n-1}\right]mx(1-\vartheta'|x|)^{m-1}\left(\frac{1-\vartheta'}{1-\vartheta'|x|}\right)^{n-1}.$$

Auf das in der großen Klammer stehende Produkt ist die eben durchgeführte Betrachtung wieder anwendbar, aus der hervorgeht, daß der Grenzwert dieses Produktes für $\lim n = \infty$ gleich 0 ist. Die übrigen Faktoren bieten keine Schwierigkeit; man hat nur beim letzten Faktor zu berücksichtigen, daß $\vartheta' |x| < \vartheta'$ und also $0 < 1 - \vartheta' < 1 - \vartheta' |x|$ ist. Es gilt also auch für ein dem Intervalle $-1 < x < 0$ entnommenes x stets $\lim\limits_{n=\infty} R_n(x) = 0$.

Ist $|x| > 1$, so folgt auf Grund des bei (5) S. 210 aufgestellten Kriteriums aus:

$$\lim_{k=\infty} \left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| = \lim_{k=\infty} \left|\frac{m-k+1}{k} x\right| = \lim_{k=\infty} \left|1 - \frac{m+1}{k}\right| \cdot |x| = |x| > 1$$

die Divergenz der Binomialreihe.

Bei Zusammenfassung der Ergebnisse erhalten wir somit den folgenden Satz: *Die Binomialreihe:*

$$(6) \qquad 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \cdots$$

stellt für eine nicht-negative ganze Zahl m ein $(m+1)$-gliedriges Aggregat dar, das für jeden endlichen Wert x gleich $(1+x)^m$ ist und den binomischen Lehrsatz ergibt; in allen übrigen Fällen m ist die Reihe (6) *eine unendliche, hat die Konvergenzgrenzen $+1$ und -1 und besitzt jedenfalls im Innern des Konvergenzintervalles die Summe $(1+x)^m$.* Über die Konvergenzgrenzen aber möge folgender Satz ohne Beweis angegeben werden: An der oberen Konvergenzgrenze $+1$ konvergiert die Binomialreihe stets und nur dann, wenn $m > -1$ ist, an der unteren Grenze -1 stets und nur dann, wenn $m > 0$ ist[1]).

---

1) Der Beweis ist leicht durch Abschätzung der Restglieder zu führen, wenn man folgenden, auch für sich bemerkenswerten Satz kennt: Mit irgend zwei verschiedenen Zahlen a und b, die man als positiv annehmen darf, bilde man die monotone Zahlenreihe:

$$c_0 = \frac{a}{b}, \quad c_1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+1}{b+1}, \quad c_2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+1}{b+1} \cdot \frac{a+2}{b+2}, \ldots;$$

dann ist $\lim\limits_{n=\infty} c_n = \infty$ für $a > b$ und $\lim\limits_{n=\infty} c_n = 0$ für $a < b$. Der zweite Teil dieser Behauptung ist eine Folge des ersten Teiles. Ist aber $a > b$, so gilt für jede ganze Zahl $k > a$:

$$\ln\left(\frac{a+k}{b+k}\right) > \frac{a-b}{k} - \frac{a^2}{2k^2},$$

wie man leicht mit Hilfe der „Logarithmusreihe" (3) S 223 zeigt. Die Gleichung $\lim\limits_{n=\infty} (\ln c_n) = +\infty$ ist dann eine einfache Folge der Divergenz der Reihe (6) S. 210 für $s = 1$ und ihrer Konvergenz für $s = 2$.

Für $m = -1$ geht die Binomialreihe in die geometrische Reihe:

(7) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

des Quotienten $-x$ über. Neben ihr merken wir zu baldigem Gebrauche noch das Beispiel $m = -\frac{1}{2}$ an:

(8) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}x^4 - \cdots.$$

Ist m gleich einem Stammbruche $\frac{1}{\nu}$, so gewinnt man aus (4) als Entwicklung der ν^{ten} Wurzel aus $(1+x)$:

(9) $$\sqrt[\nu]{1+x} = 1 + \frac{1}{\nu}x - \frac{1}{\nu}\cdot\frac{\nu-1}{2\nu}x^2 + \frac{1}{\nu}\cdot\frac{\nu-1}{2\nu}\cdot\frac{2\nu-1}{3\nu}x^3 - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n\frac{1}{\nu}\cdot\frac{\nu-1}{2\nu}\cdot\frac{2\nu-1}{3\nu}\cdots\frac{(n-2)\nu-1}{(n-1)\nu}x^{n-1} + R_n.$$

Für das Restglied haben wir dabei die zwei Gestalten:

(10) $$\begin{cases} R_n(x) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\frac{\nu-1}{2\nu}\cdot\frac{2\nu-1}{3\nu}\cdots\frac{(n-1)\nu-1}{n\nu}\cdot\frac{x^n}{(1+\vartheta x)^{n-\frac{1}{\nu}}}, \\ R_n(x) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\frac{\nu-1}{\nu}\cdot\frac{2\nu-1}{2\nu}\cdots\frac{(n-1)\nu-1}{(n-1)\nu}\cdot\frac{x^n}{(1+\vartheta' x)^{1-\frac{1}{\nu}}}\cdot\left(\frac{1-\vartheta'}{1+\vartheta' x}\right)^{n-1}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann man Näherungsrechnungen für die Wurzeln aus ganzen Zahlen ausführen. Soll z. B. die ν^{te} Wurzel aus einer positiven ganzen Zahl a berechnet werden, die nicht gerade selbst die ν^{te} Potenz einer ganzen Zahl ist, so suche man die nächst größere Zahl b, welche die ν^{te} Potenz einer ganzen Zahl ist. Schreibt man $b - a = c$, so ist:

$$\sqrt[\nu]{a} = \sqrt[\nu]{b-c} = \sqrt[\nu]{b}\cdot\sqrt[\nu]{1-\frac{c}{b}},$$

und hier kann der zweite Faktor nach der Formel (9) entwickelt werden, indem $-\frac{c}{b}$ für x eingesetzt wird. Da dieser Wert zwischen -1 und 0 liegt, so gilt für ihn $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$, so daß wir die Gleichung (9) für Näherungsrechnungen gebrauchen können.

Nach dieser Regel findet man z. B. für $\sqrt{11}$:

$$\sqrt{11} = 4\sqrt{1-\frac{5}{16}} = 4 - \frac{5}{8} - \frac{25}{512} - \frac{125}{16384} - \cdots.$$

Doch konvergiert diese Reihe nur erst langsam, d. h. $|R_n|$ nähert sich bei wachsendem n nur langsam dem Werte 0, so daß man zur Erzielung eines nicht zu ungenauen Näherungswertes ziemlich viele Glieder der Reihe berechnen muß. In solchen Fällen versuche man der Rechnung eine andere Wendung zu geben. Z. B. kann man $\sqrt{11}$ auch so entwickeln:

$$\sqrt{11} = 3\sqrt{1+\frac{2}{9}} = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{54} + \frac{1}{486} - \frac{5}{17496} + \frac{7}{157464} - \cdots,$$

wobei eine bessere Konvergenz erzielt wird. Noch günstiger gestaltet sich folgender Ansatz:

$$\sqrt{11} = \frac{10}{3}\sqrt{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{3}\left(10 - \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} - \frac{1}{1600000} - \cdots\right).$$

Kürzt man auf die vier in der Klammer angeschriebenen Glieder, so zeigt die Abschätzung von R_4 unter Zugrundelegung der zweiten Gestalt (10), daß der Näherungswert zwar $> \sqrt{11}$ ist, daß indessen der Fehler geringer als eine Einheit der achten Dezimalstelle ist. Man findet als Näherungswert:

$$\sqrt{11} = 3{,}316624792;$$

dieser ist um weniger als zwei Einheiten der neunten Stelle zu groß.

11. Reihenentwicklungen der Funktionen arc tg$x$, arc sin$x$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x$. Bei manchen Funktionen $f(x)$ ist es leichter, die Potenzreihe (Mac Laurinsche Reihe) für die erste Ableitung:

(1) $$f'(x) = a_0' + a_1'x + a_2'x^2 + a_3'x^3 + \cdots$$

aufzustellen und ihre Konvergenz zu untersuchen, als diese Aufgabe für die Funktion $f(x)$ unmittelbar durchzuführen. Die Reihe (1) ist offenbar die „abgeleitete Reihe“ der folgenden Potenzreihe:

(2) $$a_0'x + \frac{a_1'}{2}x^2 + \frac{a_2'}{3}x^3 + \frac{a_3'}{4}x^4 + \cdots.$$

Sind $\pm g$ die Konvergenzgrenzen von (1), die wir natürlich als von 0 verschieden voraussetzen, so folgt aus den Entwicklungen von S. 218 ff. sofort, daß auch die Reihe (2) diese Konvergenzgrenzen $\pm g$ hat. Im Intervalle $-g < x < +g$ ist somit die Summe $f_1(x)$ der Reihe (2) eine eindeutige und stetige Funktion, welche daselbst die eindeutige und stetige Ableitung $f'(x)$ hat. Hieraus folgt, daß im Intervalle $-g < x < +g$ auch die Differenz:

$$F(x) = f(x) - f_1(x)$$

eine eindeutige, stetige und differenzierbare Funktion ist, die durch die Eigenschaft ausgezeichnet ist, daß ihre Ableitung $F'(x)$ im ganzen Intervalle konstant gleich 0 ist. Nach einem S. 130 bewiesenen Satze ist also

die Funktion $F(x)$ daselbst überall konstant; und da sie für $x = 0$ den Wert $f(0)$ hat, so hat sie diesen Wert im ganzen Intervalle:

$$F(x) = f(x) - f_1(x) = f(0), \qquad -g < x < +g.$$

Berechnen wir uns hieraus $f(x)$ und tragen für $f_1(x)$ die Potenzreihe (2) ein, *so folgt:*

(3) $$f(x) = f(0) + a_0'x + \frac{a_1'}{2}x^2 + \frac{a_2'}{3}x^3 + \frac{a_3'}{4}x^4 + \cdots$$

als die gesuchte Potenzreihe für $f(x)$, welche wieder $\pm g$ zu Konvergenzgrenzen hat.

Setzt man in (7) S. 228 statt x den Wert $\pm x^2$ ein, so folgt:

$$\frac{1}{1 \pm x^2} = 1 \mp x^2 + x^4 \mp x^6 + x^8 \mp x^{10} + \cdots$$

mit den Konvergenzgrenzen $+1$ und -1. Nach (9) und (10) S. 118 haben wir links die Ableitungen von arc tg x und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x$. Für beide Funktionen gilt $f(0) = 0$, vorausgesetzt, daß unter arc tg x der „Hauptwert" dieser Funktion verstanden wird (s. S. 60). Es folgt: *Die im Intervalle* $-1 < x < +1$ *konvergenten Potenzreihen der Funktionen* arc tg x *und* $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x$ *sind:*

(4) $$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

(5) $$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots [1].$$

An den Konvergenzgrenzen ± 1 konvergiert die erste Reihe, während die zweite divergiert. Letzteres folgt mit Rücksicht auf die Entwicklungen von S. 205 aus der bedingten Konvergenz der Reihe (4) S. 203. Bei der Reihe:

(6) $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

ergibt sich aus:

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1}\right),$$

$$S_{2n+1} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1}\right),$$

daß die Summen $S_2, S_4, S_6, \ldots$ eine monotone Reihe wachsender, die $S_1, S_3, S_5, \ldots$ eine ebensolche Reihe abnehmender Zahlen bilden. Überdies gilt für jedes n die Ungleichung $S_{2n} < S_{2n+1}$, so daß jedes S_n mit

---

1) Diese Darstellung der Funktion $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x$ ist auf Grund der dritten Gleichung (2) S. 71 auch aus der „Logarithmusreihe" (3) S. 223 herstellbar.

geradem Index kleiner als jedes mit ungeradem Index ist. Also existieren Grenzen jener beiden monotonen Reihen, und es gilt:

$$\lim_{n=\infty} S_{2n} \leqq \lim_{n=\infty} S_{2n+1}.$$

Hier kann aber, wie aus:

$$\lim_{n=\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{4n+1}\right) = 0$$

folgt, das Ungleichheitszeichen nicht gelten, so daß die Reihe (6) eine zwischen $S_1 = 1$ und $S_2 = \frac{2}{3}$ gelegene Summe $S = \lim_{x=\infty} S_n$ besitzt[1]).

Setzen wir $\mp x^2$ statt x in (8) S. 228 ein, so folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 \mp x^2}} = 1 \pm \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} x^4 \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} x^6 + \cdots$$

mit den Konvergenzgrenzen ± 1. Hier haben wir nach (7) und (9) S. 111 die Ableitungen der Funktionen $\arcsin x$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x$ vor uns. Verstehen wir unter $\arcsin x$ den „Hauptwert" dieser Funktion, so gilt für beide Funktionen wieder $f(0) = 0$. Es ergibt sich: *Die im Intervall* $-1 < x < +1$ *konvergenten Potenzreihen der Funktionen* $\arcsin x$ *und* $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x$ *sind:*

$$(7) \qquad \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

$$(8) \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Beide Reihen sind auch noch an den Konvergenzgrenzen ± 1 *selbst konvergent*[2]).

Da die Reihe (4) für $x = 1$ konvergiert, so gilt nach dem Schlußsatze von § 6, S. 217, mit Rücksicht auf den „Hauptwert" $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$:

$$(9) \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots.$$

Diese Reihe ist jedoch für die Berechnung der Zahl π nicht geeignet, weil sie sehr langsam konvergiert. Indessen lassen sich aus der Reihe (4)

---

1) Dieselbe Überlegung dient zum Beweise der Konvergenz jeder „alternierenden Reihe" (s. S. 200), bei welcher die beiden Bedingungen $|u_n| > |u_{n+1}|$ und $\lim_{n=\infty} u_n = 0$ erfüllt sind.

2) Für die zweite Reihe folgt dies aus der Bemerkung der letzten Note. Die Konvergenz der ersten Reihe für $x = 1$ ergibt sich aus einem Satze von Gauß über die Konvergenz der hypergeometrischen Reihe an ihren Konvergenzgrenzen.

besser konvergierende Reihen zur Berechnung der Zahl π herstellen. Setzt man z. B.

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} = y_1, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = y_2 \quad \text{und also} \quad \operatorname{tg} y_1 = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} y_2 = \frac{1}{3},$$

so lehrt das Additionstheorem:

$$\operatorname{tg}(y_1 + y_2) = \frac{\operatorname{tg} y_1 + \operatorname{tg} y_2}{1 - \operatorname{tg} y_1 \cdot \operatorname{tg} y_2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1,$$

und demnach gilt umgekehrt:

$$y_1 + y_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Setzt man also die Reihe (4) für die beiden Werte $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{3}$ an, so folgt durch Addition beider Gleichungen:

$$(10) \qquad \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert weit besser als die Reihe (9). Da die Reihe (10) alternierend ist und wieder $|u_{n+1}| < |u_n|$ gilt, so ist für jedes n die Ungleichung $|\pi - 4S_n| < 4|u_n|$ richtig. Ist also $u_{n-1} < 0$, so ist der Näherungswert $4S_n$ von π zwar zu klein, aber der Fehler ist $< 4|u_n|$; eine entsprechende Aussage gilt für $u_{n-1} > 0$. Setzt man z. B. $n = 8$, so gilt:

$$0 < \pi - 4S_8 < \frac{4}{17}\left(\frac{1}{2^{17}} + \frac{1}{3^{17}}\right) < 0{,}000002;$$

man erhält also in $4S_8$ einen Näherungswert für π, der um weniger als zwei Einheiten der sechsten Dezimalstelle zu klein ist.

Kapitel III. **Berechnung der Extremwerte der Funktionen.**

1. Die Extremwerte der Funktionen $f(x)$ einer Variablen. In irgend einem endlichen Intervalle sei eine eindeutige und stetige Funktion gegeben. Man sagt, *im Punkte a des Intervalles liege ein Maximum (Minimum) $f(a)$ der Funktion vor, falls sich mit einer positiven Zahl δ eine „Umgebung" $a - \delta < x < a + \delta$ der Stelle x derart eingrenzen läßt, daß „alle" in dieser Umgebung eintretenden Funktionswerte $f(x)$, von $f(a)$ selbst abgesehen, kleiner (größer) als $f(a)$ sind.* Als zusammenfassende Benennung für ein Maximum und für ein Minimum der Funktion gebrauchen wir die eines *„Extremwertes"* $f(a)$ der Funktion. Man beachte, daß hierbei der Funktionswert $f(a)$ nur mit den in der Umgebung $a - \delta < x < a + \delta$ vorliegenden Werten $f(x)$ verglichen wird, während die außerhalb dieses Intervalles etwa eintretenden Werte $f(x)$ nicht in Betracht kommen. Ge-

braucht man bei einer von 0 verschiedenen Zahl A das Symbol sgn (A) („Vorzeichen" oder „Signum" von A) im Sinne:

$$\frac{A}{|A|} = \operatorname{sgn}(A),$$

d. h. setzt man $\operatorname{sgn}(A) = +1$ oder $= -1$, je nachdem $A > 0$ oder $A < 0$ ist, so läßt sich die gegebene Erklärung kurz in folgende Gestalt kleiden: *Der Funktionswert $f(a)$ ist ein Maximum (Minimum) von $f(x)$, falls für alle x in der Umgebung $a - \delta < x < a + \delta$, ausgenommen $x = a$ selbst,* sgn $(f(x) - f(a))$ *gleich* -1 (*gleich* $+1$) *ist.*

Sind die Ableitungen von $f(x)$, soweit sie weiterhin zur Benutzung kommen, in dem zugrunde liegenden Intervalle gleichfalls eindeutig und stetig, so läßt sich sgn $(f(x) - f(a))$ leicht mittelst des Taylorschen Lehrsatzes bestimmen. Um hierbei sogleich zu einer allgemeinen Regel zu gelangen, nehmen wir an, *daß $f^{(n)}(x)$ die niederste unter den Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots$ ist, welche für $x = a$ nicht verschwindet;* ist bereits $f'(a) \neq 0$, so ist eben $n = 1$. Zufolge des Taylorschen Satzes gilt dann:

$$(1) \quad f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!}\left\{f^{(n)}(a) + \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a)) \cdot (x-a)\right\} \cdot$$

Da nun $f^{(n+1)}(x)$ in dem zugrunde liegenden Intervalle stetig sein sollte, so läßt sich nach einem S. 20 aufgestellten Satze eine positive endliche Zahl h angeben, die größer ist als die Beträge $|f^{(n+1)}(x)|$ aller im Intervalle vorkommenden Funktionswerte $f^{(n+1)}(x)$, also auch

$$> |f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))|.$$

Wählen wir eine Zahl δ entsprechend der Bedingung:

$$(2) \qquad 0 < \delta < \frac{n+1}{h} \cdot |f^{(n)}(a)|$$

und übrigens so klein, daß die durch $a - \delta < x < a + \delta$ festgelegte Umgebung von a gänzlich in dem Intervalle gelegen ist, in dem $f(x)$ erklärt ist, so folgt aus:

$$|f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))| < h, \qquad |x - a| < \delta$$

für jedes x der fraglichen Umgebung:

$$\left|\frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))(x-a)\right| < |f^{(n)}(a)|,$$

so daß für alle diese x der Ausdruck in der großen Klammer auf der rechten Seite der Gleichung (1) von 0 verschieden und mit $f^{(n)}(a)$ von gleichem Vorzeichen ist. Somit gilt für $a - \delta < x < a + \delta$:

$$(3) \qquad \operatorname{sgn}(f(x) - f(a)) = \operatorname{sgn}(f^{(n)}(a)) \cdot \operatorname{sgn}((x-a)^n),$$

abgesehen natürlich wieder von $x = a$ selbst. Ist n gerade, so können wir die Gleichung (3) ersetzen durch:

$$\text{sgn}\,(f(x) - f(a)) = \text{sgn}\,(f^{(n)}(a)); \tag{4}$$

für ein ungerades n aber ziehen wir die Folgerung:

$$\begin{cases} \text{sgn}\,(f(x) - f(a)) = +\,\text{sgn}\,(f^{(n)}(a)), & a < x < a + \delta, \\ \text{sgn}\,(f(x) - f(a)) = -\,\text{sgn}\,(f^{(n)}(a)), & a - \delta < x < a, \end{cases} \tag{5}$$

und zwar bleiben diese Gleichungen auch dann bestehen, wenn wir δ noch weiter verkleinern.

Hiernach ist es, wenn n ungerade ist, unmöglich, eine Umgebung von a anzugeben, in der sgn $(f(x) - f(a))$ für $x \neq a$ beständig $= +1$ oder beständig $= -1$ wäre. Dagegen ist bei geradem n in der nachgewiesenen Umgebung sgn $(f(x) - f(a))$ für $x \neq a$ entweder nur $= +1$ oder nur $= -1$, nämlich gleich sgn $(f^{(n)}(a))$. Hieraus ergibt sich folgender grundlegende Satz: *Unter der Voraussetzung der Eindeutigkeit und Stetigkeit der zu benutzenden Ableitungen von $f(x)$ in der Umgebung von a gilt für das Auftreten eines Extremwertes $f(a)$ an der Stelle a die Bedingung: Der Funktionswert $f(a)$ ist stets und nur dann ein Extremwert von $f(x)$, wenn die niederste im Punkte a nicht verschwindende Ableitung von $f(x)$ eine „gerade" Ordnung n hat; und zwar ist der Extremwert $f(a)$ ein Maximum oder ein Minimum der Funktion $f(x)$, je nachdem $f^{(n)}(a) < 0$ oder > 0 ist.*

Da für den Eintritt eines Extremwertes $f(a)$ die eben mit n bezeichnete Ordnung eine der folgenden $2, 4, 6, \ldots$ sein muß, so ist jedenfalls $f'(a) = 0$, *so daß wir die etwa auftretenden Argumente $x = a$ mit Extremwerten $f(a)$ durch Auflösung der Gleichung $f'(x) = 0$ in Erfahrung zu bringen haben.* Für das einzelne so gewonnene a ist dann weiter nach der vorstehenden Regel zu verfahren; ist z. B. bereits $f''(a) \neq 0$, so hat man für $f''(a) < 0$ ein Maximum $f(a)$, für $f''(a) > 0$ aber ein Minimum $f(a)$.

Übrigens kommen schon bei sehr einfach gebauten stetigen Funktionen $f(x)$ Extremwerte $f(a)$ an solchen Stellen a vor, in denen die Ableitung $f'(x)$, welche existieren mag und auch im allgemeinen stetig sei, einen „*Unendlichkeitspunkt*" oder einen „*Unstetigkeitspunkt*" besitzt. In solchen Fällen, welche sich dem Ansatze der Gleichung $f'(x) = 0$ entziehen, gehe man auf die stets gültige und sofort einleuchtende Regel zurück: *Nimmt in einer Umgebung $a - \delta < x < a + \delta$ von a eine daselbst stetige Funktion $f(x)$ auf der einen Seite der Stelle a mit wachsendem x zu, während sie auf der anderen Seite mit wachsendem x abnimmt, so ist $f(a)$ ein Extremwert.* Innerhalb der Teilintervalle $a - \delta < x < a$ und $a < x < a + \delta$ möge $f'(x)$ existieren und stetig sein; nach einem S. 130 bewiesenen Satze entscheidet man dann durch Diskussion der Vorzeichen sgn $(f'(x))$ über die Zunahme oder Abnahme von $f(x)$.

Als Beispiel betrachte man erstlich die gerade Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, welche für jedes von 0 verschiedene x größer als 0 ist und also für $x = 0$ das Minimum $f(0) = 0$ hat. Die Ableitung $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ hat indessen für $x = 0$ einen „*Unendlichkeitspunkt*". Da übrigens für jedes von 0 verschiedene endliche x die Gleichung $\operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn}(x)$ zutrifft, so nimmt (was auch direkt einleuchtend ist) $f(x)$ für $x < 0$ mit wachsendem x ab und für $x > 0$ mit wachsendem x zu.

Wir führen zweitens ein Beispiel aus, bei dem an der Stelle a eines Extremwertes $f(a)$ die Ableitung $f'(x)$ einen „*Unstetigkeitspunkt*" hat. Mit Benutzung der Bezeichnung $x' = x^{-1}$ setzen wir:

$$(6) \qquad f(x) = x \cdot \mathfrak{Tg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathfrak{Tg}\, x'}{x'} = \frac{\mathfrak{Sin}\, x'}{x'} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, x'}.$$

Diese Funktion $f(x)$ ist jedenfalls für alle endlichen positiven Argumente eindeutig, stetig und selbst positiv. Da nach S. 70 $\lim\limits_{x'=+\infty} \mathfrak{Tg}\, x' = 1$ gilt, so ist $\lim\limits_{x=+0} f(x) = 0$. Da ferner $f(x)$ eine gerade Funktion ist, so gilt auch für negative Argumente $f(x) > 0$ und $\lim\limits_{x=-0} f(x) = 0$. Also ist $f(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ stetig, und da hier der Wert $f(0) = 0$ vorliegt, übrigens aber $f(x) > 0$ gilt, so ist der Wert $f(0) = 0$ ein Minimum der Funktion.

Wie verhält sich nun an dieser Stelle die Ableitung:

$$(7) \quad f'(x) = \mathfrak{Tg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x\, \mathfrak{Cos}^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \mathfrak{Tg}\, x' - \frac{x'}{\mathfrak{Cos}^2\, x'} = \frac{\mathfrak{Sin}\, x' \cdot \mathfrak{Cos}\, x' - x'}{\mathfrak{Cos}^2\, x'}$$

der Funktion $f(x)$? Für $x' > 0$ ist (s. etwa (2) S. 223) $\mathfrak{Sin}\, x' > x'$ und $\mathfrak{Cos}\, x' > 1$. Aus (7) folgt also für $x > 0$:

$$(8) \qquad 0 < f'(x) < \mathfrak{Tg}\left(\frac{1}{x}\right) < 1.$$

Für $\lim x' = +\infty$ wird zufolge (7) S. 66 die Funktion $\mathfrak{Cos}\, x'$ unendlich wie $\frac{1}{2} e^{x'}$, so daß der Quotient von x' und $\mathfrak{Cos}^2 x'$ nach S. 188 für $\lim x' = +\infty$ den Grenzwert 0 hat; somit ist:

$$(9) \qquad \lim_{x=+0} f'(x) = \lim_{x'=+\infty} \mathfrak{Tg}\, x' = +1.$$

Da $f'(x)$ eine ungerade Funktion ist, so folgt sofort weiter:

$$\lim_{x=-0} f'(x) = -1.$$

Die Ableitung $f'(x)$ hat also im Nullpunkte $x = 0$ einen „Unstetigkeitspunkt" und erfährt hier, falls man im Sinne wachsender x die Stelle 0 durchwandert, einen plötzlichen Wertzuwachs im Betrage 2. Sie geht dabei von negativen zu positiven Werten über in Übereinstimmung mit dem Umstande, daß $f(0) = 0$ ein Minimum von $f(x)$ ist.

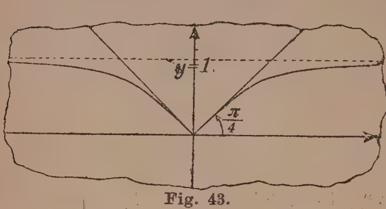


Fig. 43.

In Fig. 43 ist der Verlauf dieser Funktion $f(x)$ durch die zugehörige Kurve versinnlicht. Die Ordinate $y = f(x)$ wächst, falls x von 0 bis $+\infty$ zunimmt, selbst von 0 bis 1. Dieser Teil der Kurve hat im Nullpunkte entsprechend der Gleichung (9) eine Tangente, die mit der positiven x-Achse den Winkel $\frac{\pi}{4}$ bildet. Da übrigens die Kurve bezüglich der y-Achse sich selbst symmetrisch ist, so liegt im Nullpunkte eine „Einknickung" der Kurve vor, indem die beiden nach rechts und links ziehenden Kurventeile im Nullpunkte einen rechten Winkel miteinander bilden. In dieser Einknickung findet die Unstetigkeit der Ableitung $f'(x)$ an der Stelle des Extremwertes $f(0) = 0$ ihr geometrisches Bild.

2. Beispiele zur Bestimmung der Extremwerte von Funktionen $f(x)$. Eine rationale ganze Funktion ist mit ihren Ableitungen für alle endlichen x eindeutig und stetig, so daß zur Bestimmung ihrer Extremwerte die Regel von S. 234 zur Geltung kommt. Die Argumente x, bei denen Extremwerte einer ganzen Funktion n^{ten} Grades vorliegen, sind demnach durch Auflösung einer algebraischen Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f'(x) = 0$ zu gewinnen, so daß im Höchstfalle $(n-1)$ Extremwerte auftreten (s. S. 131). So hat z. B. die Funktion dritten Grades:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$$

zwei Extremwerte, das Maximum $f(-1) = 20$ und das Minimum $f(2) = -7$; die Wurzeln der Gleichung:

$$f'(x) = 6(x^2 - x - 2) = 0$$

sind nämlich -1 und $+2$, und für $x = -1$ wird $f''(x) = 6(2x - 1)$ negativ, für $x = 2$ aber positiv.

Bei einer rationalen Funktion $f(x)$ sind in jedem endlichen Intervalle, in dem die Funktion selbst endlich und also stetig ist, auch ihre Ableitungen stetig (s. S. 132). Alle endlichen Extremwerte einer rationalen Funktion sind somit wieder nach der Regel von S. 234 feststellbar. Bei einer linearen Funktion:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad \text{ist} \quad f'(x) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2},$$

wobei $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ vorauszusetzen ist. Hier tritt also noch kein Extremwert auf, dem Umstande entsprechend, daß die Kurve der Funktion eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Asymptoten den Koordinatenachsen parallel sind. Eine rationale Funktion zweiten Grades kann im Höchstfalle zwei Extremwerte haben. Für die Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2 + 6}{2x + 1} \qquad \text{ist} \qquad f'(x) = \frac{2(x^2 + x - 6)}{(2x + 1)^2},$$

so daß $x = 2$ und $x = -3$ die Wurzeln von $f'(x) = 0$ sind. Die zweite Ableitung schreibt man in diesem Falle zweckmäßig:

$$f''(x) = 2(2x + 1) \cdot (2x + 1)^{-2} + 2(x^2 + x - 6) \cdot \frac{d((2x + 1)^{-2})}{dx}.$$

Es ist nämlich nicht nötig, den im zweiten Gliede angedeuteten Differentialquotienten zu berechnen, da das zweite Glied wegen seines ersten Faktors sowohl für $x = 2$ als für $x = -3$ verschwindet. Das erste Glied aber liefert:

$$f''(2) = \frac{2}{5} > 0, \qquad f''(-3) = -\frac{2}{5} < 0,$$

so daß $f(2) = 2$ ein Minimum und $f(-3) = -3$ ein Maximum ist. Die Kurve der vorliegenden Funktion ist eine Hyperbel (s. Fig. 44), welche die Geraden $2x + 1 = 0$ und $2x - 4y = 1$ zu Asymptoten hat; das Maximum -3 liefert den höchsten Punkt des unteren Zweiges und das Minimum $+2$ den tiefsten Punkt des oberen.

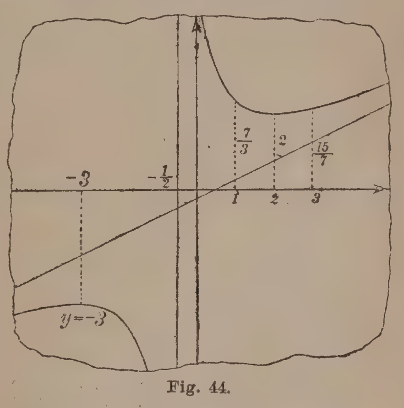


Fig. 44.

Bei irrationalen und transzendenten Funktionen braucht die Regel von S. 234, wie die Beispiele von S. 235 zeigen, nicht notwendig alle Extremwerte zu liefern. Doch kommen wir mit dieser Regel natürlich in allen den Intervallen aus, in denen die Stetigkeit der Ableitungen feststeht. Es ist z. B. die Funktion $f(x) = x \cdot \ln x$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ stetig; sie verschwindet an den beiden Endpunkten des Intervalles und ist im Innern desselben negativ, so daß sie daselbst mindestens ein Minimum haben muß. Da nun in der Umgebung jedes Innenpunktes vom genannten Intervalle die Ableitung $f'(x)$ stetig ist, so gelangen wir zu jedem Extremwerte von $f(x)$ im Intervalle durch Lösung der Gleichung $f'(x) = 1 + \ln x = 0$. Die einzige Lösung dieser Gleichung ist $x = e^{-1}$, und man stellt in der Tat leicht fest, daß $f(e^{-1}) = -e^{-1}$ ein Minimum ist. Eine einfache Folge

ist übrigens noch, daß die Funktion $e^{f(x)} = e^{x \cdot \ln x} = x^x$ an derselben Stelle ein Minimum wird.

Die Regeln zur Bestimmung der Extremwerte der Funktionen kommen in vielen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik zur Verwendung. Ein paar Fragen der Geometrie mögen zunächst als Beispiele dienen.

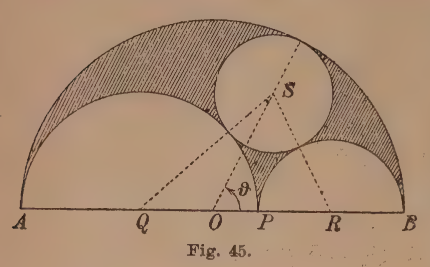


Fig. 45.

1. In Fig. 45 sind aus der Fläche des über dem Durchmesser AB errichteten Halbkreises drei Flächenstücke ausgeschnitten, nämlich zwei Halbkreise über den Teilen AP und BP von AB und ein Vollkreis, der die drei genannten Halbkreise berührt. Der Rest der Fläche ist schraffiert: Welches sind die Extremwerte des Inhaltes der schraffierten Fläche, wenn der Radius $\overline{OA}$ des großen Halbkreises fest gegeben und etwa gleich 1 ist?

Wir benutzen AB als Zahlenlinie, O als Nullpunkt und OB als positive Richtung; entspricht dem Punkte P dabei die Zahl x, so ist x im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ variabel. Für $x = +1$ verschwindet die schraffierte Fläche. Für $x = 0$ liegt sicher ein Extremwert vor, da für zwei nur im Vorzeichen verschiedene x symmetrische und also inhaltsgleiche Flächen eintreten.

Um die schraffierte Fläche als Funktion von x darzustellen, lesen wir aus Fig. 45 ab:

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}(1 + x), \qquad \overline{PR} = \frac{1}{2}(1 - x),$$

$$\overline{OR} = \overline{PR} + x = \frac{1}{2}(1 + x), \quad \overline{OQ} = \overline{PQ} - x = \frac{1}{2}(1 - x),$$

sowie, wenn mit r der Radius des Kreises um S bezeichnet wird:

$$\overline{OS} = 1 - r, \qquad \overline{QS} = \frac{1}{2}(1 + x) + r, \qquad \overline{RS} = \frac{1}{2}(1 - x) + r.$$

Wird $\sphericalangle\, ROS = \vartheta$ gesetzt, so gilt zufolge des Kosinussatzes:

$$\overline{RS}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2 - 2\,\overline{OR} \cdot \overline{OS} \cdot \cos\vartheta,$$

$$\overline{QS}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{OS}^2 + 2\,\overline{OQ} \cdot \overline{OS} \cdot \cos\vartheta,$$

woraus sich durch Elimination von $\cos\vartheta$ ergibt:

$$\overline{OQ} \cdot \overline{RS}^2 + \overline{OR} \cdot \overline{QS}^2 = (\overline{OQ} \cdot \overline{OR} + \overline{OS}^2)(\overline{OQ} + \overline{OR}),$$

$$\frac{1}{2}(1-x)\left(\frac{1}{2}(1-x)+r\right)^2 + \frac{1}{2}(1+x)\left(\frac{1}{2}(1+x)+r\right)^2 = \frac{1}{4}(1-x^2) + (1-r)^2.$$

Hieraus berechnet man:

$$r = \frac{1 - x^2}{3 + x^2},$$

so daß sich der Inhalt der schraffierten Fläche als Funktion von x in die Gestalt kleidet:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - 2\left(\frac{1 - x^2}{3 + x^2}\right)^2\right).$$

Die erste Ableitung dieser Funktion ist:

$$(2) \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}\pi\frac{x(x^6 + 9x^4 + 59x^2 - 5)}{(x^2 + 3)^3}.$$

Für $x = 0$ verschwindet $f'(x)$, und in der Umgebung dieser Stelle gilt $\operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn}(x)$. Hieraus ergibt sich, daß bei $x = 0$ die Funktion $f(x)$ zu einem Minimum $f(0) = \frac{5}{36}\pi$ wird. Die ganze Funktion 6ten Grades $(x^6 + 9x^4 + 59x^2 - 5)$ ist für $x > 0$ monoton und wächst mit wachsendem x von -5 bis $+\infty$; sie hat also nur einen einzigen positiven Wert x als Wurzel und verschwindet natürlich auch für den entgegengesetzten Wert $-x$, während die vier anderen Wurzeln der Gleichung:

$$(3) \qquad x^6 + 9x^4 + 59x^2 - 5 = 0$$

komplex sind. Da die fragliche Wurzel dicht bei 0 liegt (für $x^2 = 0{,}1$ ist die linke Seite der Gleichung (3) bereits > 0), so gewinnt man einen brauchbaren Näherungswert, falls man x^6 neben den übrigen Gliedern in (3) links vernachlässigt und also die für x^2 quadratische Gleichung $9x^4 + 59x^2 - 5 = 0$ löst. Man findet $x = 0{,}298\ldots$ und damit als Maximum des fraglichen Inhaltes angenähert $0{,}14 \cdot \pi$, einen Wert, der das bei $x = 0$ vorliegende Minimum $0{,}1388\ldots\pi$ nur wenig übertrifft.

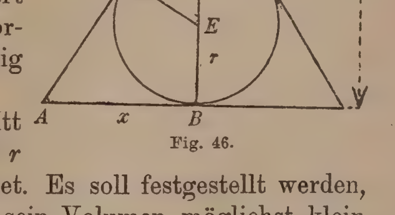
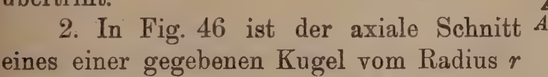


Fig. 46.



2. In Fig. 46 ist der axiale Schnitt eines einer gegebenen Kugel vom Radius r umgeschriebenen geraden Kegels gezeichnet. Es soll festgestellt werden, wie man den Kegel wählen muß, damit sein Volumen möglichst klein ausfällt.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke

$$\Delta ABC \quad \text{und} \quad \Delta EDC$$

folgt: $\quad x : y = r : \sqrt{y^2 - 2ry}, \qquad y = \dfrac{2rx^2}{x^2 - r^2},$

wenn x der Radius der Grundfläche und y die Höhe des Kegels ist. Das Kegelvolumen als Funktion $f(x)$ vom Radius x der Grundfläche ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi r \cdot \frac{x^4}{x^2 - r^2}.$$

Nach der Regel von S. 234 findet man, daß für $x = r \cdot \sqrt{2}$ das Minimum $f(r \cdot \sqrt{2}) = \frac{8}{3}\pi r^3$ eintrifft. Das Volumen dieses kleinsten Kegels ist also gerade doppelt so groß wie das Kugelvolumen. Übrigens ist die Höhe des kleinsten Kegels doppelt so groß wie der Kugeldurchmesser. Auch die Gesamtoberfläche des Kegels, welche sich aus der Mantelfläche und der Grundfläche zusammensetzt, erreicht für $x = r \cdot \sqrt{2}$ ihren kleinsten Wert $8\pi r^2$, der sich als doppelt so groß wie die Kugeloberfläche erweist.

3. Eine Horizontalebene E trenne zwei Medien von ungleicher Dichtigkeit. Ein materieller Punkt P bewege sich im oberen, dünneren Medium mit der konstanten Geschwindigkeit v_1, im unteren, dichteren mit der gleichfalls konstanten Geschwindigkeit v_2, die $< v_1$ ist. Nun soll der Punkt von einer Stelle A des oberen Mediums nach einer nicht gerade senkrecht darunter gelegenen Stelle B des unteren Mediums wandern. Es soll derjenige Weg ausfindig gemacht werden, auf welchem P in der kürzesten Zeit von A nach B gelangt.

An der Stelle C durchschreite der materielle Punkt P die Horizontalebene E. Dann wird im oberen Medium der günstigste, d. i. in kürzester Zeit zurückzulegende, Weg natürlich die Gerade AC sein, im unteren Medium die Gerade CB. Die Lote von A und B auf der Ebene E mögen E in den Punkten A' und B' treffen. Der Voraussetzung zufolge fallen diese Fußpunkte nicht zusammen, haben vielmehr eine Entfernung $\overline{A'B'} = e > 0$ voneinander. Die beiden Parallelen AA' und BB' legen eine eindeutig bestimmte Vertikalebene E' fest, welche die Punkte A und B in sich enthält. Wir behaupten, daß der Punkt C und damit die Geraden AC und CB der Ebene E' angehören. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde das Lot CC' von C auf die Ebene E', welches offenbar in der Ebene E verläuft, einen günstigeren Weg $AC'B$ für den Punkt P liefern, da die Strecken AC' und $C'B$ als Katheten zweier rechtwinkligen Dreiecke kleiner als die Hypotenusen AC und CB sind.

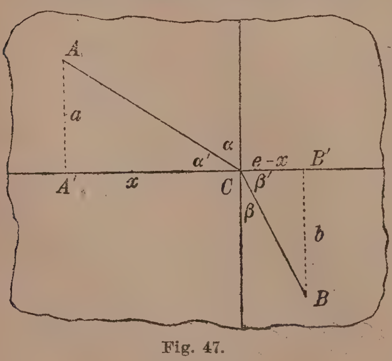


Fig. 47.

In Fig. 47 ist nun die Ebene E' mit dem günstigsten Wege ACB gezeichnet. Dieser Weg baut sich, wie wir schon

wissen, aus den beiden geraden Strecken AC und CB auf, die zusammen eine gebrochene Linie liefern. Der Punkt C, wo die „Brechung“ der Bahn stattfindet, kann weder links von A', noch rechts von B' liegen; läge nämlich C etwa links von A', so würde jede Annäherung von C an A' eine günstigere Bahn liefern. Setzen wir demnach $\overline{A'C} = x$, so ist x eine dem Intervalle $0 \leqq x \leqq e$ angehörende Unbekannte, und es gilt $\overline{B'C} = e - x$. In x stellen sich aber die beiden im oberen und unteren Medium zurückzulegenden Wege so dar:

$$\overline{AC} = \sqrt{x^2 + a^2}, \qquad \overline{CB} = \sqrt{(e-x)^2 + b^2},$$

wobei zur Abkürzung $\overline{AA'} = a$, $\overline{BB'} = b$ gesetzt ist.

Andrerseits ist, da die Geschwindigkeit im oberen Medium konstant sein sollte, der Weg $\overline{AC}$ gleich dem Produkte $v_1 \cdot t_1$ der Geschwindigkeit v_1 und der Zeit t_1, die der materielle Punkt P gebraucht, um von A nach C zu gelangen (s. S. 99 ff.). Für die Zeit t_1 folgt daraus $t_1 = v_1^{-1} \cdot \overline{AC}$. Indem man eine entsprechende Betrachtung für die Wegstrecke $\overline{CB}$ durchführt, stellt sich die Gesamtzeit, welche der Punkt P gebraucht, um von A nach B zu gelangen, als Funktion von x so dar:

$$f(x) = v_1^{-1} \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + v_2^{-1} \cdot \sqrt{(e-x)^2 + b^2}.$$

Um die Ableitung dieser Funktion:

$$f'(x) = v_1^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - v_2^{-1} \frac{e - x}{\sqrt{(e-x)^2 + b^2}}$$

bequem untersuchen zu können, denken wir im Punkte C auf der Ebene E nach beiden Seiten hin Lote errichtet (s. Fig. 47), welche mit CA und CB die Winkel α und β bilden; den Winkel α nennen wir den „Einfallswinkel“ der Bahn, den Winkel β aber den „Brechungswinkel“. Sie sind die Komplementwinkel der in der Figur mit α' und β' bezeichneten Winkel; man liest aus Fig. 47 ab:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \cos\alpha' = \sin\alpha, \qquad \frac{e - x}{\sqrt{(e-x)^2 + b^2}} = \cos\beta' = \sin\beta,$$

so daß sich die Ableitung $f'(x)$ so schreiben läßt:

$$(4) \qquad f'(x) = v_1^{-1} \cdot \sin\alpha - v_2^{-1} \cdot \sin\beta.$$

Man beweist nun leicht folgende Aussage: Beschreibt x stetig wachsend das Intervall $0 \leqq x \leqq e$, so beschreibt $f'(x)$ monoton und stetig wachsend das Intervall:

$$-v_2^{-1} \frac{e}{\sqrt{e^2 + b^2}} \leqq f'(x) \leqq + v_1^{-1} \frac{e}{\sqrt{e^2 + a^2}}.$$

Demnach liegt „ein“ Nullpunkt von $f'(x)$ im Intervalle vor, welcher das gesuchte Minimum der Zeit $f(x)$ ergibt. Setzen wir den Quotienten der beiden konstanten Geschwindigkeiten $v_1 : v_2 = \nu$, so folgt durch Nullsetzen des Ausdrucks (4) von $f'(x)$:

(5) $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \nu.$$

Die Brechung der Bahn beim Eintritt derselben in das dichtere Medium erfolgt also stets in der Art, *daß der Sinus des Einfallswinkels α und der des Brechungswinkels β ein konstantes Verhältnis ν bilden.* Es ist dies zugleich das in der Optik experimentell festgestellte Snelliussche Brechungsgesetz, nach dem ein Lichtstrahl beim Übergange aus einem optisch dünneren in ein dichteres Medium abgelenkt oder gebrochen wird; die Konstante ν heißt in der Optik „*Brechungsindex*“ und hat z. B. beim Übergange aus Luft in Wasser für die Natriumlinie des Spektrums den Näherungswert $\nu = 1{,}33$.

4. In einer gegen die Flächen eines dreiseitigen Glasprismas senkrecht verlaufenden Ebene falle ein Strahl einfarbigen Lichtes auf das Prisma und werde beim Durchgang durch dasselbe, wie Fig. 48 andeutet, abgelenkt. Es soll untersucht werden, wann die durch die beiden Brechungen an den Prismenflächen entstehende gesamte Richtungsänderung des Strahles ein Minimum wird.

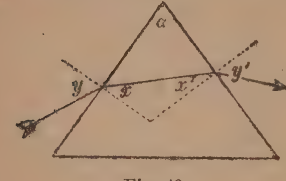


Fig. 48.

Die beiden vom Strahle durchschrittenen Prismenflächen mögen den Neigungswinkel α miteinander bilden; für die beiden Brechungen mögen die Einfalls- und Brechungswinkel, wie Fig. 48 darlegt, durch x, y, x', y' bezeichnet sein; endlich sei ν der Brechungsindex. Dann gilt, da die beiden Komplementwinkel von x und x' mit α die Winkel eines Dreiecks bilden:

(6) $$x + x' = \alpha, \qquad x' = \alpha - x.$$

Andrerseits liefert das Brechungsgesetz:

(7) $$\sin y = \nu \cdot \sin x, \qquad \sin y' = \nu \cdot \sin x'.$$

Wir nehmen an, daß die beiden Winkel y und $y' < \frac{\pi}{2}$ seien; dann gilt $0 \leqq \sin x < \nu^{-1}$ und $0 \leqq \sin x' < \nu^{-1}$, wofür wir auch schreiben können:

(8) $$0 \leqq x < \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{1}{\nu}\right), \qquad 0 \leqq x' < \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Durch Addition dieser Ungleichungen folgt mit Rücksicht auf (6), daß der Prismenwinkel α die Bedingung:

(9) $$\alpha < 2 \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

zu erfüllen hat. Ist $\alpha \geqq \arcsin\left(\frac{1}{\nu}\right)$, so folgt, wenn wir in die zweite Ungleichung (8) für x' seinen Wert $(\alpha - x)$ eintragen, $\alpha - x < \arcsin\left(\frac{1}{\nu}\right)$ und damit die weitere Beschränkung für x:

(10) $$\alpha - \arcsin\left(\frac{1}{\nu}\right) < x < \arcsin\left(\frac{1}{\nu}\right)$$ [1].

Ist hingegen $\alpha < \arcsin\left(\frac{1}{\nu}\right)$, so soll an Stelle von (8) die Ungleichung:

(11) $$0 \leqq x < \alpha$$

treten, damit $x' > 0$ gilt und also, wie Fig. 48 skizziert, beide Brechungen den Lichtstrahl im gleichen Sinne ablenken.

Die Gesamtablenkung des Lichtstrahles ist nun $y - x + y' - x' = y + y' - \alpha$ und stellt sich demnach auf Grund von (6) und (7) als Funktion $f(x)$ des Winkels x so dar:

$$f(x) = \arcsin(\nu \sin x) + \arcsin(\nu \sin(\alpha - x)) - \alpha.$$

Die zugehörige Ableitung ist:

$$f'(x) = \frac{\nu \cos x}{\sqrt{1 - (\nu \sin x)^2}} - \frac{\nu \cos(\alpha - x)}{\sqrt{1 - (\nu \sin(\alpha - x))^2}}$$

und kann auch so geschrieben werden:

(12) $$f'(x) = \sqrt{1 + \frac{\nu^2 - 1}{1 - \nu^2 \sin^2 x}} - \sqrt{1 + \frac{\nu^2 - 1}{1 - \nu^2 \sin^2(\alpha - x)}}.$$

Da $\nu > 1$ ist, so wird, falls x stetig wachsend sein Intervall (10) bzw. (11) durchläuft, die erste Wurzel in (12) gleichfalls stetig wachsen und die zweite stetig abnehmen. Für $x = \frac{1}{2}\alpha$ werden aber beide Wurzeln einander gleich. Hiermit haben wir also den einzigen Nullpunkt von $f'(x)$ gewonnen. Es ist zugleich einleuchtend, daß $f'(x)$ bei stetig wachsendem x von negativen zu positiven Werten beim Durchschreiten der Stelle $x = \frac{1}{2}\alpha$ übergeht. Das Minimum der Ablenkung erhalten wir also für $x = x'$, d. h. für den Fall, daß der Lichtstrahl im Prismeninneren senkrecht zur Halbierungslinie des Winkels α verläuft.

3. Aufgaben zur Bestimmung der Extremwerte von Funktionen $f(x)$. Von folgenden Funktionen sollen die Extremwerte bestimmt werden:

1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 48$; $f(2) = 4$ ist Minimum, $f(-3) = 129$ Maximum.

---

1) Für $x < \alpha - \arcsin\left(\frac{1}{\nu}\right)$ würde an Stelle der zweiten Brechung totale Reflexion des Lichtstrahles im Prisma eintreten.

2) $f(x) = x^2 - 18 \ln x$; $f(3) = 9 - 18 \ln 3 = -10{,}77498\ldots$ ist Minimum.

3) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $f(e) = e^{-1}$ ist Maximum.

4) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$; $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ ist Maximum.

5) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ist Maximum, $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$ Minimum. Es ist auch $f'(\pi) = 0$; jedoch ist die niederste an dieser Stelle nicht verschwindende Ableitung erst $f'''(x)$. Man wolle die Kurve der vorliegenden Funktion zeichnen und an derselben die Ergebnisse der Rechnung bestätigen. Zur Gewinnung der Kurve zeichne man zunächst die beiden Sinuskurven $y_1 = \sin x$ und $y_2 = \frac{1}{2} \sin 2x$ und addiere dann bei der einzelnen Abszisse x die beiden Ordinaten y_1 und y_2.

Hieran mögen sich folgende eingekleidete Aufgaben reihen:

6) Man zerlege die Zahl 21 so in zwei Summanden, daß das dreifache Quadrat des ersten Summanden, vermehrt um das vierfache Quadrat des zweiten ein Minimum wird. — Die Summanden sind 12 und 9.

7) Man zeige, daß unter allen Vierecken mit gegebenen Seiten a, b, c, d das „Viereck im Kreise" den größten Inhalt hat. — Schließen die Seiten a, b den Winkel x, die Seiten c, d den Winkel y ein, so folgt aus dem Kosinussatze die Relation:

$$2cd \cdot \cos y - 2ab \cdot \cos x + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = 0,$$

woraus man nach der Regel (6) S. 154 für die Differentiation einer unentwickelten Funktion:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ab \cdot \sin x}{cd \cdot \sin y}$$

erhält. Der Vierecksinhalt ist $f(x) = \frac{1}{2} ab \cdot \sin x + \frac{1}{2} cd \cdot \sin y$ und liefert:

$$2f'(x) = ab \cdot \cos x + cd \cdot \cos y \frac{dy}{dx} = ab \cdot \frac{\sin(x + y)}{\sin y},$$

woraus die Angabe über das Maximum von $f(x)$ leicht folgt.

8) Man beweise, daß von allen Dreiecken mit einem gegebenen Winkel α und vorgeschriebener Summe s der beiden einschließenden Seiten x, y das für $x = y$ eintretende gleichschenklige Dreieck den größten Inhalt hat. — Der Inhalt des Dreiecks ist als Funktion von x gegeben durch:

$$f(x) = \frac{1}{2} x (s - x) \cdot \sin \alpha.$$

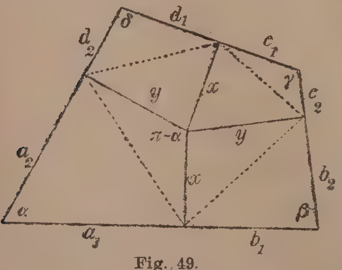


Fig. 49.

9) Man zeige, daß unter allen Vierecken mit gegebenen Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und gegebenem Umfange das „Viereck um den Kreis" den größten Inhalt hat. — Es gibt einen Punkt, der von zwei Gegenseiten des Vierecks gleiche Entfernungen x und zugleich von den beiden anderen Gegenseiten gleiche Entfernungen y hat (s. Fig. 49). Die vier Lote x, y mögen die Seiten in die Abschnitte $a_1, b_1, b_2, \ldots$ zerlegen, wie Fig. 49 andeutet. Das in der Figur links unten gelegene Teilviereck der Seiten a_1, x, y, a_2 hat zwei rechte Winkel und die Winkel α und $(\pi - \alpha)$. Die Summe der Pro-

jektionen von a_2 und y auf a_1 ergibt die Seite a_1, und ebenso liefert die Summe der Projektionen von a_1 und x auf a_2 die Seite a_2:

$$a_1 = a_2 \cos\alpha + y \sin\alpha, \qquad a_2 = a_1 \cos\alpha + x \sin\alpha.$$

Hieraus folgt durch Addition und Auflösung nach $(a_1 + a_2)$:

$$a_1 + a_2 = (x + y) \cdot \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Entsprechende Gleichungen bestehen für $b_1 + b_2$, $c_1 + c_2$, $d_1 + d_2$, wobei rechts an Stelle von α die Winkel β, γ, δ treten. Da durch Addition aller vier Gleichungen links der vorgeschriebene Umfang des Vierecks gewonnen wird, so erkennt man, daß für alle Vierecke dieses Umfangs und der gegebenen Winkel α, β, γ, δ die Summe $(x + y)$ und demnach auch alle Summen $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, $c_1 + c_2$, $d_1 + d_2$ konstante Werte haben. Einleuchtend ist, daß für $x = y$ zugleich die Gleichungen $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $d_1 = d_2$ zutreffen. Zufolge der Lösung der achten Aufgabe haben in diesem Falle die acht Teildreiecke in Fig. 49 ihren größten Inhalt, so daß auch das Viereck mit $x = y$, d. h. das „Viereck um den Kreis“ den größten Inhalt hat.

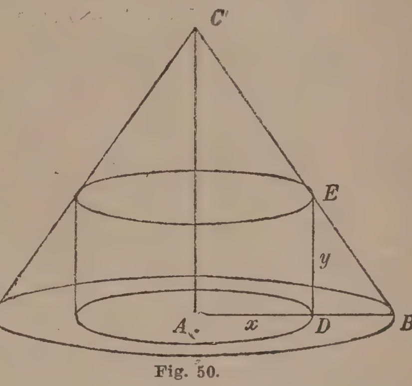


Fig. 50.

10) Welches ist der inhaltlich größte Zylinder, welcher nach Art von Fig. 50 einem gegebenen geraden Kreiskegel eingeschrieben ist? — Die Höhe des Kegels und der Radius seiner Grundfläche seien h und r; für den Zylinder seien x der Radius der Grundfläche und y die Höhe. Da $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ ist, so gilt:

$$y : (r - x) = h : r, \qquad y = \frac{h}{r}(r - x).$$

Das Zylindervolumen als Funktion von x ist:

$$f(x) = \pi x^2 y = \frac{\pi h}{r}(r x^2 - x^3).$$

Das Maximum tritt für $x = \frac{2}{3} r$, $y = \frac{1}{3} h$ ein; der Inhalt des größten Zylinders verhält sich zum Kegelinhalt wie 4 zu 9.

11) Welches ist die günstigste Gestalt einer oben und unten geschlossenen zylindrischen Büchse von ein Liter Inhalt, d. h. wann ist die Oberfläche am kleinsten, so daß zur Herstellung der Büchse möglichst wenig Material verbraucht wird? — Ist x der Radius der Grundfläche und y die Höhe (gemessen in 1^{dm} als Längeneinheit), so gilt, da der Inhalt gleich 1 sein sollte:

$$\pi x^2 y = 1, \qquad y = \frac{1}{\pi x^2}.$$

Die aus den beiden Grundflächen und der Mantelfläche zusammengesetzte Oberfläche ist als Funktion von x gegeben durch:

$$f(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x y = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}.$$

Das Minimum tritt ein für $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$, wo $y = 2x$ wird und also ein axialer Schnitt ein Quadrat darstellt.

12) Man führe die entsprechende Aufgabe für eine oben offene Büchse durch. — Das Minimum der Oberfläche tritt jetzt für $y = x$ ein.

13) Von welcher Stelle der x-Achse erscheint die Strecke $\overline{AB}$ der positiven y-Achse (s. Fig. 51) unter größtem Gesichtswinkel ϑ? — Setzt man $\overline{OA} = a$ und $\overline{OB} = b$, so ist $\operatorname{tg}\vartheta$ als Funktion von x:

$$f(x) = \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} = (a - b)\frac{x}{ab + x^2}.$$

Das Maximum von ϑ tritt für $x = \sqrt{ab}$ ein, d. h. an der Stelle P, deren Abszisse die mittlere Proportionale von a und b ist.

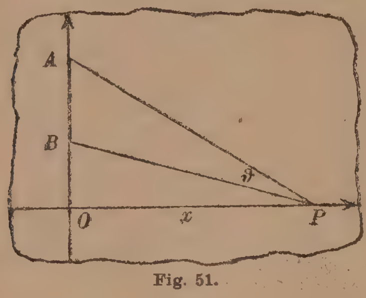


Fig. 51.

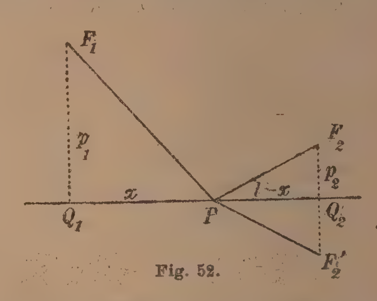


Fig. 52.

14) In einer Ebene seien eine Gerade und zwei Punkte F_1 und F_2 auf der gleichen Seite der Geraden gegeben (s. Fig. 52). Die Lote F_1Q_1 und F_2Q_2 von den Punkten auf die Gerade mögen die Längen p_1 und p_2 haben; für die Entfernung l der Lotfußpunkte gelte $l = \overline{Q_1Q_2} > 0$. Man stelle fest, für welchen Punkt P der Geraden die Summe $(\overline{F_1P} + \overline{F_2P})$ der Entfernungen des Punktes P von F_1 und F_2 am kleinsten ist. — Setzt man $\overline{PQ_1} = x$, so ist $\overline{PQ_2} = l - x$, und man bestätigt leicht:

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = f(x) = \sqrt{x^2 + p_1^2} + \sqrt{(l-x)^2 + p_2^2}.$$

Die Ableitung dieser Funktion ist:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + p_1^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{(l-x)^2 + p_2^2}},$$

wofür man auch schreiben kann (s. Fig. 52):

$$f'(x) = \cos \measuredangle F_1PQ_1 - \cos \measuredangle F_2PQ_2.$$

Das Minimum von $f(x)$ tritt somit für den Punkt P_0 der Geraden ein, bei dem $\measuredangle F_1P_0Q_1 = \measuredangle F_2P_0Q_2$ ist, bei dem also die beiden Geraden von P_0 nach F_1 und F_2 mit der gegebenen Geraden gleiche Winkel bilden.

Das Ergebnis ist auch unmittelbar geometrisch einleuchtend. Ist nämlich F_2' zu F_2 symmetrisch bezüglich der Geraden gelegen, so gilt $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2'}$, so daß wir das Minimum für den Schnittpunkt P_0 der Verbindungsgeraden F_1F_2' gewinnen. Hieran knüpft sich noch folgende weitere Betrachtung: Für den gefundenen Punkt P_0 setze man zur Abkürzung $\overline{F_1P_0} + \overline{F_2P_0} = 2a$ und schreibe andrerseits $F_1F_2 = 2e$. Alle Punkte P' der Ebene, für die $\overline{F_1P'} + \overline{F_2P'} = 2a$ ist, bilden die Ellipse mit den beiden Brennpunkten F_1, F_2, der halben großen Achse a und der Exzentrizität e. Die gegebene Gerade ist notwendig eine Tan-

gente der Ellipse; denn sie hat mit der Ellipse den Punkt P_0 gemeinsam, während alle übrigen Punkte P der Geraden zufolge $\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} > 2a$ außerhalb der Ellipse liegen. Aus $\sphericalangle F_1 P_0 Q_1 = \sphericalangle F_2 P_0 Q_2$ folgt somit der bekannte Satz, daß die Ellipsentangente des Berührungspunktes P_0 mit den zugehörigen „Brennstrahlen" $F_1 P_0$ und $F_2 P_0$ gleiche Winkel bildet.

15) Man ändere die Bedingungen der vorigen Aufgabe in der Weise ab, daß F_1 und F_2 auf verschiedenen Seiten der gegebenen Geraden liegen, bestimme den Extremwert der Differenz $(\overline{F_1 P} - \overline{F_2 P})$ und arbeite die Beziehung zur Hyperbel heraus.

16) Bei rechtwinkligen Raumkoordinaten sei eine Gerade im Raume durch das Gleichungenpaar $y = \varkappa x + \lambda$, $z = \mu x + \nu$ gegeben. Welches ist der Abstand des Nullpunktes von der Geraden? — Das Quadrat der Entfernung des Nullpunktes vom Punkte (x, y, z) der Geraden:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (\varkappa x + \lambda)^2 + (\mu x + \nu)^2$$

wird zum Minimum für: $\qquad x = -\dfrac{\varkappa\lambda + \mu\nu}{1 + \varkappa^2 + \mu^2}.$

Der gesuchte Abstand selbst ist (vgl. „A. G.", § 65):

$$\sqrt{\frac{(\varkappa\nu - \lambda\mu)^2 + \lambda^2 + \nu^2}{1 + \varkappa^2 + \mu^2}}.$$

4. Die Extremwerte der Funktionen mehrerer Variablen. Die Funktion $f(x, y)$ der beiden unabhängigen Variablen x, y sei in einem gewissen Bereiche (s. S. 89) der Zahlenebene eindeutig und stetig. Man sagt, *an der Stelle (a, b) des Bereiches liege ein Maximum (Minimum) $f(a, b)$ der Funktion $f(x, y)$ vor, falls sich etwa vermittelst der beiden Ungleichungen $a - \delta < x < a + \delta$, $b - \delta < y < b + \delta$ eine „Umgebung" der Stelle (a, b) so festlegen läßt, daß für „alle" Punkte (x, y) dieser Umgebung, abgesehen vom Punkte (a, b) selbst, die Funktionswerte $f(x, y)$ kleiner (größer) als $f(a, b)$ sind.* Wie S. 233 können wir diese Erklärung auch in die Gestalt kleiden: *Der Funktionswert $f(a, b)$ ist ein Maximum (Minimum) von $f(x, y)$, falls für „alle" Stellen (x, y) der Umgebung von (a, b), abgesehen allein von der Stelle (a, b) selbst,* sgn $(f(x, y) - f(a, b))$ *gleich* -1 *(gleich* $+1$) *ist.*

Wir nehmen an, daß $f(x, y)$ im zugrunde liegenden Bereiche partielle Ableitungen, soweit dieselben weiterhin benutzt werden, besitze, und daß diese Ableitungen daselbst gleichfalls eindeutig und stetig seien. Da offenbar die Funktion $f(x, b)$ der Variablen x an der Stelle $x = a$ einen Extremwert haben muß und ebenso die Funktion $f(a, y)$ der Variablen y an der Stelle $y = b$, so haben wir nach einem S. 234 aufgestellten Satze als notwendige Bedingung eines Extremwertes $f(a, b)$ die beiden Gleichungen:

(1) $$f_x'(a, b) = 0, \qquad f_y'(a, b) = 0.$$

Zur Berechnung des Vorzeichens sgn $(f(x, y) - f(a, b))$ bedient man sich der Taylorschen Formel (1) S. 196. Bilden wir diese Formel für $n = 3$

unter der Voraussetzung des Zutreffens der Gleichungen (1), so folgt durch Transposition des ersten Gliedes rechter Hand und Multiplikation mit 2:

$$2(f(x,y)-f(a,b)) = f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) \\ + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2 + 2R_3,$$

wobei R_3 nach der allgemeinen Vorschrift (3) S. 197 herzustellen ist. Die Koordinaten x, y mögen nach (2) S. 196 durch die Variablen s und α ersetzt werden, unter s die Länge der Strecke von (a, b) nach (x, y) verstanden und unter α den Winkel, den diese Strecke gegen die Richtung der positiven x-Achse bildet. Benutzen wir die Abkürzungen $f''_{xx}(a,b) = f''_{xx}$, $f''_{xy}(a,b) = f''_{xy}$, $f''_{yy}(a,b) = f''_{yy}$, so gilt:

$$(2)\quad 2(f(x,y)-f(a,b)) = s^2(f''_{xx}\cos^2\alpha + 2f''_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + f''_{yy}\sin^2\alpha + 2sR_3'),$$

wobei $6R_3'$ das viergliedrige Aggregat ist:

$$6R_3' = f'''_{xxx}(a+\vartheta(x-a), b+\vartheta(y-b))\cos^3\alpha \\ + 3f'''_{xxy}(a+\vartheta(x-a), b+\vartheta(y-b))\cos^2\alpha\sin\alpha + \cdots.$$

Indem wir annehmen, daß (a, b) ein Innenpunkt des zugrunde liegenden Bereiches ist, können wir um (a, b) mit einem von 0 verschiedenen Radius r einen Kreis legen, der ganz innerhalb jenes Bereiches liegt. Aus der vorausgesetzten gleichmäßigen Stetigkeit der dritten Ableitungen läßt sich dann, da mit (x, y) auch der Punkt $(a+\vartheta(x-a), b+\vartheta(y-b))$ dem Kreise angehört, der Schluß ziehen, daß für alle Punkte (x, y) der fraglichen Kreisfläche die Ungleichung $|R_3'| < h$ besteht, wo h eine bestimmte endliche positive Zahl ist[1]). Schreiben wir demnach für das allein von α abhängige und von s unabhängige Aggregat der drei ersten Glieder in (2) rechts die Abkürzung:

$$(3)\qquad f''_{xx}\cos^2\alpha + 2f''_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + f''_{yy}\sin^2\alpha = F(\alpha),$$

so wird, falls für eine fest gewählte Richtung α der Ausdruck $F(\alpha) \neq 0$ ist, das Aggregat in der Klammer der rechten Seite von (2) bei allen die Bedingungen:

$$(4)\qquad 0 < s < r, \qquad 0 < s < \frac{|F(\alpha)|}{2h}$$

erfüllenden s dasselbe Vorzeichen haben wie $F(\alpha)$:

$$\operatorname{sgn}(f(x,y)-f(a,b)) = \operatorname{sgn}(F(\alpha)).$$

Damit nun der Ausdruck $F(\alpha)$ nicht für jeden Winkel α verschwindet, machen wir die beschränkende Annahme, *daß die für die Stelle (a, b) be-*

1) Man hat, um dies zu zeigen, eine S. 19 ff. für die Zahlenlinie durchgeführte Betrachtung auf die Zahlenebene zu übertragen.

rechneten Ableitungen zweiter Ordnung $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ *nicht zugleich verschwinden.* Gilt dann erstlich $f''_{xx} = 0$, $f''_{yy} = 0$, so sind die beiden Werte $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = f''_{xy}$ und $F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -f''_{xy}$ von 0 verschieden und haben entgegengesetzte Vorzeichen, so daß in jeder noch so kleinen Umgebung von (a, b) eine Stelle (x, y) mit $\operatorname{sgn}(f(x,y) - f(a,b)) = +1$ und eine mit $\operatorname{sgn}(f(x,y) - f(a,b)) = -1$ nachweisbar ist. Es ist also in diesem Falle $f(a, b)$ sicher kein Extremwert.

Ist zweitens mindestens einer der beiden Werte f''_{xx} und f''_{yy}, etwa f''_{xx} nicht gleich 0, so folgt:

$$(5) \qquad f''_{xx} \cdot F(\alpha) = (f''_{xx} \cos\alpha + f''_{xy} \sin\alpha)^2 - (f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy}) \sin^2\alpha.$$

Ist nun $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} = 0$, so ist zwar, wenn $f''_{xx} \cos\alpha + f''_{xy} \sin\alpha \neq 0$ zutrifft:

$$\operatorname{sgn}(f(x,y) - f(a,b)) = \operatorname{sgn}(F(\alpha)) = \operatorname{sgn}(f''_{xx}).$$

Indessen ist für den aus:

$$(6) \qquad \sin\alpha_0 = \frac{f''_{xx}}{\sqrt{f''^2_{xx} + f''^2_{xy}}}, \qquad \cos\alpha_0 = -\frac{f''_{xy}}{\sqrt{f''^2_{xx} + f''^2_{xy}}}$$

zu berechnenden Winkel α_0 die Bedingung $F(\alpha) \neq 0$ nicht mehr erfüllt. In der Richtung α_0 könnten also sehr wohl noch *jeder* Umgebung der Stelle (a, b) Punkte (x, y) angehören, in denen das Vorzeichen von $f(x,y) - f(a,b)$ gleich $-\operatorname{sgn}(f''_{xx})$ ist. Unser Ansatz, der auf dem Gebrauche der Glieder *zweiten* Grades der Taylorschen Formel beruht, erweist sich in diesem Falle noch nicht als ausreichend, und wir wollen, um nicht zu weit ausholen zu müssen, *auch noch die weitere beschränkende Annahme machen, daß* $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} \neq 0$ *sei.*

Ist jetzt erstlich $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} > 0$, so trage man in (5) einmal $\alpha = 0$, sodann den aus (6) zu berechnenden Winkel α_0 ein; man gewinnt:

$$\operatorname{sgn}(F(0)) = \operatorname{sgn}(f''_{xx}), \qquad \operatorname{sgn}(F(\alpha_0)) = -\operatorname{sgn}(f''_{xx}).$$

Jetzt kann also $f(a, b)$ kein Extremwert sein. Gilt zweitens $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} < 0$, so ist der in (5) rechts stehende Ausdruck für *alle* Winkel α positiv, so daß $\operatorname{sgn}(F(\alpha)) = \operatorname{sgn}(f''_{xx})$ gilt und damit die hinreichende Bedingung eines Extremwertes erreicht ist. Aus $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} < 0$ oder $f''_{xx} \cdot f''_{yy} > f''^2_{xy}$ folgt übrigens, daß notwendig beide Werte f''_{xx} und f''_{yy} von 0 verschieden und von gleichem Vorzeichen sind; die Bedingung $f''_{xx} \neq 0$ brauchen wir also weiterhin nicht mehr besonders hervorzuheben.

Um übrigens zu wissen, in welcher Umgebung der Stelle (a, b) wir im letzten Falle einen Schluß auf das Vorzeichen $\operatorname{sgn}(f(x, y) - f(a, b))$ zu ziehen berechtigt sind, müssen wir das Minimum von $|F(\alpha)|$ kennen. Schreiben wir $F(\alpha)$ in die Gestalt um:

(7) $$F(\alpha) = \frac{1}{2}(f''_{xx} + f''_{yy}) + f''_{xy}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}(f''_{xx} - f''_{yy})\cos 2\alpha,$$

so ergeben sich die Extremwerte dieser Funktion von α einfach nach der Regel von S. 234. Durch Nullsetzen der Ableitung $F'(\alpha)$:

$$F'(\alpha) = 2f''_{xy}\cos 2\alpha - (f''_{xx} - f''_{yy})\sin 2\alpha = 0$$

finden wir für die Argumente α mit Extremwerten $F(\alpha)$[1]:

$$\cos 2\alpha = \frac{f''_{xx} - f''_{yy}}{\pm\sqrt{(f''_{xx} - f''_{yy})^2 + 4f''^2_{xy}}}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2f''_{xy}}{\pm\sqrt{(f''_{xx} - f''_{yy})^2 + 4f''^2_{xy}}}.$$

Als Minimalwert $|F(\alpha)|$ ergibt sich hieraus nach kurzer Zwischenrechnung:

(8) $$|F(\alpha)| = \frac{1}{2}|f''_{xx} + f''_{yy}| - \frac{1}{2}\sqrt{(f''_{xx} + f''_{yy})^2 + 4(f''^2_{xy} - f''_{xx}f''_{yy})}.$$

Setzen wir diesen Wert $|F(\alpha)|$ in (4) ein und unterwerfen s den beiden Bedingungen (4), so haben wir damit eine kreisförmige Umgebung der Stelle (a, b) gewonnen, in der nach der vorstehenden Überlegung

$$\operatorname{sgn}(f(x,y) - f(a,b)) = \operatorname{sgn}(f''_{xx})$$

beständig gilt.

Als Ergebnis der Untersuchung notieren wir: *Damit an einer Stelle (a, b) im Innern eines Bereiches, in dem $f(x, y)$ mit seinen zur Benutzung kommenden Ableitungen eindeutig und stetig ist, ein Extremwert $f(a, b)$ eintritt, müssen die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung für diese Stelle gleichzeitig verschwinden, so daß man, um die Extremwerte zu finden, zunächst die Gleichungen:*

(9) $$f'_x(x, y) = 0, \qquad f'_y(x, y) = 0$$

nach den „Unbekannten" x, y aufzulösen hat. Berechnet man für das einzelne Lösungssystem a, b die partiellen Ableitungen f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy} und zeigt sich, daß:

(10) $$f''^2_{xy} - f''_{xx}f''_{yy} < 0$$

ist, so ist $f(a, b)$ ein Maximum für $f''_{xx} < 0$ und ein Minimum für $f''_{xx} > 0$; ist jedoch $f''^2_{xy} - f''_{xx}f''_{yy} > 0$, so ist $f(a, b)$ kein Extremwert.

Daß bei einer Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n unabhängigen Variablen wieder unter der Voraussetzung der Existenz und Stetigkeit der Ableitungen ein Extremwert an einer „Stelle" $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nur dann eintreten kann, falls für diese Stelle die n Gleichungen:

(11) $$f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

---

1) Der besondere Fall $f''_{xy} = 0$, $f''_{xx} = f''_{yy}$, der ein konstantes $F(\alpha) = f''_{xx}$ liefert, sei zunächst ausgeschlossen, wird sich indessen dem Schlußergebnis unterordnen.

gleichzeitig gelten, ist leicht einleuchtend. *Man wird also auch hier wieder zur Auffindung der Extremwerte $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ als ersten Schritt die Auflösung der n Gleichungen* (11) *nach den n „Unbekannten“ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vollziehen.* Die Entwicklung hinreichender Bedingungen für einen Extremwert $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in allgemeiner Form würde uns indessen zu weit führen. Bei den Einzelfällen der Anwendungen kann man vielfach leicht unmittelbar entscheiden, ob für das einzelne Lösungssystem $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein Extremwert $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vorliegt oder nicht.

5. Beispiele zur Bestimmung der Extremwerte von Funktionen mehrerer Variablen. 1. Als erstes Beispiel für die Regeln von § 4 betrachten wir die ganze rationale Funktion zweiten Grades:

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

Hier gilt für die ersten Ableitungen:

$$f'_x(x, y) = 2(Ax + By + D), \qquad f'_y(x, y) = 2(Bx + Cy + E);$$

die partiellen zweiten Ableitungen aber sind konstant und liefern:

$$f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} = 4(B^2 - AC).$$

Der Ausdruck $(B^2 - AC)$ ist die Determinante des Gleichungssystems:

$$Ax + By = -D, \qquad Bx + Cy = -E,$$

dessen Lösung die *eine* hier möglicherweise vorliegende Stelle (a, b) mit einem Extremwerte $f(a, b)$ ergibt. Ist $B^2 - AC < 0$, so hat man in der Tat ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $A < 0$ oder $A > 0$ ist; für $B^2 - AC > 0$ liegt weder Maximum noch Minimum vor.

Bei einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades von x und y findet man leicht, daß die Anzahl der Extremwerte nie größer als 4 sein kann (s. die Aufgaben 3. und 4. in § 6).

2. Gegeben seien ein *spitzwinkliges* Dreieck $P_1 P_2 P_3$ und drei positive Zahlen m_1, m_2, m_3, von denen gelten soll, *daß die Summe der Quadrate zweier stets größer als das Quadrat der dritten ist.* Es soll untersucht werden, ob es im Innern des Dreiecks einen Punkt P gibt, für welchen:

$$(1) \qquad m_1 \cdot \overline{PP_1} + m_2 \cdot \overline{PP_2} + m_3 \cdot \overline{PP_3}$$

zu einem Minimum wird.

In einem rechtwinkligen Systeme seien a_k, b_k die Koordinaten von P_k und x, y diejenigen des zunächst veränderlichen Punktes P im Innern des Dreiecks. Die von P nach P_k gerichtete Strecke werde durch $\overline{PP_k} = r_k$ bezeichnet und bilde mit der positiven x-Achse den Winkel ϑ_k. Die in

Fig. 53 mit φ_k bezeichneten Winkel zwischen den drei Strecken r_k sind dann durch:

$$\varphi_1 = \vartheta_3 - \vartheta_2, \qquad \varphi_2 = \vartheta_1 - \vartheta_3, \qquad \varphi_3 = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

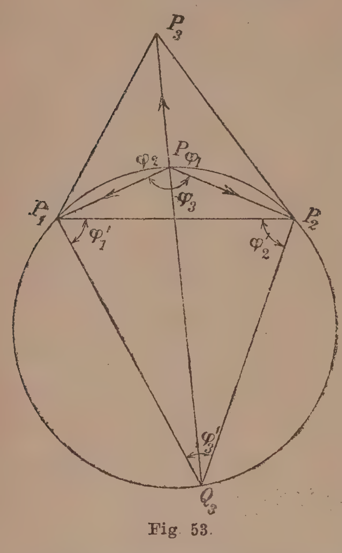


Fig. 53.

gegeben[1]). Der Ausdruck (1) schreibt sich nun als Funktion von x und y:

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{3} m_k \sqrt{(x-a_k)^2 + (y-b_k)^2},$$

woraus für die beiden partiellen ersten Ableitungen folgt:

$$(2) \quad \begin{cases} f'_x(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{3} m_k \dfrac{x-a_k}{\sqrt{(x-a_k)^2+(y-b_k)^2}}, \\[2ex] f'_y(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{3} m_k \dfrac{y-b_k}{\sqrt{(x-a_k)^2+(y-b_k)^2}}. \end{cases}$$

Die hier rechts auftretenden Quotienten sind einfach gleich $-\cos\vartheta_k$ und $-\sin\vartheta_k$, so daß die Forderung des Verschwindens der beiden Ableitungen erster Ordnung die Gleichungen liefert:

$$m_1 \cos\vartheta_1 + m_2 \cos\vartheta_2 + m_3 \cos\vartheta_3 = 0,$$
$$m_1 \sin\vartheta_1 + m_2 \sin\vartheta_2 + m_3 \sin\vartheta_3 = 0.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn die Proportion gilt:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \sin(\vartheta_3 - \vartheta_2) : \sin(\vartheta_1 - \vartheta_3) : \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

oder (bei Heranziehung der Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$):

$$(3) \qquad m_1 : m_2 : m_3 = \sin\varphi_1 : \sin\varphi_2 : \sin\varphi_3 .$$

Der dieser Bedingung entsprechende Punkt P ist leicht konstruierbar. Wir zeichnen, wie in Fig. 53 geschehen ist, mit Benutzung der Seite P_1P_2 des gegebenen Dreiecks das neue Dreieck $P_1P_2Q_3$ so, daß die Proportion besteht:

$$\overline{P_2Q_3} : \overline{Q_3P_1} : \overline{P_1P_2} = m_1 : m_2 : m_3 .$$

Die drei Winkel $\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'$ dieses Dreiecks, die zufolge der Voraus-

1) In derjenigen unter diesen drei Gleichungen, in welcher der Minuend der kleinste unter den drei Winkeln ϑ ist, hat man rechts 2π zuzufügen, was auf die weiterhin zu benutzenden Funktionen der Winkel ohne Einfluß ist. Die Maßzahlen ϑ der Winkel sind positiv zu rechnen und gehören dem Intervalle $0 \leq \vartheta < 2\pi$ an.

setzung über die Zahlen m_1, m_2, m_3 alle drei spitz sind, befriedigen die Bedingung:

$$\sin\varphi_1' : \sin\varphi_2' : \sin\varphi_3' = m_1 : m_2 : m_3 .$$

Zeichnen wir nun den Kreis um das Dreieck $P_1 P_2 Q_3$, so liegt der Eckpunkt P_3 unseres gegebenen „spitzwinkligen" Dreiecks sicher außerhalb dieses Kreises. Die Verbindungsgerade $P_3 Q_3$ schneidet somit die Peripherie und liefert im Schnittpunkte den gesuchten Punkt P; denn die in der Figur mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ bezeichneten Winkel an diesem Punkte P erweisen sich zufolge einer elementaren Betrachtung als Nebenwinkel der $\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'$, so daß sie tatsächlich die Bedingung (3) erfüllen.

Um zu prüfen, ob es sich beim Punkte P tatsächlich um ein Minimum des Ausdrucks (1) handelt, berechnet man vermöge einer kurzen Zwischenentwicklung:

$$f''_{xx}(x,y) = \sum_{k=1}^{3} \frac{m_k}{r_k} \sin^2\vartheta_k, \qquad f''_{xy}(x,y) = -\sum_{k=1}^{3} \frac{m_k}{r_k} \cos\vartheta_k \sin\vartheta_k,$$

$$f''_{yy}(x,y) = \sum_{k=1}^{3} \frac{m_k}{r_k} \cos^2\vartheta_k$$

und zeigt daraufhin leicht weiter die Ungleichung:

$$f''_{xy}(x,y)^2 - f''_{xx}(x,y) f''_{yy}(x,y) = -\frac{m_1 m_2 m_3}{r_1 r_2 r_3} \sum_{k=1}^{3} \frac{r_k}{m_k} \sin^2\varphi_k < 0.$$

Da $f''_{xx} > 0$ ist, so handelt es sich tatsächlich um ein Minimum. Denken wir in den Eckpunkten P_k des gegebenen Dreiecks drei materielle Punkte der Massen m_k, so ist $m_k \cdot r_k$ das „*Drehungsmoment*" des Punktes P_k in bezug auf P, und also stellt der Ausdruck (1) das Drehungsmoment der drei starr miteinander verbundenen Punkte P_k in bezug auf P dar. *Unsere Konstruktion hat uns also denjenigen Drehungspunkt P geliefert, in bezug auf den das Drehungsmoment des Systems der drei starr verbundenen materiellen Punkte zum Minimum wird.*

3. Auf der Peripherie einer Ellipse liege der Punkt A fest, während daselbst die Punkte P und Q beweglich seien. Es soll untersucht werden, für welche Lage der Punkte P und Q der Inhalt des Dreiecks APQ zu einem Maximum wird, und welchen Wert dieses Maximum hat.

Die Ellipse sei auf ihre Hauptachsen der Längen $2a$ und $2b$ als Koordinatenachsen bezogen; sie ist dann in bekannter Art durch ein Gleichungspaar:

(4) $$x = a\cos w, \qquad y = b\sin w$$

darstellbar, wobei der Winkel w das Intervall $0 \leq w < 2\pi$ zu durchlaufen hat. Dem Punkte A komme der feste Winkel ϑ zu, die den beiden beweg-

lichen Punkten P und Q zugehörigen Winkel mögen durch u und v bezeichnet werden. Endlich mögen die Koordinaten der drei Punkte A, P, Q durch die Bezeichnungen x_0, y_0 bzw. x_1, y_1 und x_2, y_2 unterschieden werden.

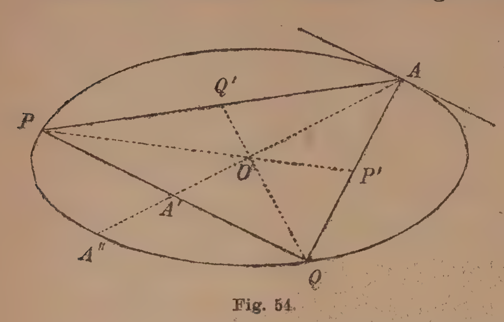


Fig. 54.

Bei richtiger Anordnung der Punkte P und Q (s. Fig. 54) wird nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie (s. „A. G.“, § 12) der doppelte Inhalt des Dreiecks APQ gegeben durch den Ausdruck:

$$(x_0 y_1 - x_1 y_0) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_0 - x_0 y_2).$$

Bei Umrechnung auf die Winkel stellt sich der doppelte Inhalt als Funktion $f(u, v)$ der beiden Variablen u und v so dar:

$$f(u,v) = ab\{\sin(u - \vartheta) + \sin(v - u) + \sin(\vartheta - v)\}. \tag{5}$$

Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen erster Ordnung folgt:

$$f'_u(u,v) = ab\{\cos(u - \vartheta) - \cos(v - u)\} = 0,$$
$$f'_v(u,v) = ab\{\cos(v - u) - \cos(\vartheta - v)\} = 0,$$

so daß wir u und v aus:

$$\cos(u - \vartheta) = \cos(v - u), \qquad \cos(\vartheta - v) = \cos(v - u)$$

zu berechnen haben. Es ergibt sich, unter m und n ganze Zahlen verstanden:

$$u - \vartheta = \pm(v - u) + 2m\pi, \qquad \vartheta - v = \pm(v - u) + 2n\pi.$$

Würde in der ersten Gleichung das untere Zeichen gelten, so würde der Punkt Q mit A zusammenfallen; für das gesuchte Maximum der Dreiecksfläche gilt also notwendig das obere Zeichen. Aus entsprechendem Grunde ist auch in der zweiten Gleichung nur das obere Zeichen brauchbar:

$$2u - v = \vartheta + 2m\pi, \qquad u - 2v = -\vartheta + 2n\pi.$$

Hieraus folgt sofort:

$$u = \vartheta + \frac{2\pi}{3}(2m - n), \qquad v = \vartheta + \frac{2\pi}{3}(m - 2n),$$

so daß u und v von ϑ um Multipla von $\frac{2\pi}{3}$ verschieden sind. Da nun u und v voneinander und von ϑ verschieden sind, so bleibt bei der gegenseitigen Lage der Punkte (s. Fig. 54) nur die eine Möglichkeit:

$$u = \vartheta + \frac{2\pi}{3}, \qquad v = \vartheta + \frac{4\pi}{3} \tag{6}$$

übrig, welche demnach das Maximum der Dreiecksfläche liefern muß. Durch Eintragung der berechneten Winkel (6) in (5) folgt: *Das gesuchte Maximum der Dreiecksfläche ist* $\frac{3}{4} ab\sqrt{3}$. Da sich dasselbe als von ϑ unabhängig erweist, so erhalten wir, wenn auch noch der Punkt A auf der Ellipsenperipherie als beweglich angesehen wird, für jede Lage des Ellipsenpunktes A ein Dreieck des berechneten größten Inhaltes und damit im ganzen einfach unendlich viele solche Dreiecke.

Aus (6) und (4) folgt für die Koordinaten der Punkte P und Q:

$$x_1 = -\frac{1}{2} a(\cos\vartheta + \sqrt{3}\sin\vartheta), \qquad y_1 = -\frac{1}{2} b(\sin\vartheta - \sqrt{3}\cos\vartheta),$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} a(\cos\vartheta - \sqrt{3}\sin\vartheta), \qquad y_2 = -\frac{1}{2} b(\sin\vartheta + \sqrt{3}\cos\vartheta),$$

woraus sich sofort weiter ergibt:

$$(7) \qquad x_0 + x_1 + x_2 = 0, \qquad y_0 + y_1 + y_2 = 0.$$

Hierin ist der Satz enthalten, *daß der Mittelpunkt O der Ellipse der Schwerpunkt unseres Dreiecks ist, sowie daß zu den Seiten des Dreiecks, betrachtet als Sehnen der Ellipse, die zugehörigen Mittellinien die konjugierten Durchmesser sind.* Man wolle nur beachten, daß z. B. der Mittelpunkt A' der Seite PQ die Koordinaten $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ hat, welche zufolge (7) bzw. mit $-\frac{x_0}{2}$, $-\frac{y_0}{2}$ gleich sind; die Mittellinie AA' läuft also durch O hindurch und wird durch diesen Punkt im Verhältnis $\overline{AO} : \overline{A'O} = 2 : 1$ geteilt. Im übrigen beziehen wir uns auf den bekannten Satz der Geometrie, daß eine Ellipsensehne durch den zugehörigen konjugierten Durchmesser halbiert wird (s. „A. G.", § 29).

6. Aufgaben zur Bestimmung der Extremwerte der Funktionen mehrerer Variablen. Folgende Funktionen sind auf etwaige Extremwerte zu untersuchen:

1. $f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1$. Der Funktionswert $f(-1, -1) = 0$ ist ein Minimum.

2. $f(x, y) = 3x^2 - 8xy + 5y^2 + 4x - 6y + 3$. Es tritt kein Extremwert auf.

3. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 12x + 3y$. Die Funktion hat das Maximum:

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}\right) = +3\sqrt{3} + 5\sqrt{5}$$

und das Minimum:

$$f\left(+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}, +\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}\right) = -3\sqrt{3} - 5\sqrt{5}.$$

4. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Man deute die Gleichungen:

$$f'_x(x, y) = 3(x^2 - y) = 0, \qquad f'_y(x, y) = 3(y^2 - x) = 0$$

geometrisch als Parabeln, sowie die Gleichung:

$$f''_{xy}(x, y)^2 - f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) = 9(1 - 4xy) = 0$$

als gleichseitige Hyperbel. Der eine Zweig der Hyperbel zieht zwischen den beiden Schnittpunkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ der Parabeln hindurch. Der Funktionswert $f(1, 1) = -1$ ist ein Minimum.

Als eingekleidete Aufgaben mögen sich hier noch anreihen:

5. Welches ist das inhaltlich kleinste einem Kreise vom Radius a umschriebene Dreieck? — Die Radien nach den drei Berührungspunkten der Seiten mögen miteinander die „konkaven" Zentriwinkel $2x$, $2y$, $2(\pi - x - y)$ bilden. Der Dreiecksinhalt ist dann:

$$f(x, y) = a^2(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y - \operatorname{tg}(x + y)),$$

woraus leicht folgt, daß das gesuchte Dreieck das gleichseitige ist.

6. Welches ist das inhaltlich größte einem Kreise vom Radius a eingeschriebene Dreieck? — Die Radien nach den Eckpunkten des Dreiecks mögen die „konkaven" Zentriwinkel x, y, $2\pi - x - y$ bilden. Der Inhalt des Dreiecks ist dann:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} a^2(\sin x + \sin y - \sin(x + y)),$$

woraus leicht wieder folgt, daß das gleichseitige Dreieck den größten Inhalt hat. Auch unmittelbar ist leicht einleuchtend, daß ein nicht-gleichseitiges Dreieck keinen maximalen Inhalt haben kann.

Stellen wir den Kreis in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ dar, so gewinnen wir durch die Transformation $x = x'$, $y = \frac{a}{b} y'$, deren Wirkung auf die Flächeninhalte durch die Entwicklungen von S. 25 festgestellt ist, aus dem Kreise eine Ellipse der Halbachsen a, b. Das Resultat der vorliegenden Aufgabe führt dabei zu den Ergebnissen von S. 255 über das größte einer Ellipse eingeschriebene Dreieck zurück, was der Leser weiter ausführen wolle. Aus der Lösung der Aufgabe 5. erkennen wir weiter, daß das inhaltlich kleinste der Ellipse umschriebene Dreieck den Inhalt $3ab\sqrt{3}$ hat, und daß wir hier zu den der Ellipse umschriebenen Dreiecken geführt werden, die den Mittelpunkt der Ellipse zum Schwerpunkte haben; auch dies wolle der Leser weiter ausführen.

7. Im Raume seien n materielle Punkte P_k der Massen m_k und der rechtwinkligen Koordinaten a_k, b_k, c_k in starrer Verbindung miteinander gegeben; P sei ein veränderlicher Punkt der Koordinaten x, y, z. Ist $\overline{PP_k} = r_k$, so versteht man unter dem „polaren Trägheitsmomente" des materiellen Punktes P_k in bezug auf den Punkt P den Ausdruck $m_k \cdot r_k^2$; das polare Trägheitsmoment des ganzen Punktsystems in bezug auf P ist $\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$. Es soll derjenige Punkt P gefunden werden, für den das polare Trägheitsmoment des Punktsystems am kleinsten ist. — Hier gilt es, das Minimum der Funktion:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n} \{ m_k((x - a_k)^2 + (y - b_k)^2 + (z - c_k)^2) \}$$

zu bestimmen. Es tritt ein für:

$$x = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \qquad y = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \qquad z = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k c_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},$$

d. h. für den Schwerpunkt des Punktsystems.

7. Extremwerte der Funktionen bei Gültigkeit von Nebenbedingungen. Hat man die Extremwerte einer Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n Variablen zu berechnen, falls zwischen den Argumenten $m\,(< n)$ Relationen:

$$(1) \quad \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

bestehen, so kann man in der Weise verfahren, daß man aus (1) etwa die letzten m Variablen als Funktionen der $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ berechnet, die zu gewinnenden Ausdrücke in $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einträgt und die dadurch entstehende Funktion als solche der „unabhängigen" Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ behandelt. Der nächste Schritt würde dann sein, daß man die $(n - m)$ partiellen Ableitungen erster Ordnung der fraglichen Funktion in bezug auf die $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ gleich 0 setzt, das so entstehende Gleichungssystem nach den $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ als „Unbekannten" auflöst und die zugehörigen Werte der letzten m Variablen berechnet.

Bis zu dieser Stelle kann man nun der Entwicklung eine andere Wendung geben, welche vielfach leichter durchführbar ist als das vorstehend beschriebene Verfahren. Das allgemeine Prinzip tritt bereits deutlich hervor, wenn wir uns auf den besonderen Fall einer Funktion $f(x, y, z, t)$ von vier Variablen beschränken, zwischen denen zwei Relationen bestehen:

$$(2) \qquad \varphi(x, y, z, t) = 0, \qquad \psi(x, y, z, t) = 0.$$

Wir verfahren zunächst wie oben, berechnen also z und t als Funktionen

$$(3) \qquad z = \Phi(x, y), \qquad t = \Psi(x, y)$$

von x und y, tragen diese Ausdrücke in $f(x, y, z, t)$ ein:

$$f(x, y, z, t) = f(x, y, \Phi(x, y), \Psi(x, y))$$

und bilden die partiellen Ableitungen dieser Funktion nach x und y. Da x nicht nur das erste Argument ist, sondern auch noch im dritten und vierten Argumente enthalten ist, so ist für die Berechnung der Ableitung in bezug auf x (und entsprechend der in bezug auf y) nach der Regel (10) S. 155 für zusammengesetzte Funktionen zu verfahren. Durch Nullsetzen der Ableitungen folgt:

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Denken wir nun die Ausdrücke (3) für z und t in (2) eingetragen, so werden die beiden Gleichungen (2) in x und y als identische Gleichungen erfüllt. Folglich werden auch die Ableitungen von φ und ψ nach x und y unter der Voraussetzung, daß z und t die Funktionen (3) sind, verschwinden:

$$(5)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0,$$

$$(6)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0.$$

Es möge nun x_0, y_0 ein Lösungssystem von (4) sein, für welches die Gleichungen (3) die zugehörigen Werte z_0, t_0 liefern. Die Eintragung der x_0, y_0 in die in den vorstehenden Gleichungen auftretenden Differentialquotienten kennzeichnen wir durch Anhängung eines unteren Index 0. Indem wir zunächst die erste Gleichung (4) und die Gleichungen (5) heranziehen, ergibt sich also:

$$(7)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_0=0,\\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_0=0,\\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_0\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_0=0. \end{cases}$$

Wir führen nunmehr zwei Zahlen λ und μ ein, welche wir aus den beiden für sie linearen Gleichungen berechnen wollen[1]):

$$(8)\qquad \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0+\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_0=-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0,\qquad \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0+\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_0=-\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0.$$

Dann ergibt sich, indem wir die Gleichungen (7) mit 1, λ, μ multiplizieren und addieren, mit Rücksicht auf (8):

$$(9)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0+\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0=0.$$

Indem man aber an die zweite Gleichung (4) und die Gleichungen (6), gebildet für die x_0, y_0, eine entsprechende Rechnung anknüpft, zeigt sich, daß für dieselben λ, μ auch noch die Gleichung gilt:

$$(10)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0+\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0=0.$$

Die Gleichungen (8), (9) und (10) haben nun eine übereinstimmende Bauart. Es zeigt sich, daß unser die Relationen (2) und die notwendigen Bedingungen (4) eines Extremwertes der Funktion befriedigendes Wertsystem x_0, y_0, z_0, t_0 den vier Gleichungen genügt:

---

1) Es wird angenommen, daß diese Gleichungen ein bestimmtes endliches Lösungssystem λ, μ besitzen.

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Hieran schließt sich nun unser neues Verfahren: Indem wir diese vier Gleichungen *mit den beiden aus* (8) *berechneten konstanten Zahlwerten* λ, μ nach den „Unbekannten" x, y, z, t lösen, muß sich jedenfalls (vielleicht neben anderen Systemen) das Lösungssystem x_0, y_0, z_0, t_0 finden. Die x_0, y_0, z_0, t_0 erscheinen hierbei als Ausdrücke in den λ, μ, und es muß die Eintragung dieser Ausdrücke in die Gleichungen (2) zwei Gleichungen für λ und μ ergeben, die eben durch die besonderen bei uns vorliegenden konstanten Zahlwerte λ, μ erfüllt sind. Wir können demnach in folgender Art vorgehen: *Mittelst zweier „unbestimmter Multiplikatoren"* λ *und* μ, *die als konstant gelten, bilden wir uns aus* $f(x, y, z, t)$ *und den auf den linken Seiten von* (2) *stehenden Funktionen* φ *und* ψ *die neue Funktion:*

$$(12) \qquad F(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) + \lambda\varphi(x, y, z, t) + \mu\psi(x, y, z, t)$$

und sehen dieselbe als Funktion der vier „unabhängigen" Variablen x, y, z, t *an. Für diese Funktionen sind dann, entsprechend der Regel von S. 250, die vier Gleichungen:*

$$(13) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

welche keine anderen als die Gleichungen (11) *sind, nach den „Unbekannten"* x, y, z, t *zu lösen. Die zu gewinnenden Ausdrücke der* x, y, z, t *in* λ *und* μ *sind in* (2) *einzutragen, die so entstehenden beiden Gleichungen nach* λ *und* μ *zu lösen und die dem einzelnen Lösungssystem zugehörigen Werte* x, y, z, t *herzustellen. Wir gewinnen so jedenfalls (vielleicht neben anderen Systemen) das obige Lösungssystem* x_0, y_0, z_0, t_0. Ob beim einzelnen berechneten Systeme x, y, z, t wirklich ein Extremwert für f vorliegt, muß durch eine besondere Untersuchung entschieden werden.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß diese Regel für eine beliebige Variablenanzahl entsprechend bestehen bleibt. Bei der am Anfang des Paragraphen genannten Funktion wird man die neue Funktion:

$$(14) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_m\varphi_m$$

herstellen und mit ihr entsprechend verfahren.

8. Beispiele von Extremwerten der Funktionen bei Gültigkeit von Nebenbedingungen. 1. Die in § 7 entwickelten Methoden mögen erstlich an der Aufgabe erläutert werden, die kürzeste Entfernung zwischen zwei im Raume gegebenen Geraden zu bestimmen (s. „A. G.“, § 66).

Der Punkt P_1 der Koordinaten x_1, y_1, z_1 liege auf der ersten Geraden, deren Gleichungen:

$$(1) \qquad y_1 - \alpha_1 x_1 - \beta_1 = 0, \qquad z_1 - \gamma_1 x_1 - \delta_1 = 0$$

seien, der Punkt P_2 der Koordinaten x_2, y_2, z_2 auf der zweiten Geraden, die durch die folgenden Gleichungen dargestellt sei:

$$(2) \qquad y_2 - \alpha_2 x_2 - \beta_2 = 0, \qquad z_2 - \gamma_2 x_2 - \delta_2 = 0.$$

Als Funktion, deren Minimum wir zu bestimmen haben, wählen wir das durch 2 geteilte Quadrat der Strecke $\overline{P_1 P_2}$:

$$f(x_1, y_1, \ldots, z_2) = \frac{1}{2}\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\}.$$

Werden die linken Seiten der Gleichungen (1) und (2) der Reihe nach $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ genannt, so ist die Funktion:

$$F(x_1, y_1, \ldots, z_2) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4$$

zu bilden und als solche der sechs unabhängigen Variablen $x_1, y_1, \ldots, z_2$ zu behandeln.

Durch Nullsetzen der Ableitungen erster Ordnung ergeben sich die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - \lambda_1\alpha_1 - \lambda_2\gamma_1 &= 0, & y_1 - y_2 + \lambda_1 &= 0, & z_1 - z_2 + \lambda_2 &= 0, \\ -x_1 + x_2 - \lambda_3\alpha_2 - \lambda_4\gamma_2 &= 0, & -y_1 + y_2 + \lambda_3 &= 0, & -z_1 + z_2 + \lambda_4 &= 0, \end{aligned}$$

durch deren Kombination man leicht feststellt:

$$\lambda_3 = -\lambda_1, \qquad \lambda_4 = -\lambda_2, \qquad \lambda_1(\alpha_2 - \alpha_1) + \lambda_2(\gamma_2 - \gamma_1) = 0.$$

Indem wir den Fall paralleler Geraden ausschalten, werden die beiden Differenzen $(\alpha_2 - \alpha_1)$ und $(\gamma_2 - \gamma_1)$ nicht gleichzeitig verschwinden. Die letzte Gleichung liefert also:

$$\lambda_1 = \mu(\gamma_1 - \gamma_2), \qquad \lambda_2 = -\mu(\alpha_1 - \alpha_2),$$

unter μ einen Proportionalitätsfaktor verstanden. Für die Differenzen $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$ gewinnt man daraufhin:

$$(3) \quad x_1 - x_2 = -\mu(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1), \quad y_1 - y_2 = -\mu(\gamma_1 - \gamma_2), \quad z_1 - z_2 = \mu(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Indem man nun die Gleichungen (1) von den Gleichungen (2) subtrahiert, ergibt sich bei Benutzung von (3):

$$\mu(\gamma_1 - \gamma_2) + \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 = \beta_2 - \beta_1, \qquad -\mu(\alpha_1 - \alpha_2) + \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2 = \delta_2 - \delta_1$$

und durch Multiplikation dieser Gleichungen mit $(\gamma_1 - \gamma_2)$, $(\alpha_2 - \alpha_1)$ und Addition:

$$\mu(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \mu(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)(x_2 - x_1)$$
$$= (\alpha_1 - \alpha_2)(\delta_1 - \delta_2) - (\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2).$$

Ersetzen wir noch $(x_2 - x_1)$ auf Grund der ersten Gleichung (3), so folgt:

(4)
$$\mu\{(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2\}$$
$$= (\alpha_1 - \alpha_2)(\delta_1 - \delta_2) - (\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2).$$

Indem man den hieraus sich ergebenden Wert μ in (3) rechts einträgt, gewinnt man die Koordinatendifferenzen $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ für das Minimum $\overline{P_1 P_2}$; als Minimalwert selbst ergibt sich:

$$\frac{|(\alpha_1 - \alpha_2)(\delta_1 - \delta_2) - (\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2)|}{\sqrt{(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2}},$$

was die analytische Geometrie bestätigt (s. (3) in „A. G.“, § 66). —

2. Durch die erste der beiden Gleichungen:

(5)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad px + qy + rz = 0$$

sei ein Ellipsoid mit ungleichen Achsen $(a > b > c)$ dargestellt, durch die zweite eine Diametralebene dieser Fläche. Es sollen die Hauptachsen der dabei eintretenden Schnittellipse berechnet werden.

Das Quadrat eines Radius der Schnittellipse ist $(x^2 + y^2 + z^2)$, wobei x, y, z die beiden Gleichungen (5) befriedigen. Da die halben Hauptachsen die Extremwerte der Radien sind, so können wir unsere Aufgabe so fassen, daß es sich um die Extremwerte der Funktion $(x^2 + y^2 + z^2)$ bei Gültigkeit der Bedingungen (5) handelt. Es ist zweckmäßig, die Funktion $F(x, y, z)$ in diesem Falle so zu schreiben:

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) - 2\mu(px + qy + rz).$$

Die drei partiellen Ableitungen erster Ordnung liefern dann, gleich 0 gesetzt, die drei Gleichungen:

(6)
$$x\left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right) = \mu p, \qquad y\left(1 - \frac{\lambda}{b^2}\right) = \mu q, \qquad z\left(1 - \frac{\lambda}{c^2}\right) = \mu r$$

für die x, y, z der Extremwerte. Indem wir diese Gleichungen mit x, y, z multiplizieren und hernach addieren, folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (5) leicht:

(7)
$$\lambda = x^2 + y^2 + z^2,$$

so daß uns λ unmittelbar selbst die gesuchten Extremwerte liefert.

Wir nehmen nun zunächst an, daß keine der Größen p, q, r verschwindet. Da μ alsdann nicht gleich 0 sein darf (es würden ja sonst zufolge (6) mindestens zwei der Größen x, y, z zugleich verschwinden und also wegen der zweiten Gleichung (5) auch die dritte), so folgt aus (6), daß keiner der Werte x, y, z verschwindet, und daß λ mit keinem der Werte a^2, b^2, c^2 gleich sein kann. Unter diesen Umständen darf man die Gleichungen (6) durch $a^2 - \lambda$, bzw. $b^2 - \lambda$ und $c^2 - \lambda$ teilen:

$$(8) \qquad x = \mu \frac{a^2 p}{a^2 - \lambda}, \qquad y = \mu \frac{b^2 q}{b^2 - \lambda}, \qquad z = \mu \frac{c^2 r}{c^2 - \lambda}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit p, q, r und addieren sie, so folgt, da $\mu \neq 0$ ist, wegen der zweiten Gleichung (5):

$$\frac{a^2 p^2}{a^2 - \lambda} + \frac{b^2 q^2}{b^2 - \lambda} + \frac{c^2 r^2}{c^2 - \lambda} = 0$$

oder besser geordnet:

$$(9) \quad a^2 p^2 (\lambda - b^2)(\lambda - c^2) + b^2 q^2 (\lambda - c^2)(\lambda - a^2) + c^2 r^2 (\lambda - a^2)(\lambda - b^2) = 0.$$

Nennt man die linke Seite dieser Gleichung als ganze Funktion zweiten Grades von λ kurz $g(\lambda)$, so stellt man leicht fest, daß sich aus der vorausgesetzten Bedingung $a > b > c$:

$$g(a^2) > 0, \qquad g(b^2) < 0, \qquad g(c^2) > 0$$

ergibt. Die Gleichung zweiten Grades (9) für λ hat demnach zwei positive Wurzeln λ_1 und λ_2, welche in den Intervallen liegen:

$$a^2 > \lambda_1 > b^2 > \lambda_2 > c^2.$$

Zufolge (7) *haben wir in* $\sqrt{\lambda_1}$ *die große Halbachse, in* $\sqrt{\lambda_2}$ *die kleine Halbachse der Schnittellipse gewonnen.*

Will man übrigens die Koordinaten der Achsenendpunkte auch noch berechnen, so setze man die Ausdrücke (8) für x, y, z in die erste Gleichung (5) ein, was:

$$(10) \qquad \mu^2 \left\{ \frac{a^2 p^2}{(a^2 - \lambda)^2} + \frac{b^2 q^2}{(b^2 - \lambda)^2} + \frac{c^2 r^2}{(c^2 - \lambda)^2} \right\} = 1$$

liefert. Für jeden der beiden Werte λ_1, λ_2 erhalten wir hieraus zwei nur im Vorzeichen verschiedene zugehörige Werte μ, die mit dem betreffenden λ, in (8) eingetragen, die fraglichen Koordinaten ergeben. Da stets $\lambda_1 > \lambda_2$ gilt, *so kann übrigens eine Diametralebene mit nicht-verschwindenden* p, q, r *nie einen Kreis auf dem Ellipsoide ausschneiden.*

Verschwindet *einer* der Koeffizienten p, q, r[1]), etwa zunächst p, so ist in folgender Art zu schließen: Jedenfalls ist λ weder mit b^2 noch mit

1) Die Halbachsen der in den Koordinatenebenen gelegenen Schnittellipsen ergeben sich unmittelbar zu b, c bzw. c, a und a, b.

c^2 gleich. Die erste Gleichung (6) erfordert nämlich wegen $p = 0$ entweder $\lambda = a^2$, und dann ist eben $\lambda > b^2$ und $\lambda > c^2$, oder $x = 0$, und dann müssen y und z von 0 verschiedene Werte haben[1]), so daß wir aus (6) auf $\mu \neq 0$ und eben deshalb auf $\lambda \neq b^2$, $\lambda \neq c^2$ schließen. Wir können demnach die zweite und dritte Gleichung (6) wie oben behandeln, gelangen zur zweiten und dritten Gleichung (8) und finden wegen $qy + rz = 0$ weiter:

$$\mu \left\{ \frac{b^2q^2}{b^2 - \lambda} + \frac{c^2r^2}{c^2 - \lambda} \right\} = 0$$

oder, etwas anders geschrieben:

(11) $$\mu(b^2q^2(\lambda - c^2) + c^2r^2(\lambda - b^2)) = 0.$$

Diese Gleichung erfordert entweder $\mu = 0$ oder das Verschwinden des Ausdrucks in der Klammer. Ist $\mu = 0$, so folgt $y = 0$, $z = 0$; und da alsdann $x \neq 0$ gilt, so liefert die erste Gleichung (6) notwendig $\lambda_1 = a^2$ und damit die große Halbachse $\sqrt{\lambda_1} = a$, etwa mit dem Endpunkte $x = a$, $y = 0$, $z = 0$, wie er sich selbstverständlich auch aus der ersten der Gleichungen (5) für $y = 0$, $z = 0$ ergibt. Ist aber $\mu \neq 0$, so ist λ durch Nullsetzen des Klammerausdrucks (11) zu berechnen, welcher eine dem Intervalle $b^2 > \lambda_2 > c^2$ angehörende Wurzel liefert und damit die kleine Halbachse $\sqrt{\lambda_2}$ ergibt. Nun erfordert die erste Gleichung (6) wegen $p = 0$ und $\lambda < a^2$ das Verschwinden von x, und wir berechnen y und z wie oben nach Lösung der Gleichung für μ:

$$\mu^2 \left\{ \frac{b^2q^2}{(b^2 - \lambda_2)^2} + \frac{c^2r^2}{(c^2 - \lambda_2)^2} \right\} = 1.$$

Auch jetzt ist $\lambda_1 > \lambda_2$, *so daß sich nie ein Kreis als Schnitt finden kann.*

Zu einem ähnlichen Ergebnis gelangt man im Falle $r = 0$. Dagegen führt der allein ausstehende Fall $q = 0$ noch zu einem neuen Resultate. Wir schließen hier zunächst wie oben auf $\lambda \neq a^2$, $\lambda \neq c^2$ sowie auf:

(12) $$\mu(a^2p^2(\lambda - c^2) + c^2r^2(\lambda - a^2)) = 0.$$

Ist $\mu = 0$, so findet man leicht die Lösung $\lambda_1 = b^2$, $x = 0$, $y = \pm b$, $z = 0$. Ist aber $\mu \neq 0$, so haben wir:

(13) $$a^2p^2(\lambda - c^2) + c^2r^2(\lambda - a^2) = 0$$

zu lösen, was auf einen bestimmten, dem Intervalle $c^2 < \lambda_2 < a^2$ angehörenden Wert λ_2 führt. Falls nun $\lambda_2 \neq b^2$ ist, muß $y = 0$ sein. Man verfährt dann zur Berechnung von μ wie oben und gelangt *zu einer Ellipse*

1) Man wolle nur beachten, daß das Verschwinden einer der beiden Zahlen y, z zufolge $qy + rz = 0$ dasjenige der anderen nach sich zieht, so daß wir zu dem unbrauchbaren Ergebnis $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ gelangen würden.

mit den ungleichen Achsen $\sqrt{\lambda_1} = b$, $\sqrt{\lambda_2}$. Ist hingegen auch $\lambda_2 = b^2$, *was stets und nur dann eintritt, wenn die Koeffizienten* p, r *eine der beiden Relationen:*

$$(14) \qquad pa\sqrt{b^2 - c^2} = \pm rc\sqrt{a^2 - b^2}$$

befriedigen, so liegt die Besonderheit vor, daß y im Intervalle $-b \leqq y \leqq +b$ unbestimmt bleibt, und daß jeder Punkt der Schnittkurve:

$$\left(\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}, \quad y, \quad \mp\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)$$

vom Nullpunkte den Abstand b hat. *Die beiden Ebenen:*

$$(15) \qquad cx\sqrt{a^2-b^2} \pm az\sqrt{b^2-c^2} = 0$$

sind die einzigen Diametralebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden. Wir haben damit einen bekannten Satz der analytischen Geometrie gewonnen (s. „A. G.“, § 76).

9. Aufgaben über Extremwerte von Funktionen bei Gültigkeit von Nebenbedingungen. 1) Man beweise, daß die Gesamtoberfläche eines geraden Kreiskegels vom Rauminhalt $\frac{\pi}{3}$ mindestens gleich 2π ist. — Bedeutet x den Radius der Grundfläche, y die Höhe und z die Mantellinie des Kegels, so bestehen die Relationen:

$$(1) \qquad \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{\pi}{3}, \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

und die Gesamtoberfläche ist $\pi(x^2 + xz)$. Man setzt hier zweckmäßig:

$$F(x, y, z) = x^2 + xz + \tfrac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - z^2) + \mu(1 - x^2 y)$$

als diejenige Funktion an, deren partielle Ableitungen verschwinden müssen:

$$2x + z + \lambda x - 2\mu xy = 0, \quad \lambda y - \mu x^2 = 0, \quad x - \lambda z = 0.$$

Da wegen der zweiten und dritten Gleichung λ und μ positiv sein müssen, so folgt durch Auflösung nach x, y, z:

$$x = \frac{1+\lambda}{\mu\sqrt{2}}, \quad y = \frac{(1+\lambda)^2}{2\lambda\mu}, \quad z = \frac{1+\lambda}{\lambda\mu\sqrt{2}}.$$

Die Eintragung dieser Ausdrücke der x, y, z in die Relationen (1) führt auf $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{4}{3}$, woraus sich die Behauptung leicht ergibt.

2) In der Ebene sei ein Punkt P_1 der Koordinaten x_1, y_1 auf einer Geraden beweglich, ein Punkt P_2 der Koordinaten x_2, y_2 auf einer Parabel. Die betreffenden Gleichungen seien:

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta, \qquad y_2{}^2 = 2px_2,$$

und es gelte $2\alpha\beta > p$, damit die Gerade und die Parabel keinen Punkt gemein haben. Man zeige, daß das Minimum der Entfernung $\overline{P_1 P_2}$:

$$\overline{P_1 P_2} = \frac{2\alpha\beta - p}{2|\alpha|\sqrt{1+\alpha^2}}$$

ist, indem man der Untersuchung die Funktion zugrunde legt:

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2\lambda(y_1 - \alpha x_1 - \beta) + \mu(y_2{}^2 - 2px_2).$$

3) Man berechne die Hauptachsen der durch:

$$2x^2 + 6xy + 5y^2 - 1 = 0 \tag{2}$$

dargestellten Ellipse. — Von allen Ellipsenpunkten ist der Endpunkt der großen Achse dem Nullpunkte am fernsten, der Endpunkt der kleinen Achse aber am nächsten. Es handelt sich also um die Extremwerte von $(x^2 + y^2)$ unter Gültigkeit der Relation (2). Man bilde den Ansatz:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(2x^2 + 6xy + 5y^2 - 1)$$

und setze die beiden Ableitungen erster Ordnung gleich 0:

$$(2\lambda + 1)x + 3\lambda y = 0, \qquad 3\lambda x + (5\lambda + 1)y = 0.$$

Da $x \neq 0$, $y \neq 0$ ist, so folgt durch Kombination dieser beiden Gleichungen:

$$(2\lambda + 1)(5\lambda + 1) - 9\lambda^2 = \lambda^2 + 7\lambda + 1 = 0, \qquad \lambda = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

Für das Verhältnis der gesuchten Koordinaten folgt damit weiter:

$$x : y = 2 : (1 \pm \sqrt{5}),$$

so daß sich mittelst der Gleichung der Ellipse diese Koordinaten selbst berechnen zu:

$$x = +\sqrt{\frac{25 \mp 11\sqrt{5}}{10}}, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{5 \mp 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Die gesuchten Hauptachsen sind also gleich $(3 \mp \sqrt{5})$.

Abschnitt III.

Anwendungen der Differentialrechnung.

Kapitel I. **Untersuchung der ebenen Kurven.**

1. Ebene Kurven und ihre Darstellung durch Gleichungen. Zur Erläuterung der allgemeinen Sätze, welche wir mittelst der Differentialrechnung bei der Untersuchung der ebenen Kurven aufstellen werden, sollen uns neben anderen Kurven auch diejenigen dienen, die in der Einleitung zur Versinnlichung der Funktionen $f(x)$ eingeführt wurden. Die Gleichung der einzelnen Kurve stellt sich dabei vermittelst der rechtwinkligen Koordinaten x, y in der Gestalt $y = f(x)$ dar. Benutzen wir algebraische Kurven niederen Grades, z. B. Kegelschnitte, zur Erläuterung, so hat die Gleichung im einzelnen Falle gewöhnlich die Gestalt $f(x, y) = 0$, d. h. sie ist nach keiner der veränderlichen Koordinaten gelöst.

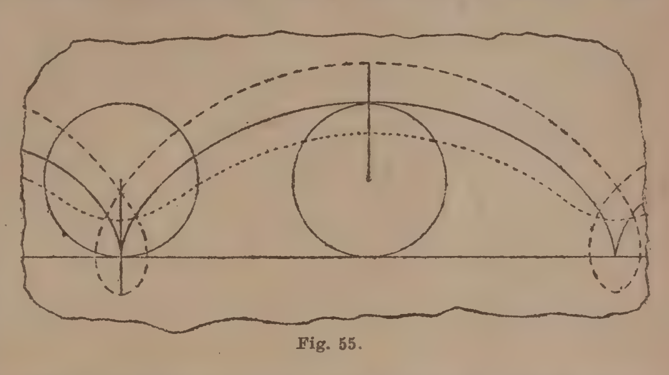
Eine weitere oft benutzte Darstellung der ebenen Kurven in rechtwinkligen Koordinaten ist diejenige *durch zwei Gleichungen:*

(1) $$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

welche die Koordinaten des einzelnen Kurvenpunktes als Funktionen einer dritten unabhängigen Variablen t darstellen. Man kann diese Darstellungsart an die Auffassung der Mechanik anschließen, daß die Kurve im Laufe der Zeit durch einen materiellen Punkt beschrieben wird. Dabei ist t als Maß der Zeit gedacht, und der Ort (x, y) des materiellen Punktes „zur Zeit t“ ist durch die Gleichungen (1) gegeben.

Die Darstellung (1) benutzt man vorteilhaft bei den *Zykloiden* (s. „A. G.“, § 46), die wir hier zu späterem Gebrauche gleich etwas ausführlicher besprechen. *Lassen wir einen Kreis vom Radius a auf einer Geraden ohne Gleitung rollen, so beschreibt ein fest mit dem Kreise verbundener Punkt P des Abstandes b vom Kreismittelpunkte eine sogenannte „Zykloide“.* In Fig. 55 sind für drei verschiedene Punkte P, die alle auf dem gleichen Radius bzw. dessen Verlängerung liegen, die drei zugehörigen Zykloiden gezeichnet. Ist $b = a$, d. h. ist P der Endpunkt des Radius und damit ein Peripheriepunkt des rollenden Kreises, so entsteht die ausgezogene Kurve, die als *„gemeine Zykloide“* bezeichnet wird. Für $b < a$ entsteht die punktierte Linie, die *„verkürzte* (auch *geschweifte*)

Zykloide" heißt; ein Beispiel für $b > a$ ist die gestrichelte Kurve, welche den Namen der „*verlängerten* (auch *verschlungenen*) *Zykloide* führt. Es ist einleuchtend, daß sich nach rechts und links hin nach je einer vollen Umdrehung des rollenden Kreises um seinen Mittelpunkt der Verlauf der Kurven kongruent wiederholt.


Fig. 55.

Zur Darstellung der Zykloide wählen wir die gegebene Gerade als x-Achse und legen die y-Achse durch einen der tiefsten Punkte der Kurve, so daß der zum Punkte P gehörende Kreisradius in dem Augenblicke, wo der Kreis die x-Achse im Nullpunkte berührt, gerade senkrecht gegen die x-Achse gerichtet ist. Es möge nun von dieser Anfangslage der Kreis etwa nach rechts bis zum Punkte B der x-Achse gerollt sein (vgl. Fig. 56), wobei der anfänglich senkrecht nach unten gerichtete Kreisradius die Lage $O'A$ angenommen hat. Bis zu diesem Augenblicke hat sich also der Kreis um seinen Mittelpunkt O' durch den Winkel $\sphericalangle\, AO'B$ gedreht;

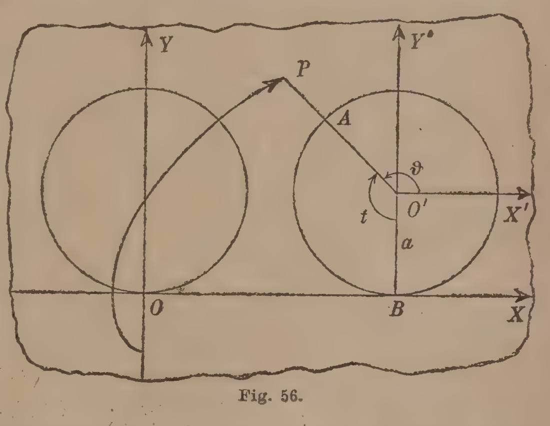


Fig. 56.

die Größe $t = \sphericalangle\, AO'B$ dieses Winkels können wir, indem wir die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vollzogen denken, geradezu als Zeitmaß gebrauchen. Da eine Gleitung des Kreises ausgeschlossen sein sollte, so ist der zum Zentriwinkel t gehörende Bogen $\widehat{AB} = a \cdot t$ ebenso lang, wie die Strecke $\overline{OB}$ der x-Achse, auf der der Bogen abgerollt ist. Hieraus folgt, daß „zur Zeit t" die Koordinaten des Kreismittelpunktes durch $\alpha = a \cdot t$, $\beta = a$ gegeben sind.

Wir führen nun ein mit dem Kreise bewegliches Koordinatensystem mit O' als Nullpunkt ein, dessen Achsen den alten parallel und gleich-

gerichtet sind. Sind x', y' die Koordinaten im neuen Systeme, so gilt nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$. Der die Kurve beschreibende Punkt P hat im neuen Systeme den Radiusvektor $O'P = b$, und seine Amplitude ϑ, d. h. der Winkel des Radiusvektor gegen die positive x'-Achse (s. Fig. 56), ist $\vartheta = \frac{3\pi}{2} - t$.[1] Die neuen Koordinaten des Kurvenpunktes P sind demnach:

$$x' = b \cos \vartheta = -b \sin t, \qquad y' = b \sin \vartheta = -b \cos t,$$

so daß wir für die alten Koordinaten von P:

$$(2) \qquad x = at - b \sin t, \qquad y = a - b \cos t$$

finden. Hier haben wir *die Gleichungen der Zykloide in der Gestalt* (1) vor uns und bestätigen übrigens leicht, daß sie auch für die negativen Werte t und damit für die Fortsetzung der Zykloide nach links hin gelten. Es ist zwar leicht möglich, durch Elimination von t aus den beiden Gleichungen (2) die einzelne Gleichung:

$$x = a \cdot \arccos\left(\frac{a-y}{b}\right) - \sqrt{b^2 - a^2 + 2ay - y^2}$$

für die Zykloide herzustellen. Indessen ist es bei den Anwendungen stets einfacher, mit dem Gleichungenpaare (2) zu arbeiten.

Eine ganz ähnliche Behandlung gestatten die „*Epizykloiden*" und „*Hypozykloiden*". Die ersteren Kurven erklären wir so: *Ein fester Kreis des Radius a und des Mittelpunktes O und ein beweglicher Kreis des Radius b und des Mittelpunktes O' mögen einander (jeder den anderen) von außen berühren; lassen wir den beweglichen Kreis auf dem anderen ohne Gleitung rollen, so beschreibt ein mit jenem fest verbundener Punkt P des Abstandes $O'P = c$ vom Mittelpunkte O' eine „Epizykloide"*. Ist $c = b$, wird also die Kurve von einem Peripheriepunkte P des beweglichen Kreises beschrieben, so spricht man gewöhnlich von einer „*Epizykloide*" ohne weiteren Zusatz; für $c < b$ heißt die Epizykloide „*verkürzt*" („*geschweift*"), für $c > b$ „*verlängert*" („*verschlungen*").

Zur Darstellung der Epizykloide wählen wir O als Nullpunkt eines rechtwinkligen Systems und legen die positive x-Achse durch irgend einen am Nullpunkte O nächst gelegenen Punkt der Epizykloide. Berührt der rollende Kreis den festen im Schnittpunkte A der positiven x-Achse mit der festen Peripherie, so soll also in diesem Augenblicke der die Kurve beschreibende Punkt P auf dem Radius $O'A$ oder dessen Ver-

1) Sobald $t > \frac{3\pi}{2}$ wird, fällt ϑ negativ aus; doch kann man immer durch Zusatz eines Multiplums von 2π zu einem dem Intervalle $0 \leq \vartheta < 2\pi$ angehörenden Werte der Amplitude zurückkommen.

längerung über A hinaus liegen (s. Fig. 57, wo $c > b$ gilt). Es möge nun von dieser Anfangslage aus der bewegliche Kreis auf dem festen abrollen und etwa „zur Zeit t“ die in der Fig. 57 skizzierte Lage mit dem Berührungspunkte B erreicht haben. Indem wir die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vollzogen denken, können wir den Zentriwinkel $\sphericalangle AOB = t$ direkt als Zeitmaß benutzen. Ein Stückchen der Kurve ist in Fig. 57 skizziert; „zur Zeit t“ hat der zum Punkte P gehörende Radius die Lage $O'CP$ angenommen und bildet mit dem Radius $O'B$ nach dem augenblicklichen Berührungspunkte den Zentriwinkel $\sphericalangle BO'C = t'$. Der zugehörige Bogen $\widehat{BC} = b \cdot t'$ ist während des Zeitintervalls von 0 bis t auf dem Bogen $\widehat{AB} = a \cdot t$ abgerollt, so daß wir aus der Gleichheit beider Bogen auf das Zutreffen der Beziehung:

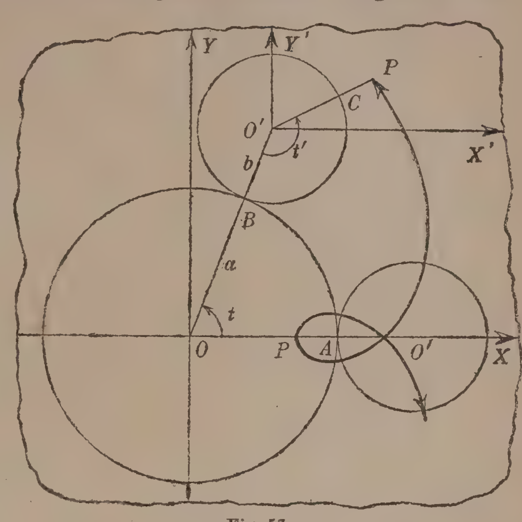


Fig. 57.

$$bt' = at, \qquad t' = \frac{a}{b} t$$

schließen. Der zum Punkte P gehörende bewegliche Radius hat sich gegen seine Anfangsrichtung (negative x-Achse) bis zum Zeitpunkte t um den Winkel:

$$t' + t = \frac{a+b}{b} t$$

gedreht. Wie bei der Zykloide führe man jetzt ein neues bewegliches Koordinatensystem mit O' als Nullpunkt ein, dessen Achsen den alten parallel und gleichgerichtet sind. Die Koordinaten des neuen Nullpunktes sind zur Zeit t durch:

$$\alpha = (a + b) \cos t, \qquad \beta = (a + b) \sin t$$

gegeben; die Beziehungen zwischen den alten und den neuen Koordinaten sind natürlich wieder $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$. Nun hat P im neuen Systeme den konstanten Radiusvektor c und „zur Zeit t“ die Amplitude:

$$\vartheta = \sphericalangle PO'X' = t + t' - \pi = \frac{a+b}{b} t - \pi \text{ [1]},$$

1) Liegt ϑ nicht unmittelbar im Intervalle $0 \leq \vartheta < 2\pi$, so kann durch Zusatz oder Abzug eines Multiplums von 2π wieder ein diesem Intervalle angehörender Wert ϑ erzielt werden.

so daß wir für die Koordinaten x', y' von P finden:

$$x' = c\cos\vartheta = -c\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right), \qquad y' = c\sin\vartheta = -c\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right).$$

Im alten Systeme des Nullpunktes O gewinnt man daraufhin als Gleichungen der Epizykloide in der Gestalt (1):

$$(3)\quad x = (a+b)\cos t - c\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right), \qquad y = (a+b)\sin t - c\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right).$$

Daß dieselben auch für die negativen Werte t gültig bleiben, ist mit Rücksicht auf die Symmetrie der Kurve bezüglich der x-Achse einleuchtend.

Für die Hypozykloide gilt folgende Erklärung: *Ein fester Kreis des Radius a und des Mittelpunktes O werde von innen durch einen beweglichen Kreis des Radius $b < a$ und des Mittelpunktes O' berührt; lassen wir den beweglichen Kreis auf dem anderen ohne Gleitung rollen, so beschreibt ein mit jenem fest verbundener Punkt P des Abstandes $\overline{O'P} = c$ vom Mittelpunkte O' eine „Hypozykloide".* Ist $c = b$, wird also die Kurve von einem Peripheriepunkte P des beweglichen Kreises beschrieben, so spricht man gewöhnlich von einer *„Hypozykloide"* ohne weiteren Zusatz; für $c < b$ heißt die Hypozykloide *„verkürzt"* (*„geschweift"*), für $c > b$ *„verlängert"* (*„verschlungen"*).

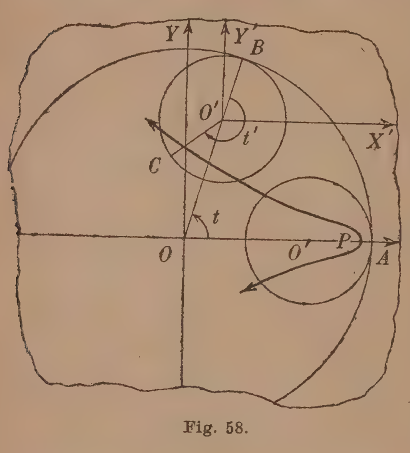


Fig. 58.

Die Gleichungen der Hypozykloide gewinnt man auf dieselbe Art, wie die der Epizykloide; Fig. 58 (in der $c < b$ angenommen wurde) skizziert die Verhältnisse und gibt zugleich die Bezeichnungen. Man gelangt zu folgender *Darstellung der Hypozykloide durch zwei Gleichungen der Gestalt* (1):

$$(4)\quad x = (a-b)\cos t + c\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right), \qquad y = (a-b)\sin t - c\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right).$$

Wählt man den Nullpunkt des rechtwinkligen Systems zum Pol und die positive x-Achse zur Achse eines *„Polarkoordinatensystems"*, und nennt man r den *„Radiusvektor"* und ϑ die *„Amplitude"* des einzelnen Punktes (s. das Nähere in Fig. 59), so sind, wie ein Blick auf Fig. 59 bestätigt, die rechtwinkligen Koordinaten x, y des einzelnen Punktes P mit den Polarkoordinaten r, ϑ desselben durch die schon soeben öfters benutzten Gleichungen:

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta$$

verbunden. Hat man eine „algebraische“ Kurve, die also durch Nullsetzen einer ganzen rationalen Funktion von x und y darstellbar ist, so erscheint in der auf Polarkoordinaten r, ϑ umgerechneten Gleichung, der sogenannten „*Polargleichung*“ der Kurve, r mit den trigonometrischen Funktionen von ϑ verknüpft. Ein bekanntes Beispiel ist die gemeinsame „*Polargleichung der Kegelschnitte*“:

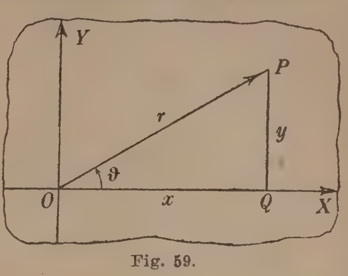


Fig. 59.

(5) $$r = \frac{p}{1 - c \cdot \cos\vartheta},$$

wobei der Pol ein Brennpunkt des Kegelschnitts ist, die Polarachse aber eine Hauptachse (s. „A. G.“, § 38). Wie die analytische Geometrie näher ausführt, ist dabei p der „*Halbparameter*“ (die „*Brennpunktsordinate*“) und c für die Ellipse ($0 < c < 1$) und die Hyperbel ($c > 1$) die „*numerische Exzentrizität*“, während bei der Parabel $c = 1$ gilt.

Man benutzt die Polarkoordinaten vornehmlich zur Darstellung von „*Spiralen*“ von denen wir einige besonders wichtige zu nennen haben. Die Gleichung:

(6) $$r = a\vartheta,$$

in der a eine positive Zahl sei, stellt die „*Archimedische Spirale*“ dar, deren Verlauf in der Nähe des Poles durch Fig. 60 versinnlicht wird. Wir denken hierbei ϑ als positive Variable unbegrenzt, so daß eine Vergrößerung von ϑ um 2π den Radiusvektor um den Betrag $2a\pi$ wachsen läßt.[1]) Die Spirale

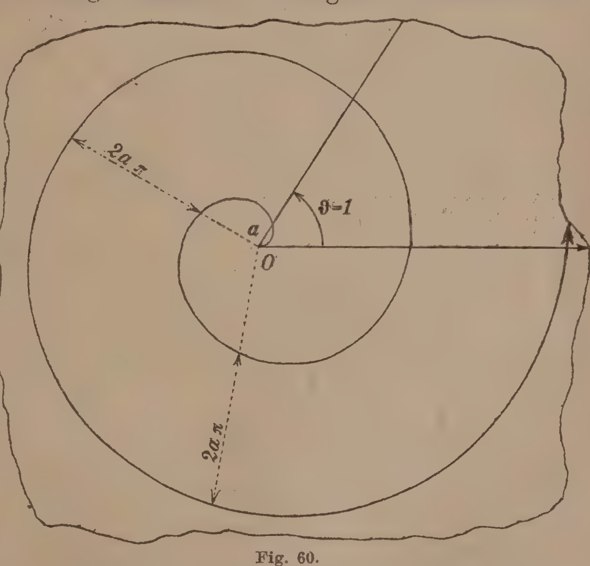


Fig. 60.

1) Negative ϑ würden $r < 0$ liefern. Man deutet ein solches Wertepaar r, ϑ wohl in der Art, daß man ihm den Punkt $(|r|, \vartheta + \pi)$ entsprechen läßt; man würde also den absoluten Wert $|r|$ als Radiusvektor auf der Rückwärtsverlängerung des beweglichen Schenkels vom Winkel ϑ abzutragen haben, wie man es z. B. bei der Gleichung (5) der Hyperbel zu machen hat, um den zweiten Zweig dieser Kurve zu gewinnen. Doch wollen wir im Texte bei den Spiralen nur solche ϑ zulassen, die nicht-negative Werte r liefern.

windet sich nach außen hin unendlich oft um den Pol herum, und zwar folgen die Schnittpunkte eines vom Pole ausziehenden Strahles mit der Kurve immer in Abständen $2a\pi$ aufeinander. Der Konstanten a können wir die geometrische Bedeutung beilegen, daß sie der Radiusvektor der Spirale für $\vartheta = 1$, d. i. für den Winkel $57^0 17' 44{,}806\ldots''$, ist (s. Fig. 60 und S. 51).

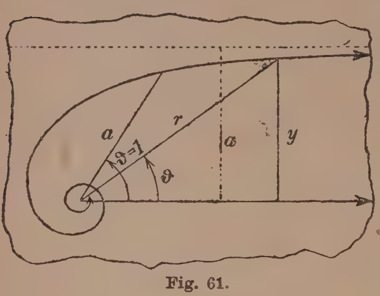


Fig. 61.

Die *„hyperbolische Spirale“*, welche in Fig. 61 skizziert ist, hat zur Gleichung:

$$(7) \qquad r = \frac{a}{\vartheta} \quad \text{oder} \quad r\vartheta = a.\text{[1]}$$

Auch hier ist ϑ als positive Variable unbeschränkt. Der Radiusvektor r nimmt mit wachsendem ϑ monoton und stetig ab, so daß sich die Kurve nach innen um den Pol unendlich oft windet. Die Konstante a kann man wieder als Wert des Radiusvektor für $\vartheta = 1$ deuten (s. Fig. 61). Multipliziert man die erste Gleichung (7) mit $\sin\vartheta$ und geht zu den ursprünglichen rechtwinkligen Koordinaten zurück, so folgt:

$$r \sin\vartheta = y = a\,\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}.$$

Für $\lim \vartheta = 0$ wird $\lim r = \infty$, und zwar zufolge der letzten Gleichung in der Art, daß $\lim y = a$ wird. Die Kurve zieht demnach für $\lim \vartheta = 0$ nach rechts ins Unendliche und nähert sich dabei ohne Ende der in der Figur punktiert angedeuteten Parallelen zur Polarachse im Abstande a, ohne sie im Endlichen zu erreichen; diese Gerade ist also eine „Asymptote“ der Kurve.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die der Gleichung:

$$(8) \qquad r = \frac{\vartheta + 1}{\vartheta}$$

entsprechende Spirale. Damit r nicht negativ wird, ist entweder $\vartheta \geqq 0$ oder $\vartheta \leqq -1$ zu nehmen. Die Kurve besteht entsprechend aus zwei Stücken, von denen das eine außerhalb des Kreises vom Radius 1 um den Pol verläuft, das andere innerhalb dieses Kreises, wie Fig. 62 veranschaulicht. Das äußere Stück kann man leicht aus der hyperbolischen Spirale der Gleichung $r\vartheta = 1$ dadurch herstellen, daß man beim einzelnen ϑ den Radiusvektor r um die Längeneinheit vergrößert. Nach außen hin ist die Parallele zur Polarachse im Abstande 1 eine Asymptote, nach innen nähert sich die Kurve dem vorhin genannten Kreise „asymptotisch“, indem sie ihn unendlich oft umläuft. Das zweite Stück der Kurve beginnt

1) Diese Gleichung ist derjenigen der gleichseitigen „Hyperbel“ (in rechtwinkligen Koordinaten) $xy = a$ analog gebaut.

für $\vartheta = -1$ im Pole selbst und windet sich, während ϑ gegen die Grenze $-\infty$ abnimmt, unendlich oft um den Pol unter „asymptotischer Annäherung“ an den öfter genannten Kreis von innen her.

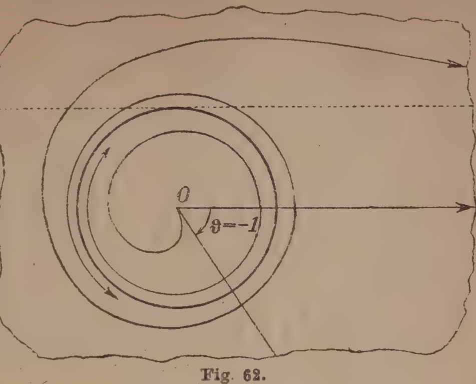


Fig. 62.

Als besonders wichtig haben wir endlich noch die *„logarithmische Spirale“* mit der Gleichung:

(9) $r = e^{a\vartheta}$ oder $a\vartheta = \ln r$

zu nennen, deren Verlauf für den besonderen Wert $a = \frac{\ln 3 - \ln 2}{2\pi}$ der Konstanten a in Fig. 63 dargestellt ist. Diese Spirale windet sich sowohl

Fig. 63.

nach außen als nach innen unendlich oft um den Pol herum. Ist für irgendeine dem Intervalle $0 \leq \vartheta_0 < 2\pi$ angehörige Amplitude ϑ_0 der zugehörige Radiusvektor gleich r_0, so schneidet der Strahl dieser Amplitude die Spirale in den unendlich vielen Punkten der Radienvektoren:

$$\cdots, r_0 q^{-2}, r_0 q^{-1}, r_0, r_0 q, r_0 q^2, r_0 q^3, \cdots,$$

wo $q = e^{2a\pi}$ ist. Während also bei der Archimedischen Spirale die zu einem Strahle gehörenden Radienvektoren die Glieder einer „arithmetischen" Reihe bilden, haben wir hier entsprechend die Glieder einer beiderseits unendlichen „geometrischen" Reihe vor uns.

Aufgaben: 1) Es ist zu zeigen, daß die Epizykloiden für $b = a$ algebraische Kurven vierten Grades der Gleichung:

$$((x-c)^2 + y^2 + 2c(x-c))^2 = 4a^2((x-c)^2 + y^2) \tag{10}$$

sind; diese Kurven werden auch als *„Pascalsche Schneckenkurven"* oder kurz *„Pascalsche Kurven"* bezeichnet. Für $c = a$ liegt die in Fig. 64 gezeichnete Kurve vor, welche *„Herzkurve"* oder *„Kardioide"* heißt (s. „A. G.", § 47). Auch für $c > a$ und $c < a$ zeichne der Leser Beispiele.

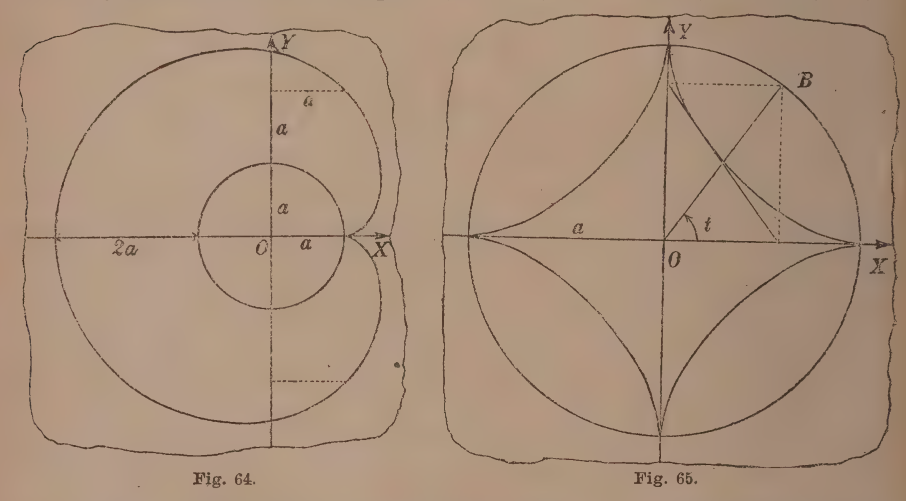


Fig. 64. Fig. 65.

2) Man untersuche für $a = 4b$ die Hypozykloide im engeren Sinne (d. i. diejenige für $c = b$). Es handelt sich um die in Fig. 65 gezeichnete *„vierspitzige"* Hypozykloide, die auch *„Astroide"* oder *„Sternkurve"* heißt (s. „A. G.", § 47). Man zeige, daß die Gleichungen (4) für diese Kurve:

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t \tag{11}$$

geschrieben werden können; hieraus ergibt sich als algebraische Gleichung der Astroide in irrationaler Gestalt:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

sowie endlich in rationaler Gestalt:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0.$$

3) Die Gleichungen der Hypozykloide (im engeren Sinne):

$$(12)\quad x = (a-b)\cos t + b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right),\qquad y = (a-b)\sin t - b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)$$

sind oben im Anschluß an eine Zeichnung (s. Fig. 58) aufgestellt, in der $b < \frac{1}{2}a$ war. Man überzeuge sich (durch Zeichnung geeigneter Figuren), daß die Gleichungen auch für $\frac{1}{2}a \leqq b < a$ gelten. Doch zeige man weiter, daß sich jede Hypozykloide für ein dem Intervalle $\frac{1}{2}a < b < a$ angehörendes b auch als Hypozykloide für $b' = a - b$ erzeugen läßt. Die Gleichungen (12) gehen nämlich, wenn man:

$$a-b=b',\quad b=a-b',\quad \frac{a-b}{b}t=-t',\quad t=-\frac{a-b'}{b'}t'$$

setzt, bei Umstellung der Glieder wieder in die Gestalt (12) über:

$$x = (a-b')\cos t' + b'\cos\left(\frac{a-b'}{b'}t'\right),\qquad y = (a-b')\sin t' - b'\sin\left(\frac{a-b'}{b'}t'\right).$$

4) Man untersuche die Hypozykloiden in dem besonderen Falle $a = 2b$. Die Hypozykloide im engeren Sinne wird zu dem auf der x-Achse gelegenen Durchmesser des festen Kreises; die verkürzten und die verlängerten Hypozykloiden werden Ellipsen:

$$\frac{x^2}{(b+c)^2} + \frac{y^2}{(b-c)^2} = 1.$$

Man verfolge die Bewegung des zum Punkte P gehörenden Durchmessers vom beweglichen Kreise und stelle die Art der Erzeugung der Ellipsen von hieraus fest. Vgl. „A. G.", § 42.

5) Wird ein fester Kreis des Radius a von einem beweglichen Kreise des Radius $b > a$ in der Art berührt, daß der bewegliche Kreis den festen umschließt, so beschreibt ein Peripheriepunkt des beweglichen Kreises beim Abrollen desselben auf dem festen Kreise eine sogenannte „*Perizykloide*". Man stelle bei geeigneter Auswahl des Koordinatensystems als Gleichungen der Perizykloide:

$$(13)\quad x = -(b-a)\cos t + b\cos\left(\frac{b-a}{b}t\right),\quad y = -(b-a)\sin t + b\sin\left(\frac{b-a}{b}t\right)$$

auf und zeige durch Ausführung der Substitution:

$$b-a=b',\quad b=a+b',\quad \frac{b-a}{b}t=t',\quad t=\frac{a+b'}{b'}t',$$

daß jede Perizykloide auch als Epizykloide erzeugbar ist.

2. Untersuchung der Tangenten der ebenen Kurven bei rechtwinkligen Koordinaten. Eine erste Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der ebenen Kurven ist durch die Entwicklungen von S. 97 ff. begründet. Wir erkannten damals, daß die Frage, ob eine stetige Funktion y von x an einer Stelle x eine Ableitung besitzt, gleichbedeutend ist mit der Frage, ob die zur Funktion gehörende Kurve an der betreffenden Stelle (x, y) eine Tangente besitzt. Wir setzen die Existenz der Ableitung voraus und nennen sie y'. Zufolge (2) S. 98 gilt dann die einfache Beziehung $y' = \operatorname{tg}\alpha$, wo α den Winkel bedeutet, den die „nach rechts gerichtete" Kurventangente der Stelle (x, y) mit der positiven x-

Achse bildet, und übrigens die Maßzahl α mit dem seinerzeit festgesetzten Vorzeichen zu versehen ist.

Diese Beziehung soll uns jetzt umgekehrt dazu dienen, bei einer gegebenen Kurve im einzelnen Punkte die *Tangentenrichtung* festzustellen, die *Tangentengleichung* zu bilden und Regeln für die *Tangentenkonstruktion* zu gewinnen. Um die Bezeichnungen x, y, y' für die Koordinaten des Kurvenpunktes und den Wert der zugehörigen Ableitung vorzubehalten, wollen wir mit ξ, η die Koordinaten eines die Tangente beschreibenden Punktes bezeichnen, natürlich im zugrunde liegenden rechtwinkligen Systeme. Als gerade Linie stellt sich nun die Tangente durch eine Gleichung ersten Grades dar, die wir in der Normalgestalt $\eta = \mu\xi + \nu$ ansetzen („A. G.“, § 8 u. 9). Hier ist dann μ der „Richtungskoeffizient“, der in unserem Falle rechtwinkliger Koordinaten unmittelbar durch $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ und also durch $\mu = y'$ gegeben ist:

$$\eta = y'\xi + \nu.$$

Das Absolutglied ν bestimmen wir durch die Forderung, daß die vorstehende Gleichung durch die Koordinaten $\xi = x$, $\eta = y$ des Berührungspunktes der Tangente befriedigt wird:

$$y = y'x + \nu.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der voraufgehenden ergibt sich als *Gleichung der Tangente unserer Kurve im Punkte* (x, y):

(1) $$\eta - y = y'(\xi - x).$$

Diejenige Gerade, welche die Tangente im Punkte (x, y) senkrecht oder, wie man sagt, „*normal*“ überkreuzt, wird als „*Normale*“ der Kurve im Punkte (x, y) bezeichnet. *Die Gleichung der Normalen unserer Kurve im Punkte* (x, y) *ist:*

(2) $$\xi - x + y'(\eta - y) = 0;$$

denn die durch diese Gleichung, bezogen auf variable Koordinaten ξ, η, dargestellte Gerade läuft offenbar durch den Punkt (x, y) und schneidet nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie die Gerade (1) senkrecht (s. „A. G.“, § 11).

Die Gleichungen (1) und (2) mögen sogleich noch den besonderen Gestalten der Kurvengleichungen angepaßt werden. Ist die Gleichung der Kurve in der Gestalt $y = f(x)$ gegeben, so hat man einfach:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

in die Gleichungen (1) und (2) einzutragen. Hat hingegen die Kurvengleichung die Gestalt $f(x, y) = 0$, so ist y' nach der Regel (6) S. 154

zu berechnen. Die Gleichungen für Tangente und Normale nehmen hier die Gestalten:

$$(3)\qquad \begin{cases} (\xi - x)\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + (\eta - y)\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0, \\ (\xi - x)\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} - (\eta - y)\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

an.[1]) Ist endlich die Kurve durch zwei Gleichungen der Gestalt (1) S. 266 gegeben, so stellen wir zunächst die beiden Formeln auf:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \psi'(t)\cdot\frac{dt}{dx}, \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)},$$

und zwar die letzte nach der Umkehrregel (S. 108) und die erste nach der Kettenregel (S. 122). Hieraus folgt die Tangentengleichung:

$$(4)\qquad (\xi - \varphi(t))\psi'(t) - (\eta - \psi(t))\varphi'(t) = 0,$$

während die Gleichung der Normalen die Gestalt annimmt:

$$(5)\qquad (\xi - \varphi(t))\varphi'(t) + (\eta - \psi(t))\psi'(t) = 0.$$

Um z. B. die *Ellipsentangente* darzustellen, haben wir die erste Gleichung (3) für die Funktion:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

zu bilden und finden bei Fortlassung des gemeinsamen Faktors 2:

$$(6)\qquad \frac{(\xi - x)x}{a^2} + \frac{(\eta - y)y}{b^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

Für die *Astroide* der Gleichungen (11) S. 274 ergibt der Ansatz (4) als Tangentengleichung:

$$(\xi - a\cos^3 t)\,3a\sin^2 t\cos t + (\eta - a\sin^3 t)\,3a\cos^2 t\sin t = 0$$

oder nach einfacher Umgestaltung:

$$(7)\qquad \frac{\xi}{a\cos t} + \frac{\eta}{a\sin t} = 1.$$

Die Tangente schneidet demnach die x-Achse im Punkte $(a\cos t, 0)$ und die y-Achse im Punkte $(0, a\sin t)$. Hieraus ergibt sich die bereits in Fig. 65, S. 274, angedeutete Konstruktion der Tangente. Vom Endpunkte B des zum Winkel t gehörenden Kreisradius OB fälle man die Lote auf die Achsen; die Fußpunkte geben dann unmittelbar die Schnittpunkte

1) Die Gleichungen (3) bleiben auch in dem durch die Annahme der Existenz (und also Endlichkeit) von y' zunächst ausgeschlossenen Falle in Kraft, daß die Tangente zur y-Achse parallel ist; in diesem Falle ist einfach $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

der Tangente mit den Achsen. Diese Konstruktion liefert noch den später zu benutzenden Satz, *daß die zwischen den Achsen gelegene Strecke der Tangente konstant und gleich dem Radius a des Kreises ist.*[1])

Um für die Konstruktion der Tangenten noch etwas bequemere Ansätze zu erhalten, wollen wir die in Fig. 66 durch $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ bezeichneten Strecken der Tangente und Normale zwischen dem Kurvenpunkte P und der x-Achse einführen und, sofern eine Zweideutigkeit nicht zu befürchten ist, kurz wieder „*Tangente*“ und „*Normale*“ der Kurve im Punkte P nennen. Die Projektionen $\overline{AQ}$ und $\overline{BQ}$ dieser Strecken auf die x-Achse nennen wir „*Subtangente*“ und „*Subnormale*“ der Kurve im Punkte P. Als abgekürzte Bezeichnungen dieser vier Strecken benutzen wir:

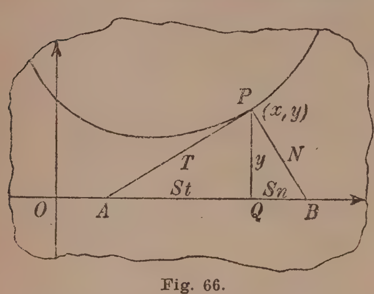


Fig. 66.

$$\overline{AP} = T, \qquad \overline{BP} = N, \qquad \overline{AQ} = St, \qquad \overline{BQ} = Sn.$$

Alle vier Strecken lassen sich leicht in den Koordinaten x, y des Kurvenpunktes P und dem zugehörigen Werte y' der Ableitung berechnen. Die Abszisse des Punktes B findet man, indem man in die Gleichung (2) der Normalen $\eta = 0$ einträgt und nach ξ auflöst. Da x die Abszisse von P und also auch die von Q ist, so ist einfach $Sn = \overline{BQ} = |\xi - x| = |yy'|$ die in jedem Falle für Sn gültige Gleichung. Von hieraus berechnet man N einfach auf Grund der Gleichung $N = +\sqrt{y^2 + Sn^2}$. Indem man entsprechend zur Berechnung von St und T verfährt, findet man als Ergebnis: *Die Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale der Kurve im Punkte P berechnen sich durch die Formeln:*

$$(8) \quad T = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|, \quad N = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right|, \quad St = \left|\frac{y}{y'}\right|, \quad Sn = |yy'|.$$

Die beiden ersten Formeln können wir auf Grund der Entwicklungen von S. 105 ff. noch etwas vereinfachen. Indem wir y' als eine stetige und abteilungsweise monotone Funktion von x voraussetzen, ist unsere Kurve „rektifizierbar“ und hat eine bestimmte *Bogenlänge s*, die wir damals als Funktion $s = F(x)$ von x näher erklärten, und von der wir die Ableitung s' nach x und das Differential ds in (2) und (3) S. 107 darstellten. Es ergab sich:

$$s' = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

1) Vgl. „A. G.“, § 47 (Schluß).

Die beiden ersten Gleichungen (8) lassen sich demnach auch so schreiben:

$$(9) \qquad T = \left|\frac{ys'}{y'}\right|, \qquad N = |ys'|.$$

Ein paar Beispiele mögen die *Konstruktion der Tangenten* mit Hilfe der vorstehenden Formeln erläutern.

1) Man bestätigt zunächst für die *Parabel* bei Gebrauch des üblichen Koordinatensystems leicht die Angaben:

$$y^2 - 2px = 0, \quad y' = \frac{p}{y},$$

$$St = \frac{y^2}{p} = 2x, \quad Sn = p,$$

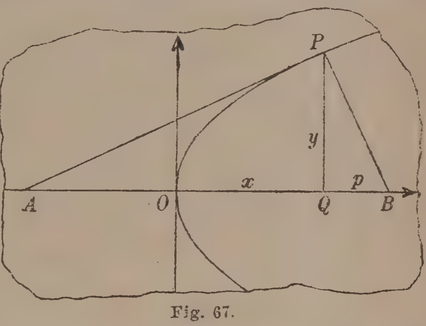


Fig. 67.

so daß die Subnormale konstant gleich dem „Halbparameter" p und die Subtangente doppelt so groß wie die Abszisse x des Berührungspunktes ist. Die hieraus folgende Tangentenkonstruktion ist in Fig. 67 ausgeführt; man trägt die Strecke $\overline{OQ} = x$ auf der negativen x-Achse von O aus ab, worauf der Endpunkt A der abgetragenen Strecke unmittelbar in der Geraden AP die Tangente liefert.

2) Für die *Ellipse* gelten die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y}, \qquad St = \left|\frac{y^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{x}\right| = \frac{a^2 - x^2}{|x|},$$

wobei für die Gewinnung des letzten Ausdrucks für St die Gleichung der Ellipse heranzuziehen ist. Nun ist aber $\sqrt{a^2 - x^2}$ die zur Abszisse $\overline{OQ} = x$ gehörende Ordinate des Halbkreises über der großen Achse $2a$ der Ellipse als Durchmesser (s. Fig. 68). Die Subtangente $St = \overline{AQ}$ konstruieren wir demnach entsprechend der Proportion:

$$|x| : \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2} : St$$

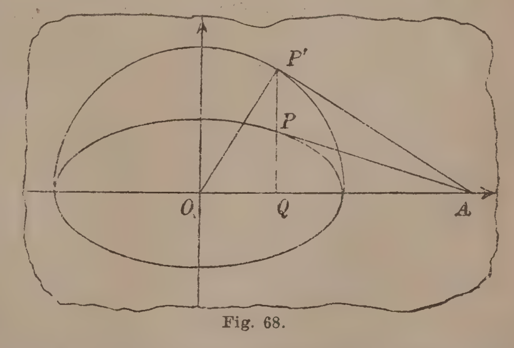


Fig. 68.

als vierte Proportionale, was in Fig. 68 in der Art ausgeführt ist, daß $P'A$ auf dem Kreisradius OP' im Endpunkte P' senkrecht errichtet ist.

3) Die Gleichung:

$$(10) \qquad y = a\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{oder} \quad y = \frac{a}{2}\left(e^{+\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

stellt die „*Kettenlinie*“ der Mechanik dar, die also für $a = 1$ unmittelbar mit der Cof-Kurve identisch ist. Mit Hilfe der Relation (8) S. 68 zwischen den hyperbolischen Funktionen zeigen wir leicht:

$$y' = \mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right), \quad s' = \sqrt{1 + y'^2} = \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right), \quad N = |ys'| = \frac{y^2}{a},$$

so daß sich jetzt die Normale N als vierte Proportionale aus $a : y = y : N$ konstruieren läßt; a hat zufolge (10) die geometrische Bedeutung der „Scheitelpunktsordinate“ $a = OS$ (s. Fig. 69). Zur Konstruktion der Normalen errichte man über der Ordinate $y = \overline{PQ}$ als Durchmesser nach rechts einen Halbkreis und trage von P aus die Strecke $a = \overline{PC}$ als Sehne ein. PC liefert unmittelbar die Normale: denn ein Blick auf Fig. 69 lehrt:

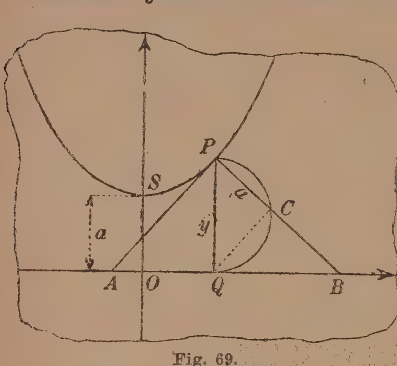


Fig. 69.

$$\overline{PC} : \overline{PQ} = \overline{PQ} : \overline{PB},$$

womit wir die vorhin aufgestellte Proportion wiedergewonnen haben.

4) Bei der „*gemeinen Zykloide*“ von den Gleichungen:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

berechnet man y' auf Grund der Regel (7), S. 154, und findet:

$$y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \qquad Sn = |y \cdot y'| = |a \cdot \sin t|.$$

Man zeichnet demnach, wie Fig. 70 andeutet, die Parallele zur x-Achse im Abstande a, schneidet von P aus mit dem Radius $\overline{PO'} = a$ auf dieser Geraden den Punkt O' aus und hat in O' den Mittelpunkt des rollenden Kreises in der zu P gehörenden Lage. Ist B der Berührungspunkt und C der höchste Punkt dieses Kreises, so ist (s. Fig. 70) einfach BP die Normale und CPA die Tangente, *so daß die Normale durch den augenblicklichen Berührungspunkt des rollenden Kreises hindurchläuft.* Aus der Figur geht nämlich $\overline{BQ} = |a \cdot \sin t| = Sn$ und $CP \perp BP$ unmittelbar hervor.

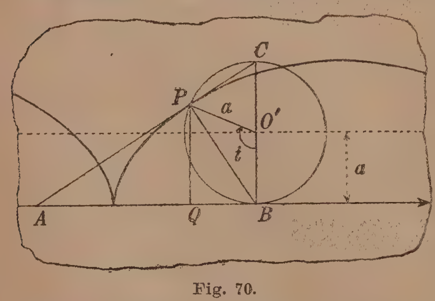


Fig. 70.

Aufgaben: 1) Man führe die Tangentenkonstruktion für den einzelnen Punkt der „Exponentialkurve“ der Gleichung $y = e^x$ aus. — Es ist zu benutzen, daß die Subtangente St konstant gleich 1 ist.

2) Es ist die Tangentenkonstruktion für den einzelnen Punkt P der durch $xy=a$ dargestellten gleichseitigen Hyperbel durchzuführen. — Die Konstruktion gründet sich auf die Tatsache, daß die Subtangente des Punktes (x, y) der Kurve durch $St = |x|$ gegeben ist.

3) Für die Epizykloide des Gleichungenpaares:

$$x = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right), \qquad y = (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right)$$

stelle man die Gleichung der Normale für den zum Winkel t gehörenden Punkt P auf und entnehme daraus eine Regel zur Konstruktion der Normale und der Tangente. — Als Normalengleichung ergibt sich:

$$\xi\cos\left(\frac{a+2b}{2b}\right)t + \eta\sin\left(\frac{a+2b}{2b}t\right) = a\cos\left(\frac{a}{2b}t\right).$$

Die Normale läuft durch den Punkt $(a\cos t,\ a\sin t)$, d. h. durch den Berührungspunkt B der augenblicklichen Lage des rollenden Kreises hindurch. Die Tangente läuft demnach durch den zu B diametralen Punkt der Peripherie jenes Kreises.

4) Man führe die gleiche Untersuchung für die Hypozykloide der Gleichungen:

$$x = (a-b)\cos t + b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right), \qquad y = (a-b)\sin t - b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)$$

aus. — Als Gleichung der Normalen wird sich ergeben:

$$\xi\cos\left(\frac{a-2b}{2b}\right)t - \eta\sin\left(\frac{a-2b}{2b}t\right) = a\cos\left(\frac{a}{2b}t\right).$$

Die Folgerungen sind die entsprechenden.

3. Untersuchung der Tangenten der ebenen Kurven bei Polarkoordinaten. Es sei in Polarkoordinaten r, ϑ eine Kurve durch die Gleichung $r = f(\vartheta)$ gegeben, in der wir etwa ϑ als unabhängig variabel denken. Wir betrachten ein Stück der Kurve, längs dessen r als eine eindeutige, stetige und differenzierbare Funktion von ϑ vorausgesetzt wird, und bezeichnen die Ableitung von r nach ϑ durch r'. Es soll zunächst untersucht werden, ob wir dieser Ableitung r' ähnlich wie bei rechtwinkligen Koordinaten eine einfache geometrische Bedeutung beilegen können.

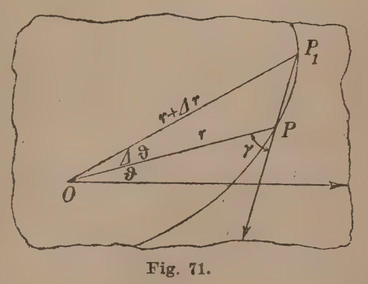


Fig. 71.

Zu diesem Zwecke wählen wir zwei nahe beieinander gelegene Punkte P und P_1 auf der Kurve. P habe die Koordinaten r, ϑ, und P_1 habe eine um den *positiven* Wert $\Delta\vartheta$ größere Amplitude $(\vartheta + \Delta\vartheta)$, während die zugehörige „Differenz" $\Delta r = f(\vartheta + \Delta\vartheta) - f(\vartheta)$ der Funktion $r = f(\vartheta)$ positiv, negativ oder gleich 0 sein kann. In Fig. 71 ist die Sehne P_1P der Kurve gezogen und über P hinaus, d. h. in der Richtung abnehmender Werte ϑ verlängert.

Diese Verlängerung bilde mit dem Radiusvektor $r = \overline{OP}$ den Winkel γ. Der Sinussatz, angewandt auf das Dreieck OPP_1, liefert dann:

$$(r + \Delta r) : r = \sin\gamma : \sin(\gamma - \Delta\vartheta),$$

woraus wir die Folgerung ziehen:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\sin\gamma - \sin(\gamma - \Delta\vartheta)}{\sin(\gamma - \Delta\vartheta)} = \frac{2\cos\left(\gamma - \frac{\Delta\vartheta}{2}\right)\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\sin(\gamma - \Delta\vartheta)}.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $\Delta\vartheta$, so ergibt sich weiter:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\Delta r}{\Delta\vartheta} = \frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}}\cdot\frac{\cos\left(\gamma - \frac{\Delta\vartheta}{2}\right)}{\sin(\gamma - \Delta\vartheta)}.$$

Vollziehen wir jetzt den Grenzübergang $\lim \Delta\vartheta = 0$, so geht (da wir die Existenz der Ableitung von r nach ϑ voraussetzten) die über P hinaus verlängerte Sehne P_1P in die Tangente der Kurve im Punkte P über, und die Grenze von γ ist *der Winkel β, den die nach Seiten abnehmender Werte ϑ gerichtete Tangente mit dem Radiusvektor des Berührungspunktes P bildet.* Dabei liefert die letzte Gleichung die grundlegende Beziehung:

(1) $$\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r'}{r} = \operatorname{cotg}\beta.$$

Um nun die gesuchte Deutung von r' und einige weitere wichtige Formeln hieraus abzuleiten, zeichnen wir auch noch die Normale der Kurve im Punkte P und legen außerdem durch den Pol O senkrecht zum Radiusvektor OP eine Gerade, die die Tangente in A und die Normale im B schneidet (s. Fig. 72). Die hierdurch auf der Tangente und Normale abgeschnittenen Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ nennen wir „*Polartangente*“ und „*Polarnormale*“ der Kurve im Punkte P, und im Anschluß daran sollen $\overline{AO}$ und $\overline{BO}$ „*Polarsubtangente*“ und „*Polarsubnormale*“ heißen. Als abkürzende Symbole gebrauchen wir zur Unterscheidung der bei rechtwinkligen Koordinaten benutzten Bezeichnungen T, N, St, Sn:

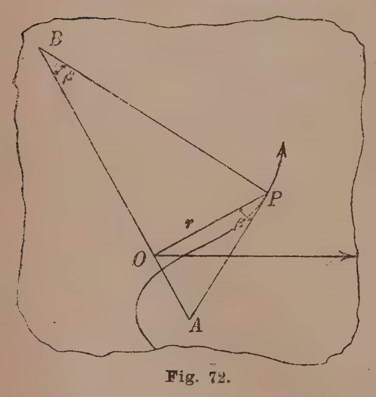


Fig. 72.

(2) $$\overline{AP} = \mathbf{T}, \quad \overline{BP} = \mathbf{N}, \quad \overline{AO} = \mathbf{St}, \quad \overline{BO} = \mathbf{Sn}.$$

Darstellungen von **St** und **Sn** lesen wir auf Grund der Relation (1) unmittelbar aus Fig. 72 ab; die Berechnung von **T** und **N** ist dann elemen-

tar: *Die Polartangente, Polarnormale usw. im Punkte P unserer durch* $r = f(\vartheta)$ *gegebenen Kurve stellen sich so dar:*

$$(3) \qquad \mathbf{T} = \frac{r}{|r'|}\sqrt{r^2 + r'^2}, \quad \mathbf{N} = \sqrt{r^2 + r'^2}, \quad \mathbf{St} = \frac{r^2}{|r'|}, \quad \mathbf{Sn} = |r'|.$$

Die Formeln sind gleich so geschrieben, daß sie auch für $\beta > \frac{\pi}{2}$ und also $r' < 0$ mitgelten; man wolle sich die dann vorliegenden geometrischen Verhältnisse an Fig. 73 deutlich machen. *In jedem Falle ist also der absolute Wert* $|r'|$ *der Ableitung* $r' = f'(\vartheta)$ *geometrisch durch die zum Punkte P gehörende Polarsubnormale dargestellt.*

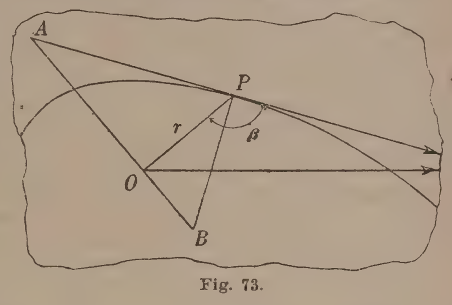


Fig. 73.

Die Formeln für **T** und **N** lassen sich durch Heranziehung des *Bogendifferentials* noch etwas einfacher gestalten. Wir nehmen die Kurve als „rektifizierbar“ an und messen die Bogenlänge s in der Art ab, daß die Maßzahl s bei wachsendem Werte ϑ längs unseres betrachteten Kurvenstückes gleichfalls wächst. Die Länge des Bogens $\widehat{PP_1}$ bezeichnen wir, der Differenz $\Delta\vartheta$ entsprechend, durch Δs. Dann gilt jedenfalls zufolge S. 106 für den Quotienten des Bogens Δs und der zugehörigen Sehne $\overline{PP_1}$:

$$(4) \qquad \lim_{\Delta\vartheta = 0}\left(\frac{\overline{PP_1}}{\Delta s}\right) = 1.$$

Aus dem Sinussatze folgt $\overline{PP_1} : r = \sin\Delta\vartheta : \sin(\gamma - \Delta\vartheta)$, und also ist:

$$\frac{\overline{PP_1}}{\Delta s}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta\vartheta} = \frac{\sin\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta}\cdot\frac{1}{\sin(\gamma - \Delta\vartheta)}.$$

Für $\lim \Delta\vartheta = 0$ ergibt sich, falls die Ableitung von s in bezug auf ϑ kurz s' genannt wird, mit Rücksicht auf (4) und (1):

$$(5) \qquad \frac{s'}{r} = \frac{1}{\sin\beta} = +\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\beta} = \frac{+\sqrt{r^2 + r'^2}}{r}.$$

Für das Bogendifferential ds erhält man hieraus unter der Voraussetzung der Zunahme von s bei wachsendem ϑ *die Darstellung in Polarkoordinaten:*

$$(6) \qquad ds = +\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\vartheta = +\sqrt{f(\vartheta)^2 + f'(\vartheta)^2}\,d\vartheta.$$

Die Formeln für **T** und **N** aber nehmen die Gestalt an:

$$(7) \qquad \mathbf{T} = \frac{rs'}{|r'|}, \qquad \mathbf{N} = s'.$$

Die Benutzung der entwickelten allgemeinen Formeln soll zunächst an zwei Beispielen erläutert werden.

1) Für die logarithmische Spirale der Gleichung (9) S. 273 gilt:

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{r'}{r} = a, \qquad \beta = \operatorname{arc\,cotg} a.$$

Demnach ist bei der logarithmischen Spirale *der Winkel* β *konstant gleich* arc cotg a; wir können auch sagen: *Alle vom Pole ausziehenden Strahlen kreuzen die logarithmische Spirale unter gleichem Winkel oder „isogonal“, nämlich unter dem Winkel* arc cotg a (s. Fig. 63, S. 273).

2) Die in Aufgabe 1) S. 274 für den Fall $b = a$ betrachteten Epizykloiden, die auch „Pascalsche Kurven“ heißen, bekommen eine besonders einfache Polargleichung, wenn man den Punkt $(c, 0)$ zum Pole und die positive Richtung der x-Achse zur Polarachse wählt. Dann ist in (10) S. 274:

$$x - c = r \cos \vartheta, \qquad y = r \sin \vartheta$$

einzutragen, was nach Fortheben des Faktors r^2 ergibt:

$$(r + 2c \cos \vartheta)^2 = 4a^2, \qquad r = \pm 2a - 2c \cos \vartheta.$$

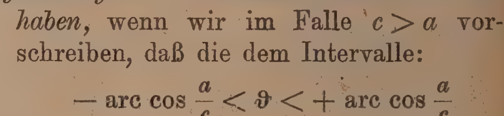
Für $c \leqq a$ ist das untere Zeichen nicht brauchbar, da dann für keinen Wert ϑ ein positives r gewonnen wird; in diesem Falle ist also:

$$(8) \qquad r = 2a - 2c \cos \vartheta$$

die Polargleichung, die für jedes ϑ *ein* $r \geqq 0$ liefert. Für $c > a$ ist, falls ϑ dem Intervall:

$$\pi - \operatorname{arc\,cos} \frac{a}{c} < \vartheta < \pi + \operatorname{arc\,cos} \frac{a}{c}$$

angehört, auch die Gleichung $r = -2a - 2c \cos \vartheta$ heranzuziehen, da sie alsdann $r > 0$ liefert. Für den um π kleineren Winkel $\vartheta' = \vartheta - \pi$ liefert die Gleichung (8) den entgegengesetzten und also negativen Wert $r' = -r$. Wir können also auch hier mit der Gleichung (8) auskommen, *so daß wir in* (8) *allgemein die Polargleichung der Pascalschen Kurven vor uns haben*, wenn wir im Falle $c > a$ vorschreiben, daß die dem Intervalle:



$$-\operatorname{arc\,cos} \frac{a}{c} < \vartheta < +\operatorname{arc\,cos} \frac{a}{c}$$

entsprechenden negativen r, absolut genommen, auf den Rückwärtsverlängerungen der beweglichen Schenkel der Winkel ϑ abzutragen sind.

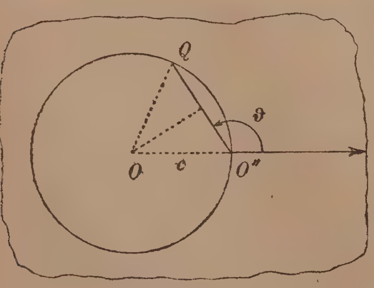


Fig. 74.

Der Gleichung (8) können wir eine höchst einfache geometrische Bedeutung

unterlegen. Um den Mittelpunkt O des festen Kreises (der Epizykloidenerzeugung) legen wir einen Kreis K des Radius c, der also durch den Pol O'' unseres Polarkoordinatensystems hindurchläuft. Wie ein Blick auf Fig. 74 lehrt, ist die Polargleichung dieses Kreises, wenn wir für die Radienvektoren die Bezeichnung $\overline{O''Q} = r_1$ benutzen, durch $r_1 = -2c\cos\vartheta$ gegeben; dabei können wir die für $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2}$ eintretenden negativen Werte r_1 wieder in der Art deuten, daß wir die Beträge $|r_1|$ auf den Rückwärtsverlängerungen der Winkelschenkel abtragen. Die aus (8) folgende Gleichung $r = r_1 + 2a$ zeigt nun, *daß wir zur Pascalschen Kurve gelangen, indem wir den Radiusvektor $\overline{O''Q} = r_1$ des Kreises in der „ursprünglichen Schenkelrichtung" um den Betrag $2a$ verlängern.*

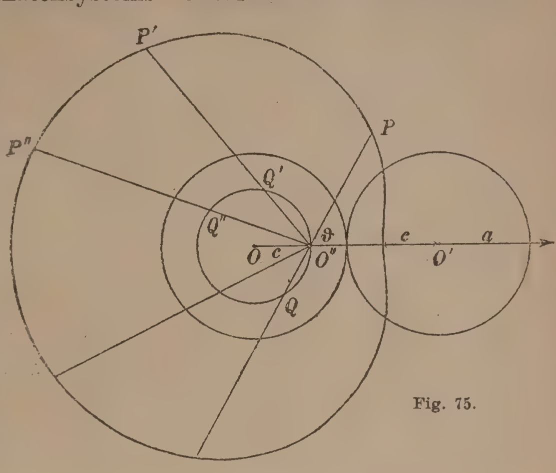


Fig. 75.

Wir erläutern dies zunächst im Falle $c < a$ durch Fig. 75. Hier ist jede der Strecken $\overline{PQ}$, $\overline{P'Q'}$, $\overline{P''Q''}$, ... gleich $2a$; im ersten Falle, wo $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ und also $r_1 = -2c\cos\vartheta < 0$ ist, ist der Vorschrift entsprechend die „Verlängerung" des Radiusvektor $\overline{O''Q}$ um $2a$ in der Richtung von Q nach O'' hin zu vollziehen. Man kann demnach die Vorschrift auch in der Art geben, *daß vom einzelnen Peripheriepunkte Q des Kreises K auf der Geraden $O''Q$ nach beiden Seiten hin Strecken $\overline{PQ} = 2a$ abzutragen*

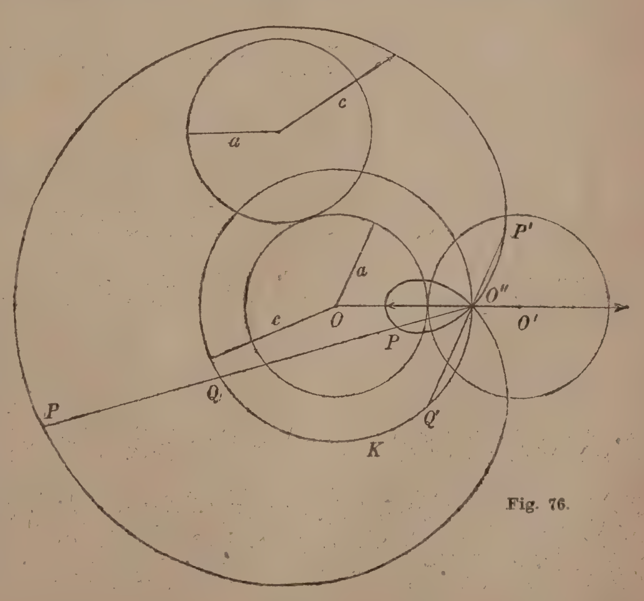


Fig. 76.

sind, um als geometrischen Ort der Streckenendpunkte P die Pascalsche Kurve zu gewinnen. Im Falle $c > a$ ist die Gestalt der Pascalschen Kurve durch Fig. 76 (S. 285) erläutert; die eben beschriebene Herstellungsart derselben mittelst des Kreises K vom Radius c um O bleibt unverändert bestehen.

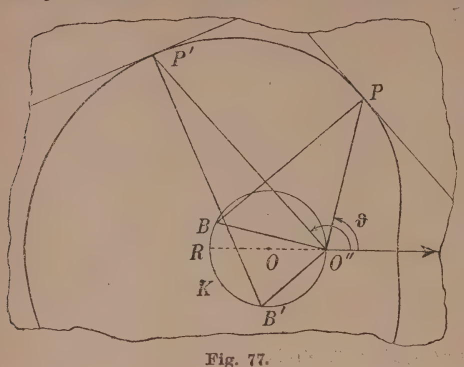


Fig. 77.

Um nun die *Tangentenkonstruktion der Pascalschen Kurven* zu gewinnen, leite man aus (8) und der vierten Formel (3) die Darstellung $\mathbf{Sn} = |2c \sin \vartheta|$ ab. Indem man also die zum Radiusvektor $O''P$ senkrechte Sehne $O''B$ des Kreises K konstruiert, gewinnt man in BP die Normale und senkrecht zu ihr im Punkte P die Tangente; denn es ist z. B. in Fig. 77:

$$\overline{O''B} = \overline{O''R} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = 2c \sin \vartheta.$$

Der Leser wolle sich auch im Falle $c > a$ die figürlich etwas komplizierteren Verhältnisse im einzelnen veranschaulichen.

Aufgaben: 1) Man führe die Tangentenkonstruktion bei der Archimedischen Spirale der Gleichung $r = a\vartheta$ durch. — Die Entwicklung ist auf den Umstand zu gründen, daß $\mathbf{Sn} = a$, also konstant gleich dem zum Winkel $\vartheta = 1$ gehörigen Radiusvektor der Spirale ist (s. Fig. 60, S. 271). Der bei der Normalenkonstruktion (s. Fig. 72, S. 282) mit B bezeichnete Punkt liegt also stets auf dem Kreise des Radius a um O.

2) Man konstruiere die Tangente für die hyperbolische Spirale der Gleichung $r = \frac{a}{\vartheta}$. — Hier zeigt sich, daß $\mathbf{St} = a$ konstant ist, woraus eine ähnliche Regel wie in 1) hervorgeht.

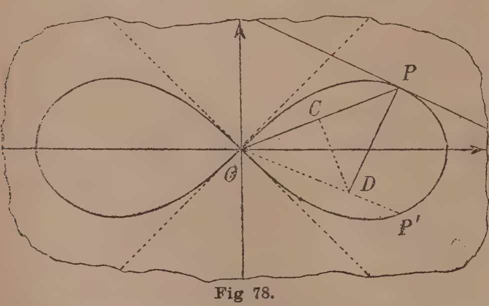


Fig 78.

3) Die als „*Lemniskate*" bezeichnete Kurve vierten Grades hat die Gleichung:

$$(9) \qquad (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

und besitzt die in Fig. 78 gezeichnete schleifenförmige Gestalt, welche man am einfachsten von der Polargleichung:

$$(10) \qquad r = a\sqrt{\cos 2\vartheta}$$

aus versteht. Man suche im Anschluß an die letzte Gleichung eine Tangentenkonstruktion. — Wegen der Symmetrie der Kurve ist es ausreichend, die Untersuchung für eine im Intervalle $0 < \vartheta < \frac{\pi}{4}$ gelegene Amplitude durchzuführen. Hier haben wir aus den auf Grund von (10) und (1) zu gewinnenden Gleichungen:

$$r' = -\frac{a \sin 2\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}, \qquad -\operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{cotg} \beta = \frac{r'}{r} = -\operatorname{tg} 2\vartheta$$

den Schluß zu ziehen, daß $\beta - \frac{\pi}{2} = 2\vartheta$ ist, d. h. daß der zwischen der Normalen des Kurvenpunktes P und dem Radiusvektor OP gelegene Winkel gleich 2ϑ ist. Zur Gewinnung der Normalen und damit der Tangente bringe man demnach den zu OP bezüglich der x-Achse symmetrischen Radiusvektor OP' (s. Fig. 78) im Punkte D zum Durchschnitt mit dem Mittellote CD von OP; dann ist DP unmittelbar die Normale der Lemniskate im Punkte P.

4. Konkavität, Konvexität und Wendepunkte der Kurven. Indem wir zu rechtwinkligen Koordinaten zurückkehren, betrachten wir ein Stück einer Kurve, längs dessen neben y selbst auch die erste Ableitung y' eindeutig, stetig und abteilungsweise monoton sei.[1]) In der Gleichung $y' = \operatorname{tg} \alpha$ bedeutet α den Winkel, welchen die nach rechts gerichtete Kurventangente mit der positiven x-Achse bildet, wobei die Maßzahl α positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem die Tangentenrichtung diejenige zunehmender oder abnehmender Ordinaten ist. Unserer Annahme zufolge wird demnach mit y' auch $\alpha = \operatorname{arc\,tg} y'$ eine stetige und abteilungsweise monotone Funktion von x sein. Nimmt aber α bei wachsendem x zu, so heißt das zufolge Fig. 79, daß die *„gehöhlte"* oder *„konkave"* Seite der Kurve nach Seiten der wachsenden Ordinaten oder, wie wir kurz sagen wollen[2]), *„nach oben"* gerichtet ist, während die *„erhabene"* oder *„konvexe"* Seite der Kurve *„nach unten"* weist.

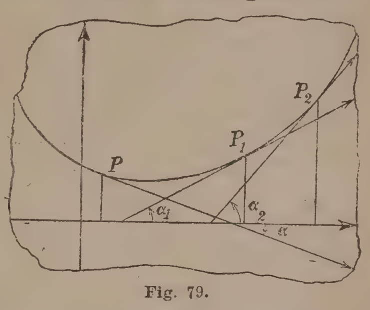


Fig. 79.

Wir setzen jetzt auch y' als differenzierbar voraus und nehmen an, daß die zweite Ableitung $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ in dem betrachteten Intervalle eindeutig und stetig sei. Das Vorzeichen des Wertes y'' gestattet dann nach S. 130 einen Rückschluß darauf, ob y' und also α mit wachsendem x wächst oder abnimmt. Wir wollen das Ergebnis für die Umgebung einer einzelnen Stelle P oder (x, y) der Kurve aussprechen, an der wir y'' als von 0 verschieden voraussetzen. Ist y'' an dieser Stelle (x, y) positiv (negativ), so können wir zufolge der Stetigkeit von y'' die Umgebung so klein wählen, daß in derselben y'' beständig positiv (negativ) bleibt und also y' sich als monoton erweist. Es folgt daraus der Satz: *Sind für das untersuchte Stück der Kurve die beiden ersten Ableitungen y' und y'' ein-*

1) Die Umgebung eines solchen Punktes der Kurve, in dem die Tangente der y-Achse parallel und also $y' = \operatorname{tg} \alpha = \infty$ ist, würde sich demnach der weiteren Betrachtung des Textes entziehen, auch wenn der reziproke Wert von y' daselbst stetig ist. Doch genügt es, in diesem Falle die Koordinatentransformation $x = -y_1$, $y = x_1$ auszuführen und x_1 als unabhängige Variable anzusehen, um den fraglichen Teil der Kurve zugänglich zu machen.

2) Vgl. die zweite Note S. 27.

deutig und stetig, und hat y'' an der einzelnen Stelle (x, y) einen von 0 verschiedenen Wert, so weist die konkave Seite der Kurve in der Umgebung dieser Stelle nach oben oder nach unten, je nachdem an der Stelle (x, y) der Wert $y'' > 0$ oder < 0 ist.

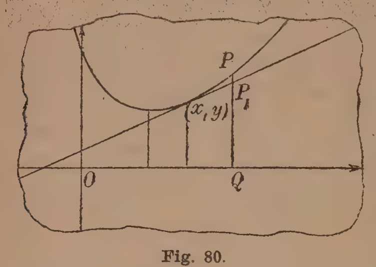


Fig. 80.

Eine Bestätigung dieses Ergebnisses entnehmen wir aus den Regeln über die Berechnung der Extremwerte der Funktionen durch folgende Überlegung: Die Kurve ist in der Umgebung der Stelle (x, y) nach oben (unten) konkav, falls daselbst die Kurvenordinaten, abgesehen von dem zum Argumente x gehörenden y selbst, größer (kleiner) als die Tangentenordinaten sind (s. Fig. 80). Wir denken die Kurvengleichung in der Gestalt $y = f(x)$ gegeben. Für eine der Umgebung der Stelle (x, y) angehörende Abszisse ξ ist also $\eta = f(\xi)$ die Kurvenordinate, während sich für dieses ξ die Tangentenordinate η_1 nach (1) S. 276 so darstellt:

$$\eta_1 = y + y'(\xi - x) = f(x) + f'(x)(\xi - x).$$

Die Differenz der Ordinaten η und η_1, aufgefaßt als Funktion von ξ:

$$\eta - \eta_1 = \varphi(\xi) = f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x),$$

hat nun im Falle der Konkavität nach oben (unten) an der Stelle $\xi = x$ den Minimalwert (Maximalwert) $\varphi(x) = 0$. Dies ist mit den Kriterien von S. 234 in Übereinstimmung; denn $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - f'(x)$ verschwindet für $\xi = x$, und $\varphi''(\xi) = f''(\xi)$ ist an der Stelle (x, y) nach jenen Kriterien positiv (negativ).

An die vorstehende Betrachtung schließt sich folgende Erklärung an: *Ist die Kurve auf der einen Seite ihres Punktes P nach oben konkav, auf der anderen Seite aber nach unten, so heißt P ein „Wendepunkt“ der Kurve.* Die Werte der zweiten Ableitung $y'' = f''(x)$ müssen also im Augenblick der Durchlaufung des Punktes P einen Zeichenwechsel erfahren. *So lange die zweite Ableitung stetig ist, kann also ein Wendepunkt der Kurve nur für solche Werte x eintreten, für welche:*

$$(1) \qquad y'' = f''(x) = 0$$

gilt. Doch hat man natürlich genauer zu prüfen, ob für die einzelne Lösung x dieser Gleichung auch wirklich ein „Durchgang“ durch 0 für die Werte y'' eintritt.

In Fig. 81 wolle man sich veranschaulichen, wie sich die Tangentenrichtung ändert, falls man den Berührungspunkt über die Kurve hinführt und hierbei einen Wendepunkt P durchschreitet. In diesem Augenblicke

tritt eine Umkehr oder „*Wendung*" der Drehungsrichtung der Tangente ein. Die Tangente im Wendepunkte heißt demnach auch eine „*Wendetangente*" der Kurve, und von diesem Verhalten der Tangente rührt der Name des fraglichen Kurvenpunktes her. Eine von der Tangente nur wenig abweichende Sekante durch P schneidet die Kurve nahe bei P noch in zwei weiteren Punkten P_1 und P_2 (s. Fig. 81); diese Schnittpunkte wandern, wenn wir die Sekante um den Punkt P bis zur Tangente hindrehen, von rechts und links her bis zum Punkte P heran. Man sagt, um dies zu kennzeichnen, *die Wendetangente schneide an ihrer Berührungsstelle die Kurve in „drei" zusammenfallenden Punkten.*

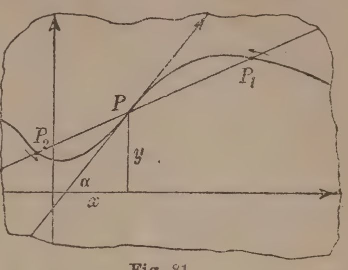


Fig. 81.

Hatten wir bei Aufsuchung der Extremwerte einer Funktion $f(x)$ (s. S. 233 ff.) eine Lösung $x = a$ der Gleichung $f'(x) = 0$ gefunden, für welche auch noch $f''(a) = 0$ ist, während $f'''(a) \neq 0$ gilt, so war $f(a)$ kein Extremwert. Dieses Ergebnis wird jetzt geometrisch in der Art verständlich, *daß die Kurve der Funktion $f(x)$ an der fraglichen Stelle eine zur x-Achse parallele Wendetangente besitzt* (s. Fig. 82).

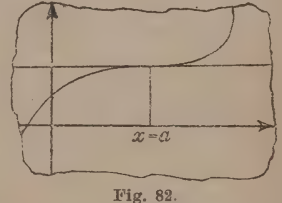


Fig. 82.

Einfache Beispiele für das Auftreten von Wendepunkten liefern die Sinuskurve, welche in jedem Schnittpunkte mit der x-Achse einen Wendepunkt hat, die der Gleichung $xy - \ln x = 0$ entsprechende Kurve, welche für $x = e$ einen höchsten Punkt und für $x = \sqrt{e^3}$ einen Wendepunkt hat, die einer ganzen Funktion dritten Grades:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

entsprechende Kurve, welche bei $x = -\frac{b}{3a}$ einen Wendepunkt hat, usw.

Etwas ausführlicher betrachten wir den Verlauf der Kurve dritten Grades, die einer rationalen Funktion zweiten Grades:

$$y = \frac{a_0 x^2 + a_1 x + a_2}{x^2 + 2b_1 x + c_1}$$

entspricht. Die Gleichung der Kurve können wir zunächst durch Koordinatentransformation noch etwas vereinfachen. Führen wir die durch $y_1 = y - a_0$, $x_1 = x$ gegebene Parallelverschiebung der Achsen in Richtung der y-Achse aus, so gewinnt man in y_1 eine Funktion mit linearem Zähler.[1]) Die Funktion y_1 hat demnach *einen* endlichen Nullpunkt. Wir

1) Der besondere Fall, daß der Zähler sogar konstant ausfällt, sei ausgeschlossen.

können dann zweitens eine Translation in Richtung der x-Achse vornehmen, so daß der neue Anfangspunkt der Koordinaten in den Nullpunkt von y_1 fällt. Im neuen Koordinatensysteme haben wir also nunmehr für unsere Kurve eine Gleichung der Gestalt:

$$(2) \qquad y = \frac{ax}{x^2 + 2bx + c}.$$

Wir wollen nun annehmen, daß $c > b^2$ sei; dann hat die im Nenner stehende ganze Funktion $g(x) = x^2 + 2bx + c$ keinen Nullpunkt und ist für jedes x positiv. Unsere Funktion $y = f(x)$ ist also in jedem endlichen Intervalle endlich, eindeutig und stetig, und es gilt für jedes von 0 verschiedene Argument $\operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(ax)$, also, wenn wir etwa $a > 0$ annehmen, $\operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(x)$. Da offenbar:

$$f(0) = 0, \qquad \lim_{x=+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x=-\infty} f(x) = 0$$

zutrifft, so hat $f(x)$ für $x > 0$ mindestens ein Maximum, für $x < 0$ mindestens ein Minimum, und die Kurve nähert sich der positiven x-Achse von oben, der negativen x-Achse von unten asymptotisch (s. die in Fig. 83 für $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$ gezeichnete Kurve).

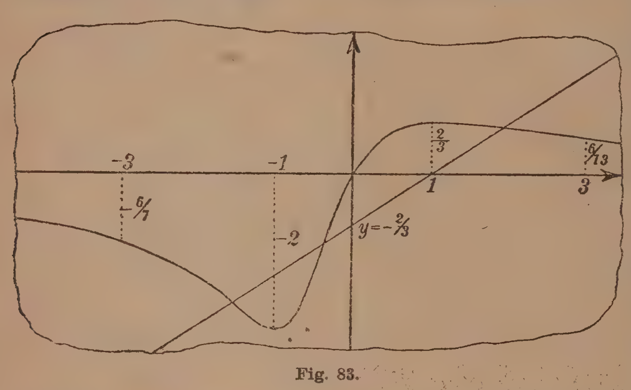


Fig. 83.

Benutzen wir die eben eingeführten Symbole $f(x)$ und $g(x)$, so gilt:

$$(3) \qquad f \cdot g = ax, \qquad f' \cdot g^2 = -a(x^2 - c),$$

wobei der Kürze halber die Argumente bei $f(x)$ und $g(x)$ fortgelassen sind. Die erste Ableitung verschwindet demnach nur für $x = \pm\sqrt{c}$, so daß wir nur das eine Maximum $f(\sqrt{c})$ und das eine Minimum $f(-\sqrt{c})$ gewinnen (s. Fig. 83). In der Nähe des Minimums ist die Kurve nach oben konkav, in der Nähe des Maximums nach unten (s. Fig. 83). *Es treten also mindestens drei Wendepunkte auf*, die nun näher zu untersuchen sind.

Differenzieren wir die zweite Gleichung (3) nochmals nach x, so folgt:

$$f'' \cdot g^2 + 2f'gg' = -2ax,$$

so daß die Forderung $f'' = 0$ auf $f' \cdot g \cdot g' + ax = 0$ oder nach Multiplikation mit g und Benutzung der zweiten Gleichung (3) auf:

$$f'g^2g' + axg = -a(x^2 - c)g' + axg = 0$$

führt. Teilen wir durch $-a$ und setzen für g' und g die betreffenden Ausdrücke ein, so folgt:

$$x^3 - 3cx - 2bc = 0 \tag{4}$$

als kubische Gleichung für die Abszissen der Wendepunkte; *es existieren also auch nicht mehr als drei Wendepunkte.*

Zur Konstruktion der Wendepunkte setzen wir die Gleichung (4) in die Gestalt:

$$x^3 + 2bx^2 + cx = 2b(x^2 + 2bx + c) + 4(c - b^2)x,$$

oder, bei Gebrauch der Abkürzung $g = g(x)$:

$$xg = 2bg + 4(c - b^2)x.$$

Multiplizieren wir nun mit $y = f(x)$ und setzen zufolge (3) das Produkt $yg = ax$, so folgt:

$$ax^2 = 2abx + 4(c - b^2)xy.$$

Nach Fortheben des Faktors x ergibt sich: *Die drei Wendepunkte der zur rationalen Funktion* (2) *gehörenden Kurve werden durch die Gerade der Gleichung:*

$$ax - 4(c - b^2)y = 2ab$$

auf der Kurve ausgeschnitten. Bei gegebenen a, b, c kann man diese Gerade leicht aus ihren Achsenschnitten konstruieren (vgl. Fig. 83).

Ist eine Kurve durch ein Gleichungspaar der Gestalt (1) S. 266 gegeben, so berechnet man y' und y'' auf Grund der S. 154 angegebenen Regel:

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad y'' = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}. \tag{5}$$

Zur Gewinnung der Wendepunkte hat man also die Gleichung zu lösen:

$$\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t) = 0. \tag{6}$$

Wie Fig. 77, S. 286, zeigt, finden sich z. B. bei gewissen Pascalschen Kurven der Gleichungen:

$$x = 2a\cos t - c\cos 2t, \qquad y = 2a\sin t - c\sin 2t$$

Wendepunkte. Die Gleichung (6) läßt sich hier auf die Gestalt bringen:

$$\cos t = \frac{a^2 + 2c^2}{3ac}.$$

Damit der rechts stehende Wert < 1 ist, muß c dem Intervalle $\frac{a}{2} < c < a$ angehören, *so daß nur unter dieser Voraussetzung Wendepunkte auftreten, und zwar zwei zur x-Achse symmetrisch gelegene.* An der einen Schranke $c = a$ vereinigen sich die beiden Wendepunkte zur Spitze die Kardioide (Fig. 64, S. 274). An der anderen Schranke $a = 2c$ kommen die beiden

Wendepunkte auf der x-Achse zum Zusammenfall und liefern einen Kurvenpunkt mit einer zur y-Achse parallelen Tangente, welche *vier zusammenfallende Punkte* mit der Kurve gemein hat. Die Gleichung (10) S. 274 unserer Kurve nimmt nämlich, wenn wir $a = 2c$ eintragen, nach kurzer Zwischenrechnung die Gestalt an:

$$y^4 + 2y^2(x^2 - 9c^2) + (x - c)^2(x - 3c)(x + 5c) = 0;$$

diese in y biquadratische Gleichung liefert aber für $x = 3c$ die vier gleichen Wurzeln $y = 0$.

Aufgaben: 1. Man skizziere die Kurve der Funktion $y = x^2 \cdot e^x$ und untersuche die Konkavität usw. derselben. — Wendepunkte liegen bei $x = -2 \pm \sqrt{2}$.

2) Man untersuche die Konkavität usw. für die Kurve der Gleichung $x^3 y - \ln x + \frac{5}{12} = 0$. — Bei $x = e$ tritt ein Wendepunkt auf.

3) Man führe die gleiche Untersuchung bei der durch $x^2 y - xy - x - 2y = 0$ gegebenen Kurve durch. — Die Kurve hat zwei zur y-Achse parallele Asymptoten bei $x = -1$ und $x = 2$. Der zwischen den Asymptoten verlaufende Zweig hat einen Wendepunkt bei $x = 0{,}327 \cdots$.

4) Man bestimme die Wendepunkte der verkürzten Zykloide (2) S. 268.

5. Die Krümmung der ebenen Kurven. Die Kurvengleichung sei in der Gestalt $y = f(x)$ gegeben; die beiden Werte x und $x_1 > x$ mögen ein Intervall eingrenzen, in dem die Funktion $f(x)$ mit ihren beiden ersten Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ eindeutig und stetig sei. Es möge ferner die zweite Ableitung $f''(x)$ im Intervalle keinen Zeichenwechsel erfahren, also daselbst entweder nirgends negativ oder nirgends positiv sein; die erste Ableitung $f'(x)$ und damit der Winkel α werden also, soweit sie sich im Intervall ändern, monotones Verhalten zeigen. Zu x und $x_1 = x + \Delta x$ gehören die Kurvenpunkte (x, y) und $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, die wir auch kurz P und P_1 nennen. Das von beiden Punkten eingeschlossene Stück der Kurve habe die positive Bogenlänge Δs (s. überall Fig. 84).

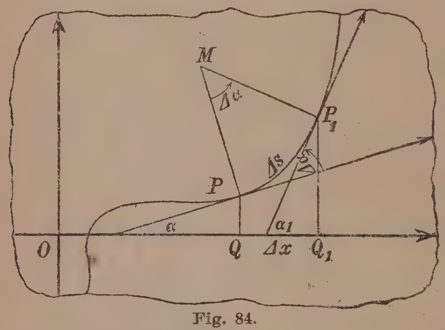


Fig. 84.

Um nun Genaueres über die „*Krümmung*“ der Kurve in dem betrachteten Intervalle festzustellen, zeichnen wir die Kurventangenten in den Punkten P und P_1 und messen die zugehörigen Winkel α und α_1 gegen die positive x-Achse ab. Die dem Bogenstück Δs (und also der „Differenz“ Δx) entsprechende Änderung der Tangentenrichtung $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha$ wird, absolut genommen, im Vergleich zu Δs um so größer sein, je stärker die Krümmung der Kurve ist. Wir können geradezu den Quotienten $|\Delta\alpha| : \Delta s$ als ein Maß für die Krümmung der Kurve zwischen den beiden

Punkten P und P_1 benutzen. Wir wollen übrigens $\Delta\alpha$ mit seinem Vorzeichen beibehalten und *erklären als „mittlere Krümmung" $\varkappa$ der Kurve längs des von P und P_1 eingegrenzten Bogenstücks den Quotienten:*

(1) $$\varkappa = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Betreffs des Vorzeichens zeigt Fig. 84 einfach, daß $\varkappa > 0 (< 0)$ gilt, falls die Kurve nach oben (unten) konkav ist.[1])

In Fig. 84 ist $\Delta\alpha$ als Winkel zwischen den beiden Tangenten gezeichnet. Man kann $\Delta\alpha$ aber auch als Winkel zwischen den beiden zu P und P_1 gehörenden Kurvennormalen auffassen (s. Fig. 84), die sich im Punkte M treffen mögen. Ist die Kurve ein Kreis des Radius $\overline{MP} = \overline{MP_1} = \varrho$, so gilt:

$$\Delta s = \varrho \cdot |\Delta\alpha|,$$

so daß der absolute Wert $|\varkappa|$ der Krümmung des Kreises gleich dem reziproken Werte $\frac{1}{\varrho}$ des Radius ϱ ist. Der Kreis hat hiernach die Eigenschaft, *daß seine mittlere Krümmung für jedes Bogenstück konstant und gleich ϱ^{-1} ist.*[2]) Im allgemeinen wird sich jedoch die mittlere Krümmung $\varkappa$ einer ebenen Kurve ändern, falls wir einen der Punkte P und P_1 oder auch beide zugleich auf der Kurve wandern lassen.

Es entspricht nun einer stets wiederkehrenden Schlußweise der Differentialrechnung, wenn wir an den Begriff der mittleren Krümmung folgende weitere Erklärung anschließen: *Als „Krümmung" der Kurve im Punkte P bezeichnen wir den Grenzwert, welchem die mittlere Krümmung* (1) *zustrebt, falls bei festgehaltenem x die Differenz Δx sich der Grenze* 0 *nähert, vorausgesetzt natürlich, daß ein solcher Grenzwert existiert.* Die letztere Voraussetzung trifft in unserem Falle zu.[3]) Wir können nämlich den Ausdruck (1) von $\varkappa$ so entwickeln:

$$\varkappa = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\left(\frac{\Delta \operatorname{tg}\alpha}{\Delta x}\right)}{\left(\frac{\Delta \operatorname{tg}\alpha}{\Delta\alpha}\right)\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)} = \frac{\left(\frac{\Delta f'(x)}{\Delta x}\right)}{\left(\frac{\Delta \operatorname{tg}\alpha}{\Delta\alpha}\right)\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)}.$$

---

1) Die Erklärung der mittleren Krümmung und die Regel über das Vorzeichen der Maßzahl $\varkappa$ sind übrigens von der besonderen Lage des Koordinatensystems unabhängig, wenn man unter $\Delta\alpha$ die mit dem zutreffenden Vorzeichen versehene Änderung der Tangentenrichtung versteht. Durchläuft man die Kurve in der Richtung wachsender s, so ist an der Stelle P die Krümmung positiv oder negativ, je nachdem daselbst die Kurve links oder rechts von ihrer Tangente liegt.

2) Es macht keine Schwierigkeit, daß die oben zur Vereinfachung der Rechnung vorausgesetzte Stetigkeit der Ableitung $f'(x)$ in zwei Punkten der Kreisperipherie nicht erfüllt ist. Die Erklärung der mittleren Krümmung ist in der vorigen Note vom Koordinatensysteme unabhängig gemacht.

3) Im Anschluß an Fig. 84 vollziehen wir im Texte nur den Grenzübergang $\lim \Delta x = +0$. Doch führt unter der Voraussetzung der Existenz und Stetigkeit von $f'(x)$ und $f''(x)$ in der „Umgebung" von P der Grenzübergang $\lim \Delta x = -0$ zu dem gleichen Ergebnis.

Da nun wegen der Stetigkeit der ersten Ableitung $y' = f'(x)$ für $\lim \varDelta x = 0$ auch $\lim \varDelta\alpha = 0$ gilt, so ist:

$$\lim_{\varDelta x=0} \frac{\varDelta \operatorname{tg}\alpha}{\varDelta\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + y'^2, \qquad \lim_{\varDelta x=0} \frac{\varDelta s}{\varDelta x} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Setzen wir also abkürzend $f''(x) = y''$ und bezeichnen den Grenzwert von $\varkappa$, d. h. die Krümmung der Kurve im Punkte P, gleich selbst wieder durch $\varkappa$, so ergibt sich der Satz: *Die Krümmung unserer Kurve im Punkte P der Koordinaten x, y ist gegeben durch:*

$$(2) \qquad \varkappa = \frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}.$$

Um uns ein anschauliches Bild der Krümmung der Kurve an der Stelle P zu verschaffen, wollen wir einen Kreis konstruieren, der die Kurve im Punkte P berührt, nach der gleichen Seite konkav ist und längs seiner ganzen Peripherie die für den Punkt P unserer Kurve berechnete Krümmung hat. *Dieser Kreis heißt der „Krümmungskreis" der Kurve im Punkte P, sein durch:*

$$(3) \qquad \varrho = \frac{(+\sqrt{1+y'^2})^3}{|y''|}$$

gegebener Radius ist der „Krümmungsradius" und sein auf der Kurvennormale in der Richtung der Konkavität gelegener Mittelpunkt M der „Krümmungsmittelpunkt" der Kurve im Punkte P. Die Koordinaten ξ, η von M befriedigen also erstens die Normalengleichung:

$$(4) \qquad \xi - x + y'(\eta - y) = 0,$$

zweitens, da $\overline{MP} = \varrho$ ist, die Gleichung:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = (\eta - y)^2 (1 + y'^2) = \varrho^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

Da nun M auf der konkaven Seite der Kurve liegt, so ist (s. Fig. 84) $\operatorname{sgn}(\eta - y) = \operatorname{sgn}(y'')$. Daraufhin ergibt sich aus der letzten Gleichung $(\eta - y)$ und dann weiter $(\xi - x)$ aus (4): *Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes der Kurve im Punkte P sind:*

$$(5) \qquad \xi = x - \frac{y' + y'^3}{y''}, \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Zur Erläuterung diene die *Ellipse*, wo die zweite der Gleichungen:

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}, \qquad y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}$$

aus der ersten, schon S. 279 benutzten, mittelst der „Quotientenregel" folgt. Mit Benutzung der Ellipsengleichung folgt weiter:

$$xy' = -\frac{b^2}{y} \cdot \frac{x^2}{a^2} = -\frac{b^2}{y} + y, \qquad y - xy' = \frac{b^2}{y}, \qquad y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3},$$

sowie bei Heranziehung der *linearen Exzentrizität* $e = \sqrt{a^2 - b^2}$:

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{b^4}{a^2 y^2} \cdot \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{b^4}{a^2 y^2} - \frac{b^2}{a^2} = \frac{e^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^2 y^2}.$$

Durch Eintragung dieser Ausdrücke für $1 + y'^2$ und y'' in die zweite Gleichung (5) gewinnt man die Ordinate η, während man ξ am einfachsten aus η mittelst der Normalengleichung berechnet: *Die Koordinaten* ξ, η *des Krümmungsmittelpunktes für den Punkt* (x, y) *der Ellipse sind:*

(6) $$\xi = \frac{e^2 x^3}{a^4}, \qquad \eta = -\frac{e^2 y^3}{b^4}.$$

In Fig. 85 ist für einen Punkt P der Krümmungskreis skizziert.[1]) Von P aus nach links hin nimmt die Krümmung der Ellipse zunächst stetig ab, nach rechts hin aber stetig zu; dem entspricht, *daß von* P *aus nach links die Ellipse den Krümmungskreis umfaßt, nach rechts aber der Krümmungskreis die Ellipse.* Diese Verhältnisse werden bei allen Kurven wiederkehren, wenn sich in der Umgebung der Stelle P die Krümmung der Kurve längs derselben *monoton* ändert.

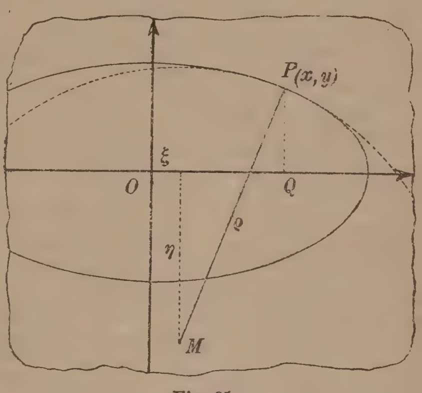


Fig. 85.

Eine Ausnahme findet bei der Ellipse an den vier Scheitelpunkten statt. *Wir wollen allgemein bei einer Kurve mit stetig veränderlicher Krümmung* $\varkappa$ *eine Stelle, an der* $\varkappa$ *einen Extremwert annimmt, als einen „Scheitelpunkt" bezeichnen und nennen den zugehörigen Krümmungskreis den „Scheitelkrümmungskreis".* Speziell bei der Ellipse hat der Scheitelpunkt $(a, 0)$ den Krümmungsmittelpunkt $\left(\frac{e^2}{a}, 0\right)$, der Scheitelpunkt $(0, b)$ aber $\left(0, -\frac{e^2}{b}\right)$, wie aus (6) folgt. Die Konstruktion der Scheitelkrümmungskreise ist in Fig. 86 ausgeführt. In den beiden Scheitelpunkten A, B werden die Tangenten gezeichnet, die sich im Punkte C schneiden mögen; das Lot von C auf die Gerade AB schneidet, über den Fußpunkt verlängert, auf den Achsen die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Scheitelkrümmungskreise aus, wie eine elementare Betrachtung zeigt. *Hier ist nun in der Tat der eine Krümmungskreis ganz innerhalb, der andere ganz außerhalb der Ellipse gelegen,* abgesehen natürlich von den Berührungspunkten selbst.

1) Zufolge (6) könnte man durch fortgesetzte Zeichnung vierter Proportionalen z. B. aus x die Abszisse ξ konstruieren und damit, indem man zuvor die Normale zeichnet (S. 279), auch M konstruktiv finden.

Kehren wir zu einer beliebigen Kurve zurück und nehmen an, daß P kein Scheitelpunkt sei, so *überschreitet*, wie wir sahen, der Krümmungskreis die Kurve im Punkte P. Wir müssen uns demnach die Auffassung bilden, *daß der Kreis die Kurve an der Stelle P in einer ungeraden Anzahl von zusammenfallenden Schnittpunkten kreuzt.* Wir können diese Vorstellung in einer durch die Rechnung genauer durchzubildenden Art geradezu zum Ausgangspunkte für die Erklärung des Krümmungskreises machen. Jeder Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Normalen:

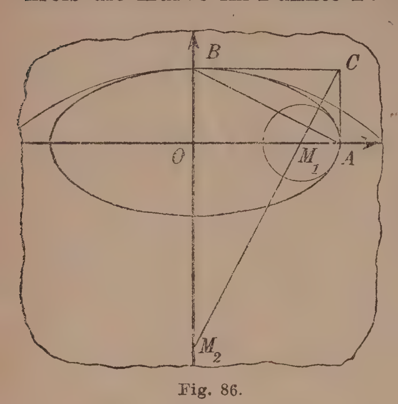


Fig. 86.

$$\xi - x + f'(x)(\eta - y) = 0 \tag{7}$$

liegt, und der durch den Punkt (x, y) hindurchläuft, hat, da er die Kurve berührt, daselbst mindestens „zwei zusammenfallende Punkte" mit der Kurve gemein. Sind gleich wieder ξ, η die Koordinaten des Kreiszentrums und ϱ sein Radius, so ist in jedem Falle:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 - \varrho^2 = 0.$$

Wir suchen uns nun zunächst unter diesen Kreisen denjenigen aus, der durch den benachbarten Kurvenpunkt $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ hindurchläuft, und haben also, da auch dieser neue Kurvenpunkt vom Mittelpunkte (ξ, η) des gewählten Kreises den Abstand ϱ haben soll:

$$(\xi - x - \Delta x)^2 + (\eta - y - \Delta y)^2 - \varrho^2 = 0.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der voraufgehenden folgt:

$$2(\xi - x)\Delta x + 2(\eta - y)\Delta y = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

und also mit Benutzung von (7):

$$2(\eta - y)(\Delta y - f'(x)\Delta x) = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Nun gilt zufolge des Taylorschen Lehrsatzes:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \tfrac{1}{2} f''(x + \vartheta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x^2,$$

so daß, wenn $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$ gesetzt wird:

$$2(\Delta y - f'(x)\Delta x) = f''(x + \vartheta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x^2$$

gilt. Für die Ordinate η findet man also die Gleichung:

$$(\eta - y) \cdot f''(x + \vartheta \cdot \Delta x) = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2,$$

aus der bereits ersichtlich ist, daß wir für $\lim \Delta x = 0$ auf die Ordinate η des Krümmungsmittelpunktes zurückgeführt werden. *Unter allen Kreisen,*

welche unsere Kurve im Punkte P berühren und also daselbst mindestens zwei zusammenfallende Punkte mit ihr gemein haben, ist der Krümmungskreis dadurch ausgezeichnet, daß er noch mindestens einen dritten gleichfalls mit P zusammenfallenden Schnittpunkt mit der Kurve gemein hat.

Die S. 289 entwickelte Auffassung, nach welcher eine Wendetangente die Kurve in drei an der Berührungsstelle zusammenfallenden Punkten schneidet, ist ein besonderer Fall des vorstehenden Satzes. In einem Wendepunkte verschwindet nämlich die zweite Ableitung y'', falls deren Stetigkeit als Voraussetzung gilt, *so daß daselbst der Krümmungsradius ϱ unendlich wird und also der Krümmungskreis in die Wendetangente ausartet.*

Der Satz über den Schnitt des Krümmungskreises mit der Kurve ist natürlich so aufzufassen, daß an der Berührungsstelle „mindestens" drei Schnittpunkte beider Kurven zusammenfallen. An besonderen Stellen kann die Anzahl der vereint liegenden Schnittpunkte > 3 sein. So schneidet ein *Scheitelkrümmungskreis*, da er *nicht* von der einen Seite der Kurve zur anderen hinübertritt, die Kurve in einer geraden Anzahl und also *mindestens in „vier" an der Berührungsstelle zusammenfallenden Punkten.* Eine algebraische Bestätigung bei der Ellipse gibt die Berechnung der vier Schnittpunkte der beiden durch:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \qquad b^2x^2 + (by + e^2)^2 - a^4 = 0$$

gegebenen Kurven zweiten Grades, von denen die erste die Ellipse und die zweite der eine Scheitelkrümmungskreis ist; die vier Lösungssysteme der beiden Gleichungen sind gleich, und zwar $x = 0$, $y = b$. Anschaulich kommt die „vierpunktige" Berührung der Scheitelkrümmungskreise mit der Ellipse dadurch zum Ausdruck, daß sich die Kreise eng an die Ellipse anschmiegen (s. Fig. 86). Da bei gegebenen Hauptachsen $2a$, $2b$ die Scheitelkrümmungskreise leicht konstruierbar sind, so besitzt man in ihnen ein bekanntes Mittel, die Ellipse zwischen den fraglichen Kreisen mit großer Genauigkeit aus freier Hand zu zeichnen (s. „A. G." § 23).

An die in Fig. 84, S. 292, dargelegten Verhältnisse schließt sich noch folgende Auffassung über die Gewinnung des Krümmungsmittelpunktes an. Der Punkt M in Fig. 84 (S. 292) war zunächst als Schnittpunkt der Kurvennormalen in den beiden Punkten P und P_1 erklärt. Man kann leicht zeigen, *daß sich der Schnittpunkt M einer festen Grenzlage, nämlich dem Krümmungsmittelpunkte der Kurve im Punkte P, annähert, falls sich P_1 auf der Kurve dem Punkte P als Grenzlage nähert.* Die Koordinaten ξ, η des Punktes M der Fig. 84 findet man durch Lösung der beiden Gleichungen:

$$\xi - x + f'(x)\,(\eta - y) = 0,$$
$$\xi - x - \Delta x + f'(x + \Delta x)\,(\eta - y - \Delta y) = 0,$$

die, einzeln genommen, die beiden Normalen PM und P_1M darstellen. Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten und Teilung des Ergebnisses durch $\varDelta x$ erhält man:

$$1 + f'(x + \varDelta x)\frac{\varDelta y}{\varDelta x} - (\eta - y)\frac{f'(x + \varDelta x) - f'(x)}{\varDelta x} = 0.$$

Multipliziert man mit $f'(x)$ und benutzt die erste der zu lösenden Gleichungen, so folgt weiter:

$$f'(x) + f'(x)\cdot f'(x + \varDelta x)\frac{\varDelta y}{\varDelta x} + (\xi - x)\frac{f'(x + \varDelta x) - f'(x)}{\varDelta x} = 0.$$

Für $\lim \varDelta x = 0$ und Auflösung nach ξ und η werden wir in der Tat zu den Koordinaten (5) S. 294 des Krümmungsmittelpunktes zurückgeführt.

Ist die Kurve durch ein Gleichungenpaar (1) S. 266 gegeben, so hat man y' und y'' nach (5) S. 291 zu berechnen. So findet man z. B. für die gemeine Zykloide:

$$y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \qquad 1 + y'^2 = \frac{2}{1 - \cos t}, \qquad y'' = \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2},$$

woraus folgende Ausdrücke für die Koordinaten ξ, η folgen:

(8) $$\xi = a(t + \sin t), \qquad \eta = -a(1 - \cos t).$$

Die Ordinate η des zum Punkte (x, y) der Zykloide gehörenden Krümmungsmittelpunktes M ist also einfach gleich $-y$. Da nach S. 280 die Normale der Zykloide durch den Berührungspunkt B der augenblicklichen Lage des rollenden Kreises mit der x-Achse hindurchläuft, so gewinnt man M durch folgende Konstruktion (s. Fig. 87). Man schneidet auf der Parallelen zur x-Achse im Abstande a den Punkt O' aus, der $PO' = a$ liefert, und fällt von O' aus das Lot $O'B$ auf die x-Achse; die Verlängerung von PB über B hinaus um sich selbst bis M liefert den Krümmungsmittelpunkt. Der Krümmungsradius ϱ ist doppelt so groß wie die Normale N, und zwar ist:

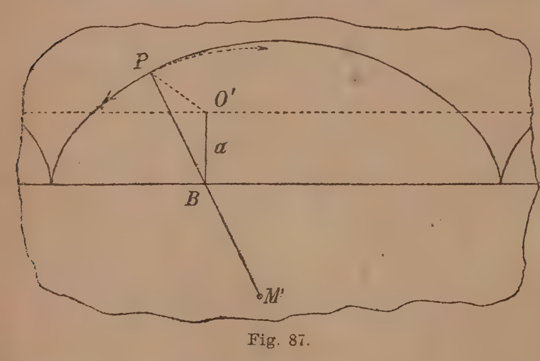


Fig. 87.

(9) $$\varrho = 2N = 4a \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Im Scheitelpunkte liegt der Maximalwert $\varrho = 4a$ vor, während gegen die einzelne Spitze der Kurve hin ϱ bis 0 abnimmt und also die Krümmung $\varkappa$ unendlich wird.

Aufgaben: 1) Man berechne für die Parabel der Gleichung $y^2 = 2px$ die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes und den Radius ϱ im Punkte (x, y). — Es ergibt sich:

$$(10) \qquad \xi = 3x + p, \qquad \eta = -\frac{y^3}{p^2}, \qquad \varrho = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

2) Man führe dieselbe Untersuchung für die Hyperbel der folgenden Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ durch und konstruiere einen der beiden Scheitelkrümmungskreise. — Hier ist, falls $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ eingeführt wird:

$$(11) \qquad \xi = \frac{e^2 x^3}{a^4}, \qquad \eta = -\frac{e^2 y^3}{b^4}, \qquad \varrho = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

3) Man löse dieselbe Aufgabe für die Cof-Kurve (Kettenlinie). — Es gilt:

$$\xi = x - \mathfrak{Sin}\, x \cdot \mathfrak{Cof}\, x, \qquad \eta = 2\, \mathfrak{Cof}\, x = 2y.$$

4) Man berechne ϱ und (ξ, η) für die Kardioide der Gleichungen:

$$(12) \qquad x = 2a \cos t - a \cos 2t, \qquad y = 2a \sin t - a \sin 2t. \text{ —}$$

Als Ergebnis muß man finden:

$$(13) \quad \varrho = \frac{8a}{3} \sin\left(\frac{t}{2}\right), \quad \xi = \frac{2a}{3} \cos t + \frac{a}{3} \cos 2t, \quad \eta = \frac{2a}{3} \sin t + \frac{a}{3} \sin 2t.$$

Auch hier gilt für die Spitze der Kurve $\varrho = 0$.

5) Man löse die gleiche Aufgabe für die Astroide. — Hier ist:

$$(14) \quad \varrho = \frac{3a}{2} \cdot |\sin 2t|, \quad \xi = a \cos^3 t + 3a \cos t \cdot \sin^2 t, \quad \eta = a \sin^3 t + 3a \sin t \cdot \cos^2 t,$$

wie man aus den Gleichungen (11) S. 274 der Kurve berechne.

6) Man beweise unter Anknüpfung an die ursprüngliche Erklärung (1) S. 293 der Krümmung $\varkappa$, daß sich für eine in Polarkoordinaten r, ϑ gegebene Kurve die Krümmung in folgender Art darstellt:

$$(15) \qquad \varkappa = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}. \text{ —}$$

Man hat $\Delta\alpha = \Delta\beta + \Delta\vartheta$ zu setzen und die Gleichung (1) S. 282 für den Winkel β heranzuziehen.

6. Die Evoluten und Evolventen. Halten wir an der Stetigkeit von y' und y'' fest, so wird sich, *so lange y'' von 0 verschieden bleibt*, bei stetiger Änderung des Punktes (x, y) der gegebenen Kurve auch das zugehörige Krümmungszentrum (ξ, η) stetig ändern. *Die gesamten Krümmungsmittelpunkte (ξ, η) bilden auf diese Weise selbst eine stetige Punktreihe, welche wir die „Krümmungsmittelpunktskurve" oder „Evolute" der gegebenen Kurve nennen.* Denken wir in den Gleichungen:

$$(1) \qquad \xi = x - \frac{y' + y'^3}{y''}, \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

y, y' und y'' als Funktionen von x berechnet, so haben wir hier eine dem Ansatze (1) S. 266 sich unterordnende Darstellung der Evolute, wobei

die Koordinaten ihrer Punkte (ξ, η) als Funktionen der unabhängigen Variablen x geschrieben sind.

Um ein angenähertes Bild vom Verlaufe der Evolute zu gewinnen, knüpfen wir an die S. 297 entwickelte Vorstellung an, nach welcher der Krümmungsmittelpunkt M einer Stelle P unserer Kurve die Grenzlage des Schnittpunktes zweier bei P einander unendlich nahe kommender Kurvennormalen ist. In Fig. 88 haben wir in einigen einander nahe gelegenen Kurvenpunkten

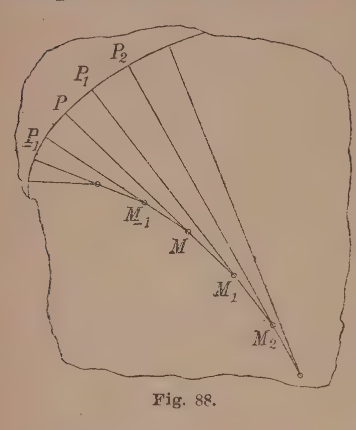


Fig. 88.

$$\ldots, P_{-2}, P_{-1}, P, P_1, P_2, \ldots$$

die Normalen gezeichnet und jede mit der voraufgehenden und der folgenden zum Schnitt gebracht. Es entstehen auf diese Art die Punkte $\ldots, M_{-2}, M_{-1}, M, M_1, M_2, \ldots$ der Figur, die uns den Verlauf der Evolute ungefähr veranschaulichen.

Die Verbindungsgerade MM_1 gibt uns angenähert die Tangentenrichtung der Evolute; da $M_1 M$, über M hinaus verlängert, die Normale MP liefert, so vermuten wir, daß der folgende Satz besteht: *Die Evolute hat in ihrem einzelnen Punkte M der Koordinaten ξ, η eine Tangente, welche, bis zur ursprünglichen Kurve gezogen, die Normale MP der letzteren im zugehörigen Punkte (x, y) liefert.* Dieser Satz ist leicht beweisbar, *falls auch noch die dritte Ableitung y''' unserer Funktion $y = f(x)$ existiert.* Aus (1) folgt nämlich für die Ableitungen von ξ und η nach x:

$$(2) \qquad \xi' = -3y'^2 + \frac{(y' + y'^3)y'''}{y''^2}, \qquad \eta' = 3y' - \frac{(1 + y'^2)y'''}{y''^2}.$$

Unter der Benutzung der ersten Regel (5) S. 291 ergibt sich:

$$(3) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta'}{\xi'} = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right),$$

wo α die bekannte Bedeutung für die gegebene Kurve hat. Hieraus geht nicht nur die Existenz der Tangente der Evolute im Punkte (ξ, η) hervor, sondern es zeigt sich zugleich, daß diese Tangente senkrecht zur Tangente der ursprünglichen Kurve im zugehörigen Punkte (x, y) verläuft. Daß sie aber diesen Punkt (x, y) selbst auf der ursprünglichen Kurve ausschneidet, ist einleuchtend. Würde nämlich die fragliche Tangente nicht durch den Punkt (x, y) hindurchlaufen, so würde die Normale der gegebenen Kurve im Punkte (x, y), die zur Evolutentangente parallel läuft, nicht durch (ξ, η) hindurchlaufen.

Noch ein zweiter Satz wird durch Fig. 88 nahe gelegt, wenn wir in derselben $\overline{PM} = \varrho$ und $\overline{P_1 M_1} = \varrho_1$ als Krümmungsradien der ursprünglichen

Kurve in den Punkten (x, y) und $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ fassen und das zwischenliegende Kurvenstück $\widehat{PP_1}$ als einen Kreisbogen fassen, während andrerseits $MM_1 = \Delta\sigma$ angenähert als das dem Fortschritt von x zu $(x + \Delta x)$ entsprechende Bogenstück der Evolute anzusehen sein würde. Da nun $\overline{M_1 P_1}$ und $\overline{M_1 P}$ als Radien des fraglichen Kreisbogens gleich sein würden, so müßte:

$$\Delta\sigma = \overline{MM_1} = \overline{M_1 P_1} - \overline{MP} = \varrho_1 - \varrho = \Delta\varrho$$

gelten, unter $\Delta\varrho$ den entsprechenden Zuwachs des Krümmungsradius verstanden. In der Tat besteht der Satz: *Der Differentialquotient des Krümmungsradius ϱ nach x ist gleich demjenigen der Bogenlänge σ der Evolute, falls wir die Maßzahl σ so einführen, daß sie gleichzeitig mit ϱ wächst.* Aus (3) S. 294 folgt nämlich:

$$\left|\frac{d\varrho}{dx}\right| = \left|3(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \cdot y' - \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} y'''}{y''^2}\right|,$$

während andrerseits aus (3) und (2) hervorgeht:

$$\left|\frac{d\sigma}{dx}\right| = +\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} = |\eta'| \sqrt{1 + y'^2} = +\sqrt{1 + y'^2} \cdot \left|3y' - \frac{(1 + y'^2) y'''}{y''^2}\right|$$

so daß der Satz in der Tat richtig ist.

Der letzte Satz eröffnet uns die Möglichkeit, die „*Bogenmessung*" oder „*Rektifikation*" der Evolute genau im Sinne der Betrachtung von S. 48 ff. durchzuführen. Denken wir im Punkte M_1 der Evolute, d. i. in dem zum Punkte P_1 gehörenden Krümmungsmittelpunkte, einen biegsamen, aber unausdehnbaren Faden der Länge $\overline{M_1 P_1} = \varrho_1$ tangential zur Evolute gespannt, so wird beim Aufwickeln des Fadens längs der Evolute das in jedem Augenblicke vom Faden bedeckte Kurvenstückchen $d\sigma$ gleich der entsprechenden Abnahme $d\varrho$ des Krümmungsradius sein, so daß die restierende Fadenlänge immer gerade genau den Krümmungshalbmesser der betreffenden Stelle liefert. Hieraus gehen zwei wichtige Folgerungen hervor: *Durch Aufwickelung oder Abwickelung eines Fadens geeigneter Länge längs der Evolute beschreibt man mit dem Fadenendpunkte P die ursprüngliche Kurve; letztere heißt demnach eine „Abwickelungskurve" oder „Evolvente" ihrer Krümmungsmittelpunktskurve.* Andrerseits erkennen wir: *Das zwischen zwei Punkten M und M_1 der Evolute liegende Bogenstück hat die Länge $(\varrho_1 - \varrho)$, unter ϱ und ϱ_1 die zugehörigen Krümmungsradien der ursprünglichen Kurve verstanden.*

Wie für die hier vorliegende Evolute können wir überhaupt *für jede ebene Kurve*, die in jedem ihrer Punkte eine Tangente hat, Evolventen erklären, und zwar der frei wählbaren Fadenlänge entsprechend unendlich viele. Wir können, was noch allgemeiner ist, auch an die Vorstellung

einer starren Tangente anknüpfen, die längs der Kurve ohne Gleitung „hinrollt“; ein einzelner Punkt der rollenden Tangente wird dann eine Evolvente beschreiben. Zwei unter diesen Evolventen werden in ihrer gegenseitigen Beziehung als *„Parallelkurven“* bezeichnet; eine Normale der einen Kurve ist offenbar immer zugleich eine solche der anderen, und der längs dieser Normalen gemessene Abstand beider Kurven ist überall konstant. Die gegebene Kurve ihrerseits ist dabei *die gemeinsame Evolute aller dieser Parallelkurven.*

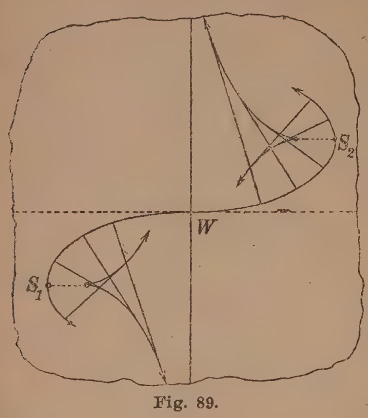


Fig. 89.

Indem wir zur Evolute einer gegebenen Kurve zurückkehren, notieren wir noch kurz ein paar Besonderheiten, die bei der Gestalt der Evolute hervortreten können: *Einem Scheitelpunkte der ursprünglichen Kurve entspricht eine „Spitze“ (ein „Rückkehrpunkt“) der Evolute; ein Wendepunkt der gegebenen Kurve mit stetig durch 0 hindurchgehender Ableitung y'' liefert in der zugehörigen Normalen eine „Asymptote der Evolute“* (vgl. S. 297). Man wolle sich dies an der Skizze der Fig. 89 klar machen, in der S_1 und S_2 Scheitelpunkte und W einen Wendepunkt darstellen. Auf die Natur der Spitzen kommen wir in § 8 zurück.

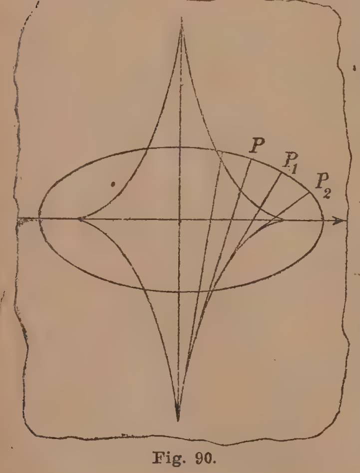


Fig. 90.

Als Beispiele betrachten wir die Evoluten der Ellipse und der Zykloide.

1. Die *Evolute der Ellipse* (Fig. 90) hat die nach S. 295 zu konstruierenden Krümmungszentren der vier Scheitelpunkte zu Spitzen. Die vier zwischen den Spitzen gelegenen Quadranten sind bezüglich der Koordinatenachsen einander symmetrisch. Konstruiert man sich einige Normalen (S. 279), so ist es leicht, tangential zu denselben die Evolute zu zeichnen. Die Ellipsenevolute hat eine der Astroide ähnliche Gestalt (vgl. Fig. 65, S. 274); *in der Tat gelangen wir zur Astroide, wenn wir alle Ordinaten η der Evolute nach dem Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkleinern.* Aus den Darstellungen (6) S. 295 der ξ, η folgt zunächst:

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}\left(\frac{x}{a}\right)^2 \qquad (b\eta)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}\left(\frac{y}{b}\right)^2,$$

woraus wir durch Addition mit Benutzung der Ellipsengleichung:

(4) $$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}$$

als *Gleichung der Ellipsenevolute* erhalten. Mittelst der Transformation $\xi = \xi'$, $\eta = \frac{a}{b}\eta'$ folgt weiter:

$$\xi'^{\frac{2}{3}} + \eta'^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{e^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}},$$

womit in der Tat die S. 274 aufgestellte Astroidengleichung in der irrationalen Gestalt gewonnen ist. Die beiden Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 der Scheitelpunkte $(0, b)$ und $(a, 0)$ sind nach S. 295:

$$\varrho_1 = b + \frac{e^2}{b} = \frac{a^2}{b}, \qquad \varrho_2 = a - \frac{e^2}{a} = \frac{b^2}{a};$$

als Bogenlänge s eines Evolutenquadranten findet sich hieraus:

(5) $$s = \varrho_1 - \varrho_2 = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

2. Konstruiert man in der durch Fig. 87, S. 298, dargelegten Art einige Krümmungszentren der *gemeinen Zykloide*, so ergibt sich die in Fig. 91 dargestellte Evolute, deren Gleichungen in (8) S. 298 gegeben sind. Wir vermuten, *daß die Evolute der gemeinen Zykloide eine mit ihr kongruente Zykloide ist, deren Scheitelpunkte mit den Spitzen der gegebenen Zykloide zusammenfallen.* Führen wir, um dies zu prüfen, das in der Figur angedeutete Koordinatensystem der Achsen O_1X_1 und O_1Y_1 ein, so sind die neuen Koordinaten x_1, y_1 mit den alten ξ, η durch $\xi = x_1 - a\pi$, $\eta = y_1 - 2a$ verbunden. Setzen wir noch $t = t_1 - \pi$, so rechnen sich die Evolutengleichungen um auf:

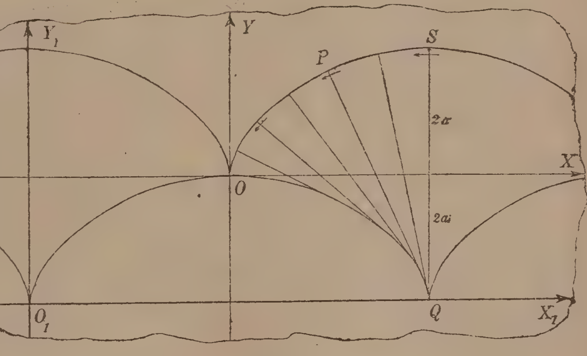


Fig. 91.

$$x_1 = a(t_1 - \sin t_1), \qquad y_1 = a(1 - \cos t_1);$$

damit aber haben wir tatsächlich die Gleichungen der ursprünglichen Zykloide im neuen Koordinatensysteme wiedergewonnen. Der Krümmungsradius im Scheitelpunkte S (s. Fig. 91) hat die Länge $\overline{SQ} = 4a$; bei Auf-

wickelung auf die Evolute nach links hin wird sich diese Länge $4a$ gerade auf den halben Zweig $\widehat{QO}$ der unteren Zykloide auflagern: *Ein einzelner durch zwei aufeinander folgende Spitzen eingegrenzter Zweig der Zykloide hat die Bogenlänge $8a$, ist also 8-mal so groß wie der Radius des rollenden Kreises.*

Fig. 92.

7. Aufgaben über Evoluten und Evolventen. 1) Man untersuche die Evolute der Parabel von der Gleichung $y^2 = 2px$. — Die Evolute ist nach (10) S. 299 durch:

$$\xi = 3x + p, \qquad \eta = -\frac{(\sqrt{2x})^3}{\sqrt{p}}$$

dargestellt, woraus durch Elimination von x folgt:

$$(1) \qquad 8(\xi - p)^3 - 27p\eta^2 = 0,$$

so daß wir mit einer Kurve dritten Grades zu tun haben. In Fig. 92 ist die Evolute gezeichnet, der Scheitelkrümmungskreis des Radius p gezogen, und es sind einige weitere Angaben hinzugefügt, die zu bestätigen sind. Der Schnittpunkt $(4p, 2p\sqrt{2})$ der Evolute mit der Parabel ist das Krümmungszentrum für den Punkt $(p, -p\sqrt{2})$ der Parabel. Man beweise, daß die Bogenlänge der Evolute zwischen der Spitze $(p, 0)$ und jenem Schnittpunkte gleich $(-1 + 3\sqrt{3})p$ ist.

2) Man skizziere die Evolute der Hyperbel und stelle deren Gleichung auf. — Im Anschluß an Aufgabe 2) S. 299 muß man als Gleichung der Evolute finden:

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} - (b\eta)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}.$$

3) Man löse dieselbe Aufgabe für die Cos-Kurve (Kettenlinie). — Die Gleichung der Evolute ist (s. Aufgabe 3) S. 299):

$$4\xi + \eta\sqrt{\eta^2 - 4} - 4\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\left(\frac{\eta}{2}\right) = 0.$$

Fig. 93.

4) Unter Gebrauch der in Fig. 93 erklärten Bezeichnungen leite man als Gleichungen der Kreisevolvente ab:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

und zeige umgekehrt, daß die Evolute dieser Kurve der Kreis des Radius a um O ist. Die Kreisevolvente muß auch als Grenzfall der durch:

$$x = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right),$$

$$y = (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right)$$

gegebenen Epizykloide für $\lim b = \infty$ gewonnen werden können. — Man schreibe, die Gleichung für x betreffend, nach dem Taylorschen Lehrsatze:

$$\cos\left(t + \frac{at}{b}\right) = \cos t - \sin\left(t + \vartheta \cdot \frac{at}{b}\right) \cdot \frac{at}{b}$$

und gelangt für $\lim b = \infty$ leicht zur ersten Gleichung (2).

5) Die als „*Traktrix*" benannte Kurve hat die Gleichung:

$$x = -\sqrt{1-y^2} - \ln y + \ln\left(1 + \sqrt{1-y^2}\right) \tag{3}$$

oder (bei Benutzung von (2) S. 71):

$$x = -\sqrt{1-y^2} + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{1}{y}\right). \tag{4}$$

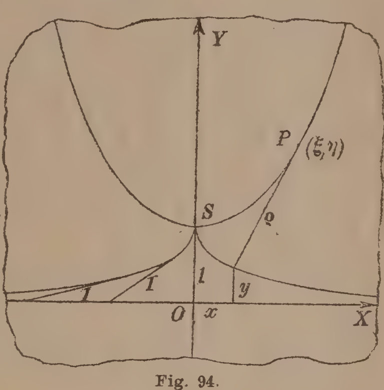


Fig. 94.

Zur Zeichnung der Kurve sehe man y als unabhängig und im Intervalle $0 \leq y \leq 1$ variabel an. Beim Zeichenwechsel von $\sqrt{1-y^2}$ in (3) wechselt x das Zeichen; die Traktrix ist eine bezüglich der y-Achse sich selbst symmetrische Kurve, welche im Punkte (0, 1) eine Spitze hat und sich nach rechts und links hin asymptotisch gegen die x-Achse herabsenkt. Man zeige, daß die Evolute der Traktrix die $\mathfrak{Cof}$-Kurve oder Kettenlinie ist, und führe die Rektifikation der letzteren Kurve durch. — Man zeige zunächst das Zutreffen der Angaben:

$$y' = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad T = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right| = 1, \qquad y'' = \frac{y}{(1-y^2)^2}, \tag{5}$$

woraus beiläufig als Eigenschaft der Traktrix hervorgeht, daß für sie die „Tangente" T konstant gleich 1 ist (s. Fig. 94). Man beweise ferner für das Krümmungszentrum:

$$\xi = x + \sqrt{1-y^2}, \qquad \eta = \frac{1}{y}.$$

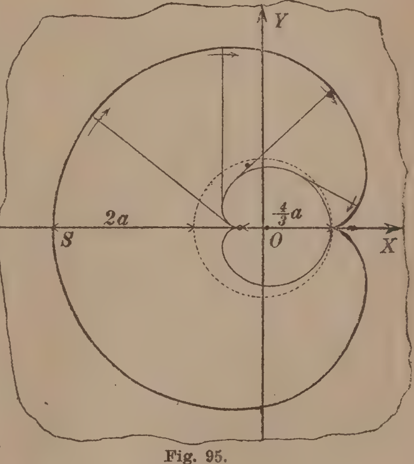


Fig. 95.

Hieraus folgt mit Benutzung von (4) sofort $\eta = \mathfrak{Cof}\,\xi$, so daß die Evolute der Traktrix in der Tat die $\mathfrak{Cof}$-Kurve ist. Der Krümmungsradius ϱ der Traktrix im Punkte (x, y) und (s. Fig. 94) die Bogenlänge $\widehat{SP}$ der $\mathfrak{Cof}$-Kurve (Kettenlinie) vom Scheitelpunkte S bis zum Punkte (ξ, η) berechnen sich zu $\sqrt{\eta^2 - 1}$.

6) Man untersuche die Evolute der Kardioide und bestimme deren Bogenlänge. — Die Kardioide selbst ist durch (12), die Evolute durch (13) S. 299 dargestellt; Fig. 95 zeigt die Gestalt der Evolute. Übt man auf die Gleichungen der Evolute die Transformation

$$\xi = -x_1, \qquad \eta = -y_1, \qquad t = t_1 + \pi, \qquad a = 3a_1$$

aus, so nehmen sie die Gestalt an:

$$x_1 = 2a_1 \cos t_1 - a_1 \cos 2t_1,$$
$$y_1 = 2a_1 \sin t_1 - a_1 \sin 2t_1;$$

die Evolute ist demnach wieder eine Kardioide mit $a_1 = \frac{1}{3}a$. Als Gesamtlänge der ursprünglichen Kardioide findet man $16a$.

7) Man führe die gleiche Untersuchung für die Astroide aus. — Die Evolute ist in (14) S. 299 dargestellt. Dreht man das Achsenkreuz durch den Winkel $\frac{\pi}{4}$ um O und nennt die Koordinaten in bezug auf die neuen Achsen x_1, y_1, so gilt:

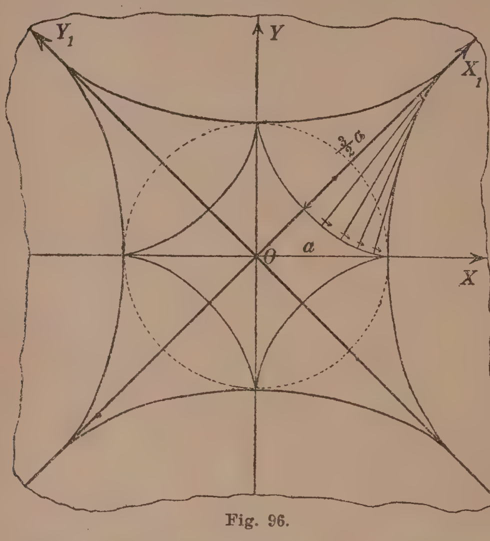


Fig. 96.

$$x_1 = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = \frac{-\xi + \eta}{\sqrt{2}},$$

und die Gleichungen (14) S. 299 der Evolute werden:

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(\sin t + \cos t)^3,$$

$$y_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(\sin t - \cos t)^3.$$

Hieraus folgt, wenn $2a = a_1$ gesetzt wird:

$$x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = a_1^{\frac{2}{3}}.$$

Die Evolute ist also eine gegen die ursprüngliche Kurve um 45° gedrehte Astroide mit $a_1 = 2a$ (s. Fig. 96). Die Gesamtlänge der ursprünglichen Astroide ist $6a$.

8) Man untersuche die Evolute der logarithmischen Spirale bei Gebrauch von Polarkoordinaten. — Man bediene sich der in Fig. 97 erklärten Bezeichnungen und knüpfe bei der Berechnung der Koordinaten r_1, ϑ_1 des Krümmungsmittelpunktes M an die aus (15) S. 299 und (1) S. 282 hervorgehenden Gleichungen an:

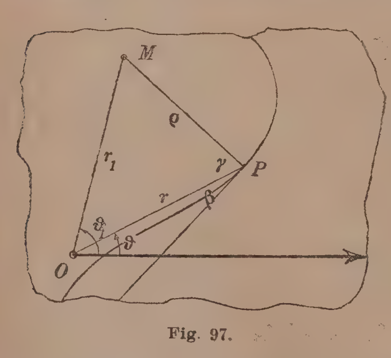


Fig. 97.

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}, \qquad \frac{r'}{r} = \operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tg} \gamma,$$

ein Ansatz, der für jede in Polarkoordinaten gegebene Kurve gilt. Bei der logarithmischen Spirale $r = e^{a\vartheta}$ ergibt sich:

$$\varrho = r\sqrt{1 + a^2} = \mathrm{N}, \quad r_1 = ar, \quad \vartheta_1 = \vartheta + \frac{\pi}{2},$$

unter N die Polarnormale verstanden. Für die Evolute folgt die Gleichung:

$$r_1 = e^{a(\vartheta_1 - \varepsilon)}, \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{\ln a}{a}.$$

Die Evolute ist also eine mit der gegebenen kongruente Spirale, die aus ihr vermöge einer Drehung um O durch den Winkel ε hervorgeht. Für $a = 1$ ist $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$. Wächst a von 1 bis $+\infty$, so nimmt ε zunächst monoton ab, und zwar bis zum Minimum $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{e}\right)$, wächst dann jedoch wieder, nämlich gegen die Grenze $\frac{\pi}{2}$ (s. Aufg. 3,

S. 244). Nimmt a von 1 bis 0 ab, so wächst ε monoton von $\frac{\pi}{2}$ bis $+\infty$. *So oft ε dabei einem positiven Multiplum $2k\pi$ von 2π gleich wird, ist die Spirale ihre eigene Evolute.* Man veranschauliche sich diesen Satz zeichnerisch und stelle die Differenz zwischen der Amplitude des Punktes P und der des zugehörigen Zentrums M fest. Man beweise endlich: Die vom Punkte (r, ϑ) in der Richtung abnehmender ϑ gemessene Bogenlänge s der logarithmischen Spirale nähert sich für $\lim \vartheta = -\infty$ der endlichen Grenze $r\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$. Zum Punkte (r_1, ϑ_1) der Evolute gehört nämlich der Krümmungsradius der ursprünglichen Spirale:

$$\varrho = r\sqrt{1+a^2} = r_1\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

8. Singuläre Punkte ebener Kurven. Die als „Pascalsche Kurven" benannten Epizykloiden haben nach (10) S. 274 die Gleichung:

$$(x^2+y^2-c^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2-2cx+c^2) = 0. \tag{1}$$

Ein Beispiel für $c > a$ ist in Fig. 76, S. 285, gezeichnet. Der in dieser Figur mit O'' bezeichnete Punkt $(c, 0)$ wird ein „*Doppelpunkt*" der Kurve genannt, insofern die Kurve durch diesen Punkt zweimal hindurchläuft. Sie besitzt ebenda zwei zur x-Achse symmetrische Tangenten, welche mit der x-Achse die Winkel bilden:

$$\alpha = \pm \arccos\left(\frac{a}{c}\right); \tag{2}$$

man beweist diese Gleichung leicht aus der Polargleichung (8) S. 284 unserer Kurve. Hält man nun a fest, während c gegen a abnimmt, so tritt eine Änderung der Kurvengestalt ein, bei der sich die links am Doppelpunkte liegende Schleife mehr und mehr zusammenzieht. In der Tat gelangen wir ja für $c = a$ zur Kardioide, welche an Stelle des bisherigen Doppelpunktes im Punkte $(c, 0)$ eine „*Spitze*" oder einen „*Rückkehrpunkt*" hat (s. Fig. 64, S. 274). Zufolge (2) wird für abnehmendes c der Winkel 2α kleiner und kleiner; für $c = a$ wird $2\alpha = 0$, und es kommen die beiden Tangenten zum Zusammenfall und liefern die „*Rückkehrtangente*" der Kurve. Bei $c < a$ reihen sich Kurven an, für welche in Fig. 75, S. 285, ein Beispiel gegeben ist. Fassen wir diese Kurve als verkürzte Epizykloide auf, so besteht sie nur aus dem in der Figur dargestellten Kurvenzuge. Sehen wir indessen in der Kurve den Inbegriff aller reellen Punkte (x, y), die die Gleichung (1) befriedigen, so kommt noch als der Kurve angehörig der „*isolierte Punkt*" $(c, 0)$ hinzu[1]), in dessen Umgebung weitere Punkte der Kurve nicht existieren. Eine (reelle) Tangente besitzt die Kurve in ihrem isolierten Punkte natürlich nicht.

Die „Doppelpunkte", „Spitzen" und „isolierten Punkte" sind die einfachsten Beispiele der „*singulären Punkte*", welche bei ebenen Kurven

1) In Fig. 75, S. 285, wieder mit O'' bezeichnet.

auftreten können. Ohne diesen Gegenstand erschöpfend zu behandeln, fügen wir einige allgemeine Andeutungen an, wie man die singulären Punkte rechnerisch zugänglich macht.

Die zu untersuchende Kurve sei durch $f(x, y) = 0$ gegeben, (x, y) sei einer ihrer Punkte und (ξ, η) möge ein in der Umgebung von (x, y) auf der Kurve variabler Punkt sein. Wir nehmen an, daß die auf der linken Seite der Gleichung der Kurve stehende Funktion nach der Taylorschen Formel (4), S. 197, entwickelbar sei, in welche wir $h = \xi - x$, $k = \eta - y$ eintragen. Die für die variablen Koordinaten ξ, η angeschriebene Gleichung der Kurve $f(\xi, \eta) = 0$ hat dann wegen $f(x, y) = 0$ die entwickelte Gestalt:

$$(3)\quad 0 = (\xi - x)f_x' + (\eta - y)f_y' + \frac{1}{2}\left((\xi - x)^2 f_{xx}'' + 2(\xi - x)(\eta - y)f_{xy}'' + (\eta - y)^2 f_{yy}''\right) + \cdots,$$

wo als Argumente der Ableitungen x und y zu denken sind.

Wir legen jetzt durch den Punkt (x, y) irgend eine Gerade, deren Gleichung wir $\eta - y = \mu(\xi - x)$ schreiben, und wollen den Schnitt dieser Geraden mit unserer Kurve (3) untersuchen. Um die Schnittpunkte zu berechnen, tragen wir $\eta - y = \mu(\xi - x)$ in (3) ein:

$$(4)\qquad 0 = (\xi - x)(f_x' + \mu f_y') + \frac{1}{2}(\xi - x)^2(f_{xx}'' + 2\mu f_{xy}'' + \mu^2 f_{yy}'') + \cdots$$

und haben diese Gleichung (4) zur Bestimmung der Abszissen ξ der Schnittpunkte nach ξ zu lösen.

Eine Lösung ist natürlich immer $\xi = x$, da der Punkt (x, y) der Kurve angehört. Ist $f_x' + \mu f_y' \neq 0$, so ist diese Lösung $\xi = x$ eine „einfache"; ist indessen $f_x' + \mu f_y' = 0$, so ist $\xi = x$ mindestens eine „Doppelwurzel" der Gleichung (4), so daß mindestens zwei Schnittpunkte der Geraden und der Kurve im Punkte (x, y) vereint liegen. Der *„reguläre"* Fall wird nun der sein, *daß f_x' und f_y' nicht zugleich verschwinden;* bestimmen wir dann μ aus der Gleichung $f_x' + \mu f_y' = 0$, so werden wir in:

$$\eta - y = -\frac{f_x'}{f_y'}(\xi - x) \quad \text{oder} \quad (\xi - x)f_x' + (\eta - y)f_y' = 0$$

zur *Tangente der Kurve im „regulären" Punkte* (x, y) geführt.[1])

Demgegenüber bezeichnen wir den Punkt (x, y) als einen *„singulären" Punkt der Kurve, wenn in ihm gleichzeitig mit $f(x, y)$ auch noch die beiden partiellen Ableitungen f_x' und f_y' verschwinden.* Indem wir annehmen, *daß nicht auch noch die drei weiteren Ableitungen f_{xx}'', f_{xy}'', f_{yy}'' im Punkte (x, y) gleichzeitig verschwinden*, nimmt die Gleichung (4) die Gestalt an:

$$(5)\quad 0 = \frac{1}{2}(\xi - x)^2(f_{xx}'' + 2\mu f_{xy}'' + \mu^2 f_{yy}'') + \frac{1}{6}(\xi - x)^3(f_{xxx}''' + \cdots) + \cdots$$

---

1) Daß für $f_y' = 0$, $f_x' \neq 0$ der „Richtungskoeffizient" μ der Tangentengleichung ∞ wird und die Tangente zur y-Achse parallel ausfällt, wird dem Leser keine Schwierigkeit bereiten.

und ergibt uns folgenden Satz: *Für „jede“ Gerade* $\eta - y = \mu(\xi - x)$ *ist jetzt* $\xi = x$ *eine „Doppelwurzel“; eine mindestens „dreifache“ Wurzel aber ist* $\xi = x$ *stets und nur dann, wenn* μ *die Gleichung befriedigt:*

$$f''_{xx} + 2\mu f''_{xy} + \mu^2 f''_{yy} = 0, \tag{6}$$

deren Koeffizienten der Annahme gemäß nicht zugleich verschwinden. Insofern jetzt *jede* Gerade $\eta - y = \mu(\xi - x)$ die Kurve an der Stelle (x, y) in *zwei* zusammenfallenden Punkten schneidet, heißt dieser Punkt ein *„zweifacher“ Punkt der Kurve.* Ist aber μ eine Lösung der Gleichung (6), so rückt mindestens noch *ein* weiterer Schnittpunkt der Geraden und der Kurve an die Stelle (x, y), und die Gerade $\eta - y = \mu(\xi - x)$ heißt dann *eine „Tangente der Kurve“ im Punkte* (x, y).

Algebraisch gesprochen hat nun die Gleichung (6) *immer zwei* Wurzeln[1]); indem wir sie berechnen, finden wir als *Gleichungen der Tangenten der Kurve im zweifachen Punkte* (x, y):

$$(\eta - y)f''_{yy} + \left(f''_{xy} \pm \sqrt{f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy}}\right)(\xi - x) = 0. \tag{7}$$

Aber es ist, da es sich für uns nur um *reelle* geometrische Verhältnisse handelt, zu unterscheiden, ob der hier auftretende Radikand > 0, $= 0$ oder < 0 ist: *Für* $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} > 0$ *hat man zwei reelle, voneinander verschiedene Tangenten, für* $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} = 0$ *fallen beide Tangenten zusammen, für* $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} < 0$ *hat man keine reelle Tangente, vielmehr ist jede der Gleichungen* (7) *nur durch den einen reellen Punkt* $\xi = x$, $\eta = y$ *zu befriedigen.*

Damit erkennen wir allgemein die oben im Anschluß an die Pascalschen Kurven besprochenen Verhältnisse wieder: *In einem „Doppelpunkte“ einer Kurve wird* $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} > 0$ *gelten, in einer „Spitze“* $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} = 0$, *ohne daß* f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy} *zugleich verschwinden, in einem „isolierten Punkte“ endlich werden die Gleichungen* $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, *sowie die Ungleichung* $f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} < 0$ *bestehen.*

Für die Pascalschen Kurven bestätigt die Gleichung (1) diese Angaben. Hier ist nämlich:

$$f'_x = 4x(x^2 + y^2 - c^2) - 8a^2(x - c), \qquad f'_y = 4y(x^2 + y^2 - c^2) - 8a^2 y,$$
$$f''_{xx} = 4(x^2 + y^2 - c^2) + 8(x^2 - a^2),\ f''_{xy} = 8xy,\ f''_{yy} = 4(x^2 + y^2 - c^2) + 8(y^2 - a^2).$$

Für den Punkt $(c, 0)$ der Kurve verschwinden also die partiellen Ableitungen erster Ordnung f'_x und f'_y gleichzeitig, während die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:

$$f''_{xx} = 8(c^2 - a^2), \qquad f''_{xy} = 0, \qquad f''_{yy} = -8a^2$$

1) Unter Mitrechnung der Wurzel ∞ für $f''_{yy} = 0$ $f''_{xy} \neq 0$, sowie der Doppelwurzel ∞ für $f''_{yy} = 0$, $f''_{xy} = 0$.

nicht zugleich verschwinden; der für den Punkt $(c, 0)$ berechnete Ausdruck:

$$f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} = 64 a^2 (c^2 - a^2)$$

ist, wie es sein muß, im Falle $c > a$ (Doppelpunkt) positiv, für $c = a$ (Spitze) gleich 0 und im Falle $c < a$ (isolierter Punkt) negativ.

Aufgaben: 1) Man bestätige durch Rechnung die vier Spitzen der Astroide. — Aus der Gleichung der Astroide:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27 a^2 x^2 y^2 = 0$$

ergibt sich z. B. für den Punkt $(a, 0)$, der der Kurve angehört:

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f''_{xx} = 0, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{yy} = 54 a^4.$$

2) Man beweise, daß die in Fig. 78, S. 286, gezeichnete Lemniskate im Nullpunkte einen Doppelpunkt hat. — Aus der Gleichung (9), S. 286, der Lemniskate folgt leicht für den Nullpunkt:

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f''_{xx} = -2a^2, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{yy} = +2a^2,$$

so daß die Bedingungen eines Doppelpunktes zutreffen. Das Tangentenpaar ist zufolge (7) durch $\eta \pm \xi = 0$ gegeben (s. Fig. 78, S. 286).

3) Man zeichne die der Gleichung $x^3 - x^2 - y^2 = 0$ entsprechende Kurve dritten Grades und zeige, daß sie im Nullpunkte einen isolierten Punkt hat.

4) Man zeichne die Kurve vierten Grades der Gleichung:

$$x^4 - 2y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 1 = 0$$

und zeige, daß sie die drei Doppelpunkte $(\pm 1, 0)$ und $(0, -1)$ hat. — Zur Zeichnung der Kurve benutze man die nach x aufgelöste Gleichung:

$$x = \pm\sqrt{1 \pm y\sqrt{2y+3}}.$$

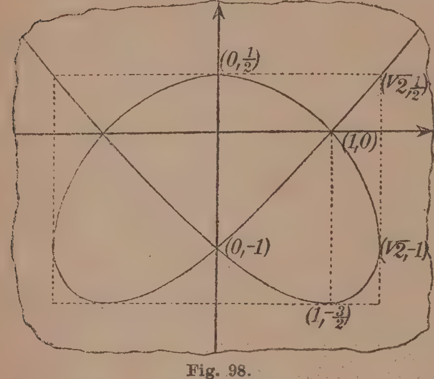


Fig. 98.

Fig. 98 gibt eine Skizze der Kurve mit einer Reihe von Notizen, die man bestätigen wolle. Das Tangentenpaar im Punkte (1, 0) ist durch $2\xi \pm \eta\sqrt{3} = 2$ gegeben, dasjenige im Punkte $(0, -1)$ durch $\pm \xi\sqrt{2} - \eta\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Kapitel II. Untersuchung der Flächen und Kurven im Raume.

1. Darstellung der Flächen und Kurven im Raume durch Gleichungen. Zur Versinnlichung einer stetigen Funktion $z = f(x, y)$ der beiden unabhängigen Variablen x, y hatten wir S. 91 die x, y, z als rechtwinklige Raumkoordinaten gedeutet und nach Art der analytischen Geometrie im einzelnen Punkte (x, y) der etwa horizontal gedachten x, y-Ebene, der „Zahlenebene" von S. 89, den zugehörigen Wert $z = f(x, y)$ in der durch das Vorzeichen von z festgelegten Richtung als z-Koordinate aufgetragen. Ist in irgend einem Bereiche der „Zahlenebene" $f(x, y)$ als eindeutige,

stetige Funktion erklärt, so liefern die Endpunkte der aufgetragenen z-Koordinaten als Bild der Funktion eine „*Fläche*", deren Gestalt uns die Eigenart und den Verlauf der Funktion in jenem Bereiche versinnlicht. So ist die mit drei positiven Konstanten a, b, c gebildete Funktion:

$$z = +c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \tag{1}$$

welche in dem durch die Bedingung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$ festgelegten Bereiche eindeutig und stetig erklärt ist, durch den oberhalb der x, y-Ebene gelegenen Teil eines „Ellipsoides" versinnlicht, das längs des Randes jenes Bereiches auf der x, y-Ebene steht (s. „A. G.", § 71).

Umgekehrt haben wir, wenn es gilt, eine *gegebene Fläche* mit den Mitteln der Differentialrechnung zu untersuchen, diese Fläche in einem geeignet gewählten rechtwinkligen Koordinatensysteme durch eine Gleichung $z = f(x, y)$ oder, falls die Gleichung noch nicht nach z aufgelöst ist, durch eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ darzustellen. Das Ellipsoid, von dem wir eben die obere Hälfte durch (1) darstellten, ist vollständig durch:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{2}$$

gegeben. Den beiden symmetrischen Hälften dieser Fläche entsprechend ist z durch (2) als eine im Innern des oben genannten Bereiches *zweideutige* Funktion von x und y erklärt. Auch sonstige Flächen zweiten Grades werden wir gern als Beispiele heranziehen.

Eine *Kurve im Raume* kann man durch ein Gleichungenpaar:

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

darstellen. Jede dieser Gleichungen, für sich genommen, stellt eine Fläche dar; gleichzeitig bestehen die beiden Gleichungen (3) also für die den beiden Flächen gemeinsamen Punkte, so daß die Kurve als „Durchdringungskurve" der beiden Flächen dargestellt erscheint (s. „A. G.", § 57). So ist in Fig. 99 ein Quadrant der durch die beiden Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - ax = 0 \tag{4}$$

gegebenen Kurve gezeichnet, die sich entsprechend den beiden Gleichungen (4) als Durchdringungskurve einer Kugel und eines geraden Kreiszylinders darstellt. Spiegelt man den Quadranten an der x, z-Ebene und die damit erhaltene Schleife an der x, y-Ebene, so erhält man die vollständige Kurve, die eine an die Lemniskate erinnernde Gestalt hat.

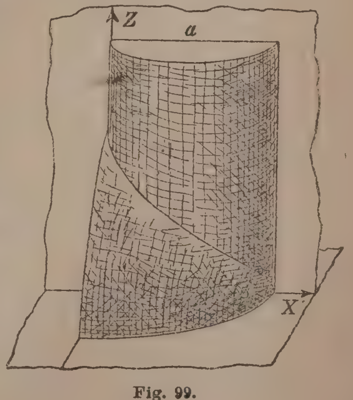


Fig. 99.

An die Darstellung (1), S. 266, einer ebenen Kurve schließt sich diejenige einer *„Raumkurve“ durch drei Gleichungen:*

(5) $$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t)$$

an, in denen die Koordinaten x, y, z der Kurvenpunkte als Funktionen einer vierten unabhängigen Variablen t gegeben sind. Wie schon S. 266 bemerkt wurde, entspricht diese Darstellung der Denkweise der Mechanik, nach der die Kurve im Laufe der durch t gemessenen Zeit von einem materiellen Punkte (x, y, z) beschrieben wird (s. „A. G.“, § 57). So wird eine durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) hindurchlaufende Gerade, die gegen die positiven Achsen die Richtungsunterschiede α, β, γ bildet, durch:

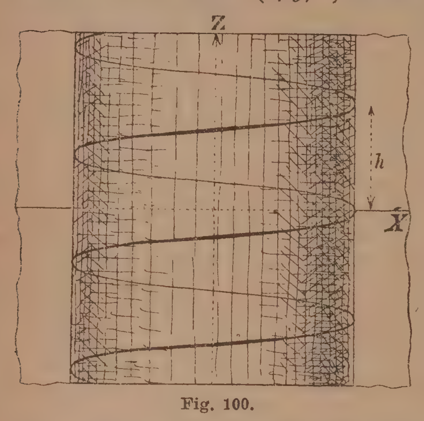


Fig. 100.

(6) $$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases}$$

dargestellt (s. „A. G.“, § 64). Die *„zylindrische Schraubenlinie“*, die in Fig. 100 skizziert ist, wird dargestellt durch:

(7) $$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi}t.$$

Die Projektion (x, y) des Punktes (x, y, z) auf die x, y-Ebene läuft mit konstanter Geschwindigkeit auf der Peripherie des Kreises vom Radius a um den Nullpunkt herum, während sich der Punkt (x, y, z) zugleich mit konstanter Geschwindigkeit hebt. Zur Zeit $t = 0$ läuft er an der Stelle $x = 1$, $y = 0$ durch die x, y-Ebene hindurch und hat nach einem einmaligen Umlaufe auf der Mantelfläche des in der Figur skizzierten Kreiszylinders (d. h. „zur Zeit $t = 2\pi$“) die Höhe $z = h$, die sogenannte „Ganghöhe“ der Schraubenlinie, über der x, y-Ebene erreicht.

Von (5) gelangt man leicht durch Elimination von t zur Darstellung (3) der Raumkurve zurück. Eliminieren wir speziell zwischen den beiden ersten Gleichungen (5) die Variable t, so ergibt sich eine Gleichung $f(x, y) = 0$, welche z nicht enthält und demnach (s. „A. G.“, § 56) einen Zylinder mit zur z-Achse parallelen Mantellinien darstellt. Man kann diesen Zylinder dadurch herstellen, daß man die Raumkurve auf die x, y-Ebene projiziert; die Projektionsstrahlen liefern dann einfach die Mantellinien des Zylinders. Bei der Schraubenlinie (7) kommt dabei natürlich der gerade Kreiszylinder $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ heraus (s. Fig. 100). Projizieren wir die Schraubenlinie auf die x, z-Ebene (Papierebene der Fig. 100), so wird die Zylindergleichung:

$$x = a\cos\frac{2\pi z}{h};$$

sie schneidet die x,z-Ebene in einer „verallgemeinerten Sinuskurve“ (s. S. 85), welche in der Papierebene der Fig. 100 direkt gezeichnet vorliegt.

Will man vom Gleichungenpaar (3) einer Raumkurve zu einer Darstellung (5) dieser Kurve übergehen, so kann man eine der Funktionen φ, ψ, χ, etwa die letzte, willkürlich wählen. Die beiden anderen Funktionen bestimmen sich dann durch Lösung der beiden Gleichungen:

$$f(x, y, \chi(t)) = 0, \qquad g(x, y, \chi(t)) = 0$$

nach x und y. Im Falle der Kurve (4) wählt man am zweckmäßigsten $\chi(t) = a \sin t$; dann gewinnt man nämlich die Darstellung:

$$x = a \cos^2 t, \qquad y = a \cos t \sin t, \qquad z = a \sin t$$

und beschreibt die Kurve gerade vollständig, wenn man t von 0 bis 2π wachsen läßt.

Auch bei den *Flächen* bedient man sich vielfach einer Darstellung, die sich an (5) anschließt, nämlich *durch ein System von drei Gleichungen:*

$$(8) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v),$$

in denen die drei Koordinaten der Flächenpunkte (x, y, z) als Funktionen *zweier* unabhängiger Variablen u, v dargestellt sind. Um zur Schreibweise $z = f(x, y)$ der Flächengleichung zurückzugelangen, denken wir etwa die beiden ersten Gleichungen (8) bei gegebenen x, y nach u und v gelöst und tragen die Lösungen in die dritte Gleichung ein. Umgekehrt kann man hier, wenn es gilt, etwa von einer Gleichung $z = f(x, y)$ zu einem Systeme (8) überzugehen, sogar zwei unter den Funktionen φ, ψ, χ, etwa φ und ψ, willkürlich wählen und berechnet dann die dritte Funktion in der Gestalt:

$$z = f(\varphi(u, v),\ \psi(u, v)).$$

Eine zweckmäßige Darstellung des Ellipsoides in der Gestalt (8) ist:

$$(9) \qquad x = a \cos u \cos v, \qquad y = b \cos u \sin v, \qquad z = c \sin u;$$

die Fläche wird hier gerade einmal vollständig beschrieben, wenn wir u und v auf die Intervalle beschränken:

$$-\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq +\frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqq v < 2\pi.$$

Ein weiteres Beispiel liefern uns die drei Gleichungen:

$$(10) \qquad x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = \frac{h}{2\pi} v,$$

in denen $u \geqq 0$ sei und v unbeschränkt variabel zu denken ist. Die dargestellte Fläche ist die „*Schraubenfläche*“ der „Ganghöhe“ h, die die z-Achse zur Achse hat. Wir erzeugen die Fläche durch einen von der z-Achse ausziehenden horizontalen Strahl, der sich um die z-Achse mit konstanter

Geschwindigkeit dreht und sich dabei mit gleichfalls konstanter Geschwindigkeit hebt. Für $v = 0$ fällt der Strahl mit der positiven x-Achse zusammen; nach einem vollen Umlaufe ($v = 2\pi$) hat er sich bis zur „Ganghöhe" h über die x, y-Ebene erhoben.

Halten wir in (8) die Größe v fest, während u variabel bleibt, so haben wir mit einem Gleichungssysteme der Art (5) zu tun und gelangen zu *einer auf der Fläche verlaufenden Kurve.* Den verschiedenen Werten v entspricht eine „*Schar*" *von Kurven*, von der wir uns die Fläche überspannt vorzustellen haben; v wird dann als „*Parameter*" der Kurvenschar bezeichnet, wobei dem einzelnen Werte des Parameters eine Kurve der Schar zugeordnet ist. Zu einer zweiten Schar von Kurven auf unserer Fläche gelangen wir offenbar, wenn wir u als Parameter ansehen und bei stehendem Werte desselben v als variabel auffassen. Auf der Schraubenfläche (10) haben wir für v als Parameter die Schar der von der z-Achse ausziehenden geradlinigen Strahlen, mit denen wir die Fläche herstellten. Nehmen wir aber u als Parameter, so gelangen wir zu einer Schar von Schraubenlinien, deren einzelne durch den geraden Kreiszylinder der Gleichung $x^2 + y^2 - u^2 = 0$ auf der Schraubenfläche ausgeschnitten wird.

Sehr bekannt ist die Darstellung (8) des *einschaligen Hyperboloids* der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{11}$$

Man hat hier zu setzen:

$$x = a\frac{uv+1}{u+v}, \qquad y = b\frac{v-u}{u+v}, \qquad z = c\frac{uv-1}{u+v}, \tag{12}$$

wobei u und v als unbeschränkt variabel anzusehen sind; in der Tat führt die Elimination von u und v aus den Gleichungen (12) leicht zur Gleichung (11) zurück. Die Kurvenschar des Parameters v kann man statt durch die drei Gleichungen (12) auch durch die beiden vermittelst der Elimination von u gewinnbaren Gleichungen:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v\left(1 - \frac{y}{b}\right), \qquad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = v^{-1}\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

darstellen; wir haben damit die eine „*Geradenschar*" *des Hyperboloids* gewonnen. Entsprechend erhält man für den Parameter u die zweite Geradenschar unserer Fläche (s. das Nähere in „A. G.", § 77 ff., wo auch die entsprechenden Ausführungen über das hyperbolische Paraboloid zu finden sind).

2. Tangentialebenen, Tangenten, Normalen und Normalebenen bei Flächen und Kurven. Die Gleichung einer *Fläche* setzen wir erstlich in der Gestalt $z = f(x, y)$ gegeben voraus und nehmen an, daß in einem zur näheren Untersuchung gewählten Bereiche der Zahlenebene $f(x, y)$ ein-

deutig und stetig sei und gleichfalls eindeutige und stetige Ableitungen $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ habe. Bereits S. 149ff. hatten wir durch die z-Koordinate eines einzelnen Flächenpunktes (x, y, z) irgend eine Ebene gelegt und gefunden, daß die Schnittkurve dieser Ebene mit der Fläche im Punkte (x, y, z) eine Tangente besitzt, die wir jetzt auch als *eine Tangente der Fläche im Punkte* (x, y, z) bezeichnen wollen. Drehen wir jene Ebene um die z-Koordinate, so ergibt sich eine ganze Schar von Tangenten der Fläche im Punkte (x, y, z), und wir fanden (S. 151), *daß die Gesamtheit dieser Tangenten eine durch:*

$$(1) \qquad \zeta - z = (\xi - x)\cdot f_x'(x,y) + (\eta - y)\cdot f_y'(x,y)$$

dargestellte Ebene bildet, welche wir bereits damals als „Tangentialebene" der Fläche im Punkte (x, y, z) *bezeichneten.*[1])

Ist zweitens eine *Raumkurve* durch drei Gleichungen (5) S. 312 gegeben, so seien in einem gewissen Intervalle der Variablen t die Funktionen φ, ψ, χ eindeutig und stetig und mögen daselbst ebensolche Ableitungen erster Ordnung besitzen. Zwei dem Intervall angehörende Werte t und $t_1 = t + \Delta t$ mögen die Punkte P und P_1 der Kurve mit den Koordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 liefern. Für x_1, y_1, z_1 können wir schreiben:

$$x_1 = \varphi(t+\Delta t) = \varphi(t) + \varphi'(t+\vartheta_1\Delta t)\Delta t = x + \varphi'(t+\vartheta_1\Delta t)\Delta t,$$

. . . .

und finden hieraus die Proportion:

$$(2) \quad (x_1 - x):(y_1 - y):(z_1 - z) = \varphi'(t+\vartheta_1\Delta t):\psi'(t+\vartheta_2\Delta t):\chi'(t+\vartheta_3\Delta t).$$

Die links stehenden Koordinatendifferenzen sind (s. „A. G.", § 64) proportional zu den „Richtungskosinus" der Sekante PP_1, d. i. zu den Kosinus der drei Richtungsunterschiede, welche die etwa von P nach P_1 gerichtete Kurvensekante gegen die positiven Achsen bildet. Da für $\lim \Delta t = 0$ die in (2) rechts stehenden Glieder der Proportion die Grenzwerte $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ haben, so folgt: *Für* $\lim \Delta t = 0$ *nähert sich die durch* P *und* P_1 *laufende Kurvensekante einer festen Grenzlage an, die uns die „Tangente" der Raumkurve in dem zum Werte* t *gehörenden Punkte* P *der Koordinaten* x, y, z *liefert; die Gleichungen der Tangente, in* ξ, η, ζ *als variablen Koordinaten geschrieben, sind* (s. „A. G.", § 64):

$$(3) \qquad \frac{\xi - x}{\varphi'(t)} = \frac{\eta - y}{\psi'(t)} = \frac{\zeta - z}{\chi'(t)}.$$

Wir können die Tangentialebenengleichung (1) auch so schreiben:

$$\zeta - z = (\xi - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial z}{\partial y}$$

---

1) Statt X, Y, Z schreiben wir jetzt ξ, η, ζ für die variablen Koordinaten der Punkte der Tangentialebene.

und wollen aus dieser Schreibweise eine weitere Gestalt dieser Gleichung für den Fall ableiten, daß die Flächengleichung die Gestalt $f(x, y, z) = 0$ hat. Die partiellen Ableitungen von z nach x und y berechnen sich dann nach der Regel (8) S. 154, und wir gewinnen als *Gleichung der Tangentialebene der durch $f(x, y, z) = 0$ dargestellten Fläche im Punkte (x, y, z):*

(4) $$(\xi - x)f_x' + (\eta - y)f_y' + (\zeta - z)f_z' = 0,$$

wo in f_x', f_y', f_z' die Koordinaten x, y, z des Berührungspunktes als Argumente zu denken sind.

Zur Gleichung (4) führt auch folgender Weg: Irgend eine durch den Punkt (x, y, z) der Fläche hindurchlaufende Gerade stellen wir nach (6) S. 312 durch:

(5) $$\xi = x + at, \qquad \eta = y + bt, \qquad \zeta = z + ct$$

dar, unter a, b, c die Richtungskosinus der Geraden verstanden. Um die Schnittpunkte der Geraden mit der Fläche zu gewinnen, haben wir diejenigen Werte t zu berechnen, welche $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ befriedigen; diese Gleichung entwickelt sich mit Rücksicht auf $f(x, y, z) = 0$ nach der auf Funktionen dreier unabhängiger Variablen übertragenen Gleichung (4) S. 197 so:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = (af_x' + bf_y' + cf_z')t + \frac{1}{2}(a^2 f_{xx}'' + \cdots)t^2 + \cdots = 0.$$

Die stets vorliegende Lösung $t = 0$ liefert den Schnittpunkt (x, y, z). Soll noch ein zweiter Schnittpunkt an diese Stelle rücken und damit die Gerade (5) zu einer Flächentangente werden, so muß eine Doppelwurzel $t = 0$ vorliegen und also:

$$af_x' + bf_y' + cf_z' = 0$$

zutreffen. Ist aber diese Relation für die Richtungskosinus der Geraden erfüllt, so befriedigt jeder Punkt (ξ, η, ζ) der Geraden die Gleichung:

$$(\xi - x)f_x' + (\eta - y)f_y' + (\zeta - z)f_z' = (af_x' + bf_y' + cf_z')t = 0,$$

womit wir zur Tangentialebenengleichung (4) zurückgelangen.

Ist ferner eine Raumkurve durch ein Gleichungenpaar (3) S. 311 gegeben, so können wir zu einer entsprechenden Darstellung der Tangentengleichungen in einem Punkte (x, y, z) an die Tatsache anknüpfen, daß die Kurventangente die Schnittgerade der beiden Tangentialebenen ist, welche die durch Gleichungen (3) S. 311, einzeln genommen, dargestellten Flächen im Punkte (x, y, z) haben. *Die Kurventangente im Punkte (x, y, z) ist daraufhin durch:*

(6) $$\begin{cases}(\xi - x)f_x' + (\eta - y)f_y' + (\zeta - z)f_z' = 0,\\ (\xi - x)g_x' + (\eta - y)g_y' + (\zeta - z)g_z' = 0\end{cases}$$

dargestellt; durch Auflösung nach den Verhältnissen der $(\xi - x)$, $(\eta - y)$, $(\zeta - z)$ *können wir auch die an* (3) *sich anschließende Gestalt berechnen:*

(7) $$\frac{\xi - x}{f'_y g'_z - f'_z g'_y} = \frac{\eta - y}{f'_z g'_x - f'_x g'_z} = \frac{\zeta - z}{f'_x g'_y - f'_y g'_x}.$$

Ist die Fläche durch drei Gleichungen (8) S. 313 gegeben, so gelangt man auf folgendem Wege zur Tangentialebene: Durch den „Punkt (u, v)" läuft je eine Kurve der beiden S. 314 betrachteten Scharen hindurch. Die Kurve des „Parameters v" hat daselbst zufolge (3) die durch die Gleichungen:

$$\frac{\xi - x}{\varphi'_u} = \frac{\eta - y}{\psi'_u} = \frac{\zeta - z}{\chi'_u}$$

gegebene Tangente, die zugleich eine Flächentangente im fraglichen Punkte ist. Eine zweite Flächentangente im Punkte (u, v) wird von der Kurve des Parameters u durch die Gleichungen:

$$\frac{\xi - x}{\varphi'_v} = \frac{\eta - y}{\psi'_v} = \frac{\zeta - z}{\chi'_v}$$

geliefert. *Die gesuchte Tangentialebene ist nun einfach die durch diese beiden Tangenten festgelegte Ebene, deren Gleichung sich daraufhin leicht so darstellt:*

(8) $$(\xi - x)(\psi_u' \chi_v' - \psi_v' \chi_u') + (\eta - y)(\chi_u' \varphi_v' - \chi_v' \varphi_u') \\ + (\zeta - z)(\varphi_u' \psi_v' - \varphi_v' \psi_u') = 0.$$

Die zur Tangentialebene einer Fläche im Berührungspunkte senkrecht verlaufende Gerade wird als *„Normale" der Fläche im fraglichen Punkte* (x, y, z) bezeichnet; im Anschluß an (4) notieren wir als Gleichungen der Normalen:

(9) $$\frac{\xi - x}{f'_x} = \frac{\eta - y}{f'_y} = \frac{\zeta - z}{f'_z}.$$

Entsprechend nennt man die Ebene, welche zur Tangente einer Raumkurve im Berührungspunkte (x, y, z) senkrecht verläuft, die *„Normalebene" der Raumkurve im Punkte* (x, y, z); als Gleichung der Normalebene merken wir im Anschluß an (3) an:

(10) $$(\xi - x)\varphi'(t) + (\eta - y)\psi'(t) + (\zeta - z)\chi'(t) = 0.$$

Was die Gültigkeit der entwickelten Regeln angeht, so greift die Gleichung (4) der Tangentialebene etwas weiter als (1), insofern (4) auch für $f_z' = 0$, d. h. für eine zur z-Achse parallele Tangentialebene, gültig bleibt. Der zweite, an die Gleichungen (5) angeschlossene Beweis der Gleichung (4) bleibt auch in diesem Falle in Kraft, während die zur Aufstellung von (1) führende Überlegung hier unbrauchbar wird, da die in dieser Gleichung auftretenden f_x', f_y' nicht mehr endlich sind. Gleich-

zeitiges Verschwinden aller drei Ableitungen $f_x', f_y' f_z'$ der auf der linken Seite der Flächengleichung $f(x, y, z) = 0$ stehenden Funktion in einem Flächenpunkte (x, y, z) würde diesen Punkt nach Analogie von S. 308 als einen „*singulären*" charakterisieren; auf die Untersuchung solcher Punkte gehen wir jedoch nicht ein.

Die Gleichungen (3) der Tangente einer Raumkurve müssen einer einfachen Umgestaltung unterzogen werden, falls für den betrachteten Berührungspunkt eine oder zwei von den in den Nennern stehenden Ableitungen verschwinden. Ist etwa $\chi'(t) = 0$ und damit die Tangente horizontal (parallel zur x, y-Ebene), so hat man statt der Gleichungen (3) zu schreiben:

$$\frac{\xi - x}{\varphi'(t)} = \frac{\eta - y}{\psi'(t)}, \qquad \zeta = z.$$[1]

Etwaige „singuläre" Punkte der Raumkurve, in denen alle drei Ableitungen $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)$ gleichzeitig verschwinden sollten, untersuchen wir wieder nicht weiter.

3. Beispiele über Tangentialebenen, Tangenten, Normalen und Normalebenen bei Flächen und Kurven. 1. Die allgemeinen Regeln des vorigen Paragraphen erläutern wir erstlich am *Hyperboloid* der Gleichung (11) S. 314, bei dem die Gleichung (4) S. 316 der Tangentialebene:

$$(\xi - x)\frac{2x}{a^2} + (\eta - y)\frac{2y}{b^2} - (\zeta - z)\frac{2z}{c^2} = 0$$

wird. Nach Forthebung des Faktors 2 und Benutzung der Gleichung (11) S. 314 folgt als einfachste Gestalt der Tangentialebenengleichung:

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} - \frac{\zeta z}{c^2} = 1.$$

Diese Gleichung läßt sich, wenn wir für x, y, z die Ausdrücke (12) S. 314 in u, v eintragen, leicht auf die Form bringen:

$$\left(\frac{\xi}{a} - \frac{\zeta}{c}\right)uv + \left(\frac{\xi}{a} + \frac{\zeta}{c}\right) = \left(1 + \frac{\eta}{b}\right)u + \left(1 - \frac{\eta}{b}\right)v.$$

In der Tangentialebene liegt also sowohl die durch:

$$\frac{\xi}{a} + \frac{\zeta}{c} = v\left(1 - \frac{\eta}{b}\right), \qquad v\left(\frac{\xi}{a} - \frac{\zeta}{c}\right) = \left(1 + \frac{\eta}{b}\right)$$

gegebene Gerade, als auch die Gerade der Gleichungen:

$$\frac{\xi}{a} + \frac{\zeta}{c} = u\left(1 + \frac{\eta}{b}\right), \qquad u\left(\frac{\xi}{a} - \frac{\zeta}{c}\right) = 1 - \frac{\eta}{b}.$$

Das sind aber die beiden durch den Punkt (u, v) des Hyperboloids hindurchlaufenden Geraden der Fläche; aus der zur Gleichung (8) S. 317

1) Eine entsprechende Bemerkung gilt für die Gleichungen (9) der Normalen.

führenden Betrachtung ist natürlich auch geometrisch einleuchtend, daß die beiden Geraden die Tangentialebene ihres Schnittpunktes festlegen.

2. Die Tangente der in Fig. 99 abgebildeten *Raumkurve* (4) S. 311 im Punkte (x, y, z) ist nach (7) S. 317 darstellbar durch:

$$-\frac{\xi - x}{2yz} = \frac{\eta - y}{(2x - a)z} = \frac{\zeta - z}{ay}.$$

Benutzt man die S. 313 angegebene Darstellung der Raumkurve mittelst einer vierten Variablen t, so ist für die Tangente nach (3) S. 315 zu schreiben:

$$-\frac{\xi - x}{\sin 2t} = \frac{\eta - y}{\cos 2t} = \frac{\zeta - z}{\cos t}.$$

Verschwinden Ausdrücke in den Nennern, wie z. B. bei den letzten Gleichungen, wenn t ein Multiplum von $\frac{\pi}{4}$ ist, so sind besondere Gleichungen anzusetzen. So hat man z. B. für $t = 0$ das Gleichungenpaar $\xi = a$, $\eta = \zeta$, für $t = \frac{\pi}{4}$, wo die Tangente zur x, z-Ebene parallel wird, das Paar:

$$2\xi + 2\sqrt{2}\zeta = 3a, \qquad 2\eta = a.$$

3. Für die Normalebenengleichung (10) S. 317 der *Schraubenlinie* (7) S. 312 findet man:

$$-a\xi \sin t + a\eta \cos t + \frac{h}{2\pi}\zeta = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 t.$$

Die Normalebene enthält die zum „Parameter“ $v = t$ gehörende Gerade der Schraubenfläche (10) S. 313, und übrigens hat ihr Neigungswinkel γ gegen die x, y-Ebene den von t unabhängigen Wert:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + (2a\pi)^2}}\right),$$

wie nach bekannten Regeln („A. G.“, § 59) bewiesen wird und auch aus Fig. 100, S. 312, leicht ersichtlich ist.

Aufgaben: 1) Man zeige, daß bei den durch die gemeinsame Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

darstellbaren zentralen Flächen zweiten Grades die Tangentialebene durch:

$$\frac{\xi x}{a^2} \pm \frac{\eta y}{b^2} \pm \frac{\zeta z}{c^2} = 1$$

gegeben ist.

2) Man berechne für die beiden Paraboloide der Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

als Tangentialebenengleichungen:

$$\frac{\xi x}{a^2} \pm \frac{\eta y}{b^2} - \zeta = z.$$

3) Man stelle das hyperbolische Paraboloid durch drei Gleichungen (8) S. 313 dar und zeige, daß die Tangentialebene des Punktes (u, v) auf der Fläche die beiden durch diesen Punkt hindurchlaufenden Geraden ausschneidet. — Die Darstellung des Paraboloids ist:

$$x = a(u + v), \qquad y = b(u - v), \qquad z = 2uv;$$

die Tangentialebene des Punktes (u, v) hat die Gleichung:

$$\frac{\xi}{a}(u + v) - \frac{\eta}{b}(u - v) = \zeta + 2uv,$$

die auch so geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b}\right)u + \left(\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b}\right)v - \zeta = 2uv.$$

Den Übergang zu den Gleichungen des Geradenpaares durch den Punkt (u, v) vollzieht man wie im Texte beim Hyperboloid.

4) Man untersuche die als „*konische Schraubenlinie*“ bezeichnete Kurve, welche als Schnitt der Schraubenfläche (10) S. 313 mit dem koaxialen Kegel der Gleichung $a^2(x^2 + y^2) = z^2$ erklärt werden kann. — Der oberhalb der x,y-Ebene gelegene Teil der Kurve ist durch die Gleichungen:

$$x = t \cdot \cos\left(\frac{2a\pi}{h}t\right), \qquad y = t \cdot \sin\left(\frac{2a\pi}{h}t\right) \qquad z = at$$

darstellbar, in denen t von 0 bis $+\infty$ zu wachsen hat. Man zeige, daß die Gleichung der Normalebene im „Punkte t“ die Gestalt hat:

$$\left(\xi + \frac{2a\pi}{h}t\eta\right)\cos\left(\frac{2a\pi}{h}t\right) + \left(\eta - \frac{2a\pi}{h}t\xi\right)\sin\left(\frac{2a\pi}{h}t\right) + a\zeta = (1 + a^2)t.$$

Man zeige, daß die Projektion der Kurve auf die x,y-Ebene eine Archimedische Spirale (S. 271) ist.

5) Ein gerader Kreiskegel der Höhe h, der Mantellinie m und des Grundkreisradius r rolle ohne zu gleiten auf der x,y-Ebene, wobei die Kegelspitze im Nullpunkte festliege. Die von einem Punkte der Peripherie des Grundkreises beschriebene Raumkurve, die sogenannte „*sphärische Zykloide*“, ist zu untersuchen. — Zur Zeit $t = 0$ lagere der Kegel längs einer Mantellinie auf der positiven x-Achse; der daselbst bei $x = m$ gelegene Berührungspunkt des Grundkreises mit der x,y-Ebene werde in seiner Bahn verfolgt. Als Zeitmaß t kann der Winkel gewählt werden, um den sich in der x,y-Ebene die berührende Mantellinie gegen die positive x-Achse gedreht hat. Dreht man das Achsenkreuz um die z-Achse mit, so daß die berührende Mantellinie beständig die x-Achse ist, und nennt die Koordinaten, bezogen auf das bewegliche System, x', y', z', so gilt:

$$x' = x\cos t + y\sin t, \qquad y' = -x\sin t + y\cos t, \qquad z' = z.$$

Bis zur Zeit t ist durch die Endpunkte der berührenden Mantellinien der Kreisbogen mt beschrieben, den man auf einen Kreisbogen des Zentriwinkels $\frac{mt}{r}$ des Kegelgrundkreises aufzuwickeln hat, um festzustellen, wie weit sich der die Kurve beschreibende Punkt P zur Zeit t vom augenblicklichen Berührungspunkte B mit der x,y-Ebene entfernt hat. Zur Veranschaulichung ist erstens in Fig. 101 der Grundkreis des Kegels zur Zeit t gezeichnet, wo also $\sphericalangle PCB = \frac{m}{r}t$ ist,

zweitens in Fig. 102 ein axialer Schnitt des Kegels zur Zeit t, wobei die Bezeichnungen B, C, D dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 101 und die Kegel-

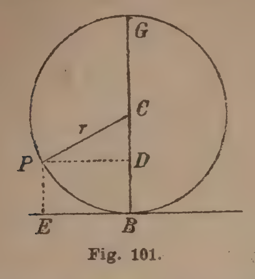


Fig. 101.

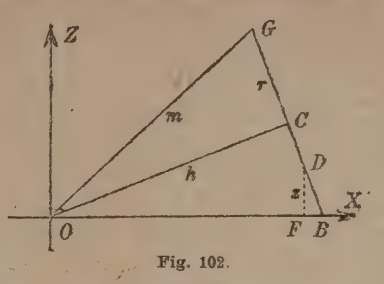


Fig. 102.

grundfläche längs des Durchmessers BG senkrecht zur Papierebene steht. Man zeige unter Benutzung dieser Figuren die drei Gleichungen:

$$x \cos t + y \sin t = \frac{h^2}{m} + \frac{r^2}{m} \cos\left(\frac{m}{r} t\right),$$

$$x \sin t - y \cos t = r \sin\left(\frac{m}{r} t\right),$$

$$z = \frac{hr}{m}\left(1 - \cos\left(\frac{m}{r} t\right)\right),$$

aus denen man durch Auflösung nach x und y eine Darstellung (5) S. 312 der sphärischen Zykloide gewinnt.

Da die Kurve auf der Kugel des Radius m um den Nullpunkt O liegt, so ist jede Tangente der Kurve zugleich eine Kugeltangente, und also läuft jede Normalebene durch den Nullpunkt O. Man bestätige das durch Rechnung. — Im festen Koordinatensysteme hat die Normalebene die Gleichung:

$$(\xi \sin t - \eta \cos t)\left(1 - \cos\left(\frac{m}{r} t\right)\right) - \zeta \frac{m}{h} \sin\left(\frac{m}{r} t\right) = 0;$$

die Normalebene ist also durch den Kurvenpunkt (x, y, z) und die zur Zeit t die x,y-Ebene berührende Mantellinie festgelegte Ebene.

4. Gestalt einer Raumkurve in der Umgebung eines ihrer Punkte. Eine Raumkurve sei durch drei Gleichungen (5) S. 312 gegeben, und es sei vorausgesetzt, daß in einem der Untersuchung zugrunde liegenden Intervalle der Variablen t die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ eindeutig und stetig seien, sowie eindeutige und stetige Ableitungen besitzen, soweit wir dieselben in der Folge zu benutzen haben werden.

Wir fragen erstlich, wie wir die *Bogenlänge* der Kurve erklären können. Eliminieren wir aus $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ die Variable t, so ergibt sich die Gleichung derjenigen Zylinderfläche, welche bei Projektion der Kurve auf die x,y-Ebene von den projizierenden Strahlen geliefert wird. Die auf die x,y-Ebene projizierte Kurve können wir daselbst auch unmittelbar durch das Gleichungenpaar $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ darstellen. Dieser Projektion kommt nun eine Bogenlänge zu, die wir durch σ bezeichnen,

in der Richtung wachsender t als wachsend erklären, und deren Ableitung nach t:
$$\frac{d\sigma}{dt} = +\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$$
ist (s. S. 105 ff.). Die Zylinderfläche denken wir biegsam, aber nicht dehnbar. Wir können sie dann auf eine Ebene abwickeln, wobei unsere Raumkurve, ohne daß eine Dehnung oder Zusammenziehung derselben eintritt, in eine dieser Ebene angehörende Kurve übergeht. Zur Darstellung der ebenen Kurve benutzen wir σ als Abszisse und z als Ordinate, wobei diese Kurve durch ein Gleichungenpaar $\sigma = \omega(t)$, $z = \chi(t)$ gegeben ist. Auch die so erhaltene Kurve hat eine Bogenlänge s, deren Ableitung nach t durch:
$$\frac{ds}{dt} = +\sqrt{\omega'(t)^2 + \chi'(t)^2} = +\sqrt{\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \chi'(t)^2}$$
gegeben ist. Zufolge unserer Überlegung liefert nun aber s zugleich die Bogenlänge der Raumkurve: *Die von einem geeignet gewählten Anfangspunkte gemessene, mit wachsendem t wachsende Bogenlänge s der Raumkurve ist eine Funktion von t, deren Ableitung nach t durch:*

(1) $$\frac{ds}{dt} = +\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}$$

gegeben ist; bezeichnen wir die Produkte $\varphi'(t)dt$, $\psi'(t)dt$, $\chi'(t)dt$, als die zu t und dt gehörenden Differentiale der Funktionen x, y, z, durch dx, dy, dz, so ist das „Bogendifferential“ ds der Raumkurve auch so darstellbar:

(2) $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Es ist nun eine für geometrische Untersuchungen geeignete Maßregel, die Variable t unmittelbar mit s identisch zu nehmen[1]), wobei also die Koordinaten x, y, z der Kurvenpunkte als Funktionen der Bogenlänge s angesehen werden. Für die nach s genommenen Ableitungen der x, y, z sollen hinfort die Bezeichnungen gebraucht werden:

(3) $$\frac{dx}{ds} = x', \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = x'', \qquad \frac{d^3x}{ds^3} = x''', \qquad \frac{dy}{ds} = y', \cdots.$$

Die ersten Ableitungen x', y', z' haben eine leicht angebbare geometrische Bedeutung. Die Gleichungen der Kurventangente im Punkte (x, y, z) sind:

(4) $$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}.$$

Bildet die Tangente, im Sinne wachsender s gerichtet, gegen die positiven

1) Für die mechanische Erzeugung der Raumkurve läuft dies auf die Annahme hinaus, daß der die Kurve beschreibende materielle Punkt die konstante Geschwindigkeit 1 hat.

Achsen die Richtungsunterschiede α, β, γ, *so sind die* x', y', z' *unmittelbar die Richtungskosinus der Tangente der Kurve im Punkte* (x, y, z):

$$(5) \qquad x' = \frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad y' = \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \qquad z' = \frac{dz}{ds} = \cos\gamma.$$

Zunächst folgt nämlich aus (4) (s. „A. G.", § 64):

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = x' : y' : z'.$$

Da nun zufolge (2) die drei Ableitungen x', y', z' die Relation:

$$(6) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

für alle Argumente s befriedigen, so ergibt sich (s. „A. G.", § 51):

$$\cos\alpha = \pm x', \qquad \cos\beta = \pm y', \qquad \cos\gamma = \pm z';$$

es gelten aber die oberen Zeichen, da z. B. die Funktion x von s mit wachsendem s zu- oder abnimmt, je nachdem $\alpha < \frac{\pi}{2}$ oder $> \frac{\pi}{2}$ ist.

Als eine *Tangentialebene* der Kurve im Punkte (x, y, z) bezeichnen wir jede Ebene, die die Tangente (4) in sich enthält. Schreiben wir:

$$(7) \qquad A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$$

mit variablen Koordinaten ξ, η, ζ als Gleichung einer solchen Ebene, so kleidet sich die Forderung, daß sie die Tangente (4) enthält, in die Gleichung:

$$(8) \qquad Ax' + By' + Cz' = 0.$$

Eine unter diesen Ebenen können wir durch die Festsetzung auswählen, daß sie durch einen zweiten, zu $s_1 = s + \Delta s$ gehörenden Punkt x_1, y_1, z_1 der Kurve hindurchlaufe, was die weitere Bedingung für die A, B, C ergibt:

$$A(x_1 - x) + B(y_1 - y) + C(z_1 - z) = 0.$$

Nach dem Taylorschen Lehrsatze aber gilt für die Funktionen $x(s), \cdots$:

$$x_1 - x = x(s + \Delta s) - x(s) = x'(s)\,\Delta s + \frac{1}{2} x''(s + \vartheta_1 \Delta s) \cdot \Delta s^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so daß sich die zweite Gleichung für die A, B, C mit Rücksicht auf (8) so umgestalten läßt:

$$(9) \qquad A \cdot x''(s + \vartheta_1 \Delta s) + B \cdot y''(s + \vartheta_2 \Delta s) + C \cdot z''(s + \vartheta_3 \Delta s) = 0.$$

Diese Gleichung im Verein mit (8) reicht zur Berechnung der Verhältnisse der A, B, C für die ausgewählte Ebene aus.

Eine Tangentialebene hat mit der Kurve an der Stelle (x, y, z) im allgemeinen zwei zusammenfallende Punkte gemein. Sollte sich aber die aus (8) und (9) zu berechnende Tangentialebene für $\lim \Delta s = 0$ einer be-

stimmten Grenzlage annähern, so haben wir in dieser Grenzlage eine besondere Tangentialebene gewonnen, welche bei (x, y, z) die Kurve in *drei* zusammenfallenden Punkten schneidet. Für $\lim \varDelta s = 0$ folgt aus (9):

$$(10)\qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0,$$

und man berechnet aus (8) und (10) sofort:

$$(11)\qquad A : B : C = (y'z'' - y''z') : (z'x'' - z''x') : (x'y'' - x''y').$$

Wir nehmen an, daß die drei rechts stehenden Glieder der Proportion nicht zugleich verschwinden[1]) und sind damit zu folgendem Satze gelangt: *Unter den Tangentialebenen ist die durch:*

$$(12)\qquad (\xi - x)(y'z'' - y''z') + (\eta - y)(z'x'' - z''x') + (\zeta - z)(x'y'' - x''y') = 0$$

gegebene dadurch ausgezeichnet, daß sie die Kurve an der Stelle (x, y, z) *in drei zusammenfallenden Punkten schneidet; sie heißt die „Schmiegungsebene" der Raumkurve im Punkte* (x, y, z).

Die Normalebene der Kurve im Punkte (x, y, z):

$$(13)\qquad (\xi - x)x' + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0$$

steht zur Tangente und also auch zur Schmiegungsebene (12) senkrecht und schneidet die letztere in einer Geraden, welche man als die *„Hauptnormale"* der Kurve im Punkte (x, y, z) bezeichnet. *Die Gleichungen der Hauptnormalen sind*[2]):

$$(14)\qquad \frac{\xi - x}{x''} = \frac{\eta - y}{y''} = \frac{\zeta - z}{z''},$$

und also gilt für ihre Richtungskosinus, die wir unter Vorbehalt eindeutiger Erklärung $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ *nennen:*

$$(15)\qquad \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = x'' : y'' : z''.$$

Da nämlich die Gleichung (6) in s identisch besteht, so ergibt deren Differentiation nach s:

$$(16)\qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$$

oder in den Richtungskosinus geschrieben:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0.$$

Die Gerade (14) steht also senkrecht zur Tangente (s. „A. G.", § 52) und liegt demnach in der Normalebene. Weiter befriedigt der Punkt $\xi = x + x''$, $\eta = y + y''$, $\zeta = z + z''$ der Geraden (14) die Gleichung (12), so

1) Gleichzeitiges Verschwinden jener Ausdrücke kann an vereinzelten Punkten der Kurve auftreten. Sollte es indessen in einem ganzen Intervalle von s stattfinden, so heißt dies, daß die Quotienten der x', y', z' daselbst die Ableitungen 0 haben, also konstant sind. Zufolge der „identischen" Gleichung (6) sind also die x', y', z' selbst konstant, d. h. die Kurve ist eine Gerade.

2) Ein gleichzeitiges Verschwinden der x'', y'', z'' gilt als ausgeschlossen, da dann auch die drei Ausdrücke in (11) rechts verschwinden würden.

daß die Gerade (14) auch in der Schmiegungsebene liegt; die Gleichungen (14) liefern also die Hauptnormale.

Die zur Hauptnormalen senkrechte Tangentialebene der Gleichung:

$$(17)\qquad (\xi - x)x'' + (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' = 0$$

heißt die *„rektifizierende Ebene"* der Kurve im Punkte (x, y, z); ihr Schnitt mit der Normalebene aber wird die *„Binormale"* der Kurve im Punkte (x, y, z) genannt. *Die Richtungskosinus der Binormalen, die wir wieder unter Vorbehalt eindeutiger Erklärung durch* $\cos \mathsf{\Lambda}$, $\cos \mathsf{M}$, $\cos \mathsf{N}$ *bezeichnen, genügen der Proportion:*

$$(18)\qquad \cos \mathsf{\Lambda} : \cos \mathsf{M} : \cos \mathsf{N} = (y'z'' - y''z') : (z'x'' - z''x') : (x'y'' - x''y').$$

Die Binormale steht nämlich senkrecht zur Schmiegungsebene.

Die Tangente, die Hauptnormale und die Binormale nennt man zusammenfassend das den Kurvenpunkt (x, y, z) *„begleitende Dreikant"* der Raumkurve. Um die Gestalt der Kurve in der nächsten Umgebung einer Stelle (x, y, z) zu untersuchen, führen wir jene drei Geraden als neue Achsen eines rechtwinkligen Systems ein, und zwar die Tangente als X-Achse mit der positiven Richtung im Sinne wachsender s, die Hauptnormale als Y- und die Binormale als Z-Achse, wobei die Festlegung der positiven Richtungen der beiden letzten Achsen vorbehalten bleibt. Schreiben wir die neuen Koordinaten der Kurvenpunkte in Abhängigkeit von s:

$$X = \Phi(s), \qquad Y = \Psi(s), \qquad Z = \mathsf{X}(s)$$

und nehmen der Bequemlichkeit halber an der betrachteten Stelle (x, y, z) der Kurve $s = 0$ an, so gilt $\Phi(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$, $\mathsf{X}(0) = 0$, $\Psi'(0) = 0$, $\mathsf{X}'(0) = 0$, $\Phi''(0) = 0$, $\mathsf{X}''(0) = 0$, während $\Phi'(0)$ und $\Psi''(0)$ nicht verschwinden. Mit Hilfe der Taylorschen Formel können wir die X, Y, Z als Funktionen von s so entwickeln:

$$X = \Phi' \cdot s + \frac{1}{6}\Phi''' \cdot s^3 + \frac{1}{24}\Phi'''' \cdot s^4 + \cdots,$$

$$Y = \frac{1}{2}\Psi'' \cdot s^2 + \frac{1}{6}\Psi''' \cdot s^3 + \frac{1}{24}\Psi'''' \cdot s^4 + \cdots,$$

$$Z = \frac{1}{6}\mathsf{X}''' \cdot s^3 + \frac{1}{24}\mathsf{X}'''' \cdot s^4 + \cdots,$$

wobei Φ', Φ''', ... die Werte der Ableitungen für $s = 0$ sind.

Für gewöhnlich wird nun X''' nicht auch noch gleich 0 sein.[1]) Dann

1) In einzelnen Punkten der Kurve mag $\mathsf{X}'''(s)$ verschwinden. Wäre aber $\mathsf{X}'''(s)$ in einem ganzen Intervalle, dem der Punkt $s = 0$ angehört, gleich 0, so wäre, wie man durch wiederholte Anwendung des Satzes 1) von S. 130 zeigen kann, $\mathsf{X}(s)$ daselbst eine rationale ganze Funktion zweiten Grades $\mathsf{X}(s) = a + bs + cs^2$. Da aber $\mathsf{X}(0) = 0$, $\mathsf{X}'(0) = 0$, $\mathsf{X}''(0) = 0$ ist, so sind alle drei Koeffizienten a, b, c gleich 0, d. h. $\mathsf{X}(s) = Z$ verschwindet identisch; wir haben also im fraglichen Intervalle mit einer ebenen Kurve zu tun, was hier als ausgeschlossen zu gelten hat.

aber können wir in der nächsten Nähe des fraglichen Punktes (x, y, z), d. h. für sehr kleine Werte s, die Kurve angenähert durch:

$$(19) \qquad X = \Phi' \cdot s, \qquad Y = \frac{1}{2}\Psi'' \cdot s^2, \qquad Z = \frac{1}{6}\chi''' \cdot s^3$$

darstellen.

Es ist jetzt zunächst möglich, die positiven Richtungen der Y-Achse und der Z-Achse festzulegen. *Die erstere, und damit die Richtung der „Hauptnormalen" wählen wir so, daß $\Psi'' > 0$ ausfällt; die positive Z-Achse und damit die Richtung der „Binormalen" werde so gewählt, daß die drei Achsen X, Y, Z in dieser Anordnung ein „Rechtssystem" bilden* („A.-G.", § 48).

Nun folgt durch Elimination von s aus (19) das Gleichungenpaar:

$$(20) \qquad X^2 = 2\left(\frac{\Phi'^2}{\Psi''}\right) Y, \qquad X^3 = 6\left(\frac{\Phi'^3}{\chi'''}\right) Z.$$

Die erste Gleichung liefert als Projektion der „Näherungskurve" auf die X,Y-Ebene eine Parabel, die die positive Y-Achse (Hauptnormale) zur Achse und die X-Achse (Kurventangente) zur Scheiteltangente hat; die Projektion der Näherungskurve auf die X,Z-Ebene aber ist eine Kurve dritten Grades, welche die X-Achse (Kurventangente) zur Wendetangente hat und bei wachsendem X wachsende oder abnehmende Ordinaten Z hat, je nachdem Φ' und χ''' von gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen sind. Fig. 103 möge den Verlauf der Näherungskurve auf dem parabolischen Zylinder für den Fall gleicher Vorzeichen von Φ' und χ''' versinnlichen. *Die Raumkurve berührt die rektifizierende Ebene (X, Z-Ebene) und verläuft in der Umgebung der Stelle (x, y, z) ganz auf derjenigen Seite dieser Ebene, die durch die Richtung der Hauptnormalen gegeben ist; sie berührt auch die Schmiegungsebene (X, Y-Ebene), durch welche sie jedoch hindurchschreitet.*

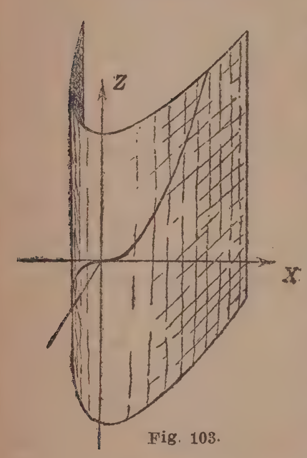


Fig. 103.

Die Schraubenlinie (7) S. 312 mit *positivem h* bezeichnet man als *„rechtsgewunden"* oder kurz als eine *„Rechtsschraube"*. Ist der Punkt $t = 0$ zugleich der Anfangspunkt für die Messung des Bogens s, so ist s zu t proportional, so daß man:

$$t = cs, \qquad \frac{dt}{ds} = c$$

mit einer *positiven Konstanten c* hat. Die Gleichung (12) der Schmiegungsebene berechnet sich daraufhin leicht zu:

$$(21) \qquad \xi \cdot h \sin t - \eta \cdot h \cos t + 2a\pi\zeta = aht.$$

Zu einem mit t nahe benachbarten Werte t_1 gehört der Kurvenpunkt:

$$x = a \cos t_1, \qquad y = a \sin t_1, \qquad z = \frac{h}{2\pi} t_1,$$

während zu eben diesen x, y als Ordinate ζ der Schmiegungsebene sich aus (21) berechnet:

$$\zeta = \frac{h}{2\pi}(t - \sin t \cdot \cos t_1 + \cos t \cdot \sin t_1) = \frac{h}{2\pi}(t + \sin(t_1 - t)).$$

Die Differenz der beiden Ordinaten z und ζ ist somit:

$$z - \zeta = \frac{h}{2\pi}\{(t_1 - t) - \sin(t_1 - t)\},$$

so daß für $t_1 > t$ auch $z > \zeta$ und für $t_1 < t$ auch $z < \zeta$ ist. *Die rechts gewundene Schraubenlinie tritt also, wie auch die Anschauung leicht lehrt, bei wachsendem s jedesmal von unten nach oben, d. i. in der Richtung wachsender z durch die Schmiegungsebene hindurch.*

Die in Fig. 103 für eine beliebige Raumkurve im Falle gleicher Vorzeichen von Φ' und X''' gegebene Skizze zeigt, daß hier in betreff des Durchgangs durch die Schmiegungsebene die Verhältnisse einer rechtsgewundenen Schraubenlinie vorliegen. *Es soll demnach in diesem Falle unsere Raumkurve an der Stelle (x, y, z) als „rechtsgewunden" bezeichnet werden, im entgegengesetzten Falle aber als „linksgewunden".* Als Kennzeichen einer im einzelnen Punkte (x, y, z) rechts- oder linksgewundenen Kurve merken wir einstweilen an, *daß im besonderen Koordinatensysteme der X, Y, Z für den ersten Fall $\Phi' X''' > 0$, für den zweiten Fall aber $\Phi' X''' < 0$ ist.*

5. Die Krümmung der Raumkurven. Bei einer Raumkurve unterscheidet man *zwei Krümmungen*, deren erste als „*Flexion*" (Biegung) und deren zweite als „*Torsion*" (Verdrehung) bezeichnet wird.[1]) Es seien P und P_1 zwei nahe benachbarte Punkte der Kurve, die das Bogenstück Δs einschließen. Die beiden Tangenten in P und P_1, die sich im allgemeinen nicht schneiden, mögen den Richtungsunterschied δ miteinander bilden und die beiden Schmiegungsebenen in P und P_1 den Neigungswinkel ε. Wir nehmen Δs positiv an und setzen fest, daß auch δ positiv gewählt werde, während ε mit dem positiven oder dem negativen Vorzeichen versehen werden soll, je nachdem die Kurve im fraglichen Intervalle rechts oder links gewunden erscheint. Der Winkel ε kann auch als Richtungsunterschied der beiden Binormalen der Kurve in den Punkten P und P_1 aufgefaßt werden.

Es gelten nun folgende Erklärungen: *Als mittlere „Flexion" oder mittlere „erste Krümmung" $\varkappa$ der Kurve längs des von P und P_1 einge-*

1) Die Raumkurven heißen demnach auch „*Kurven doppelter Krümmung*".

grenzten Stückes wird das Verhältnis des Richtungsunterschiedes δ *der Tangenten und der Bogenlänge* Δs *bezeichnet, als mittlere „Torsion" oder mittlere „zweite Krümmung"* τ *das Verhältnis des Richtungsunterschiedes* ε *der Binormalen und der Bogenlänge* Δs:

$$(1) \qquad \varkappa = \frac{\delta}{\Delta s}, \qquad \tau = \frac{\varepsilon}{\Delta s}.$$

Hieran reihen sich genau wie bei den ebenen Kurven folgende weitere Erklärungen: *Als „Flexion" oder „erste Krümmung" der Raumkurve an der Stelle P bezeichnet man den Grenzwert der eben erklärten mittleren Flexion für* $\lim \Delta s = 0$; *ebenso ist die „Torsion" oder „zweite Krümmung" der Raumkurve an der Stelle P der Grenzwert der mittleren Torsion für* $\lim \Delta s = 0$. *Nennen wir diese Grenzwerte gleich selbst wieder* $\varkappa$ *und* τ, *so ist also:*

$$(2) \qquad \varkappa = \lim_{\Delta s = 0} \left(\frac{\delta}{\Delta s}\right), \qquad \tau = \lim_{\Delta s = 0} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta s}\right).$$

Die Existenz dieser Grenzwerte unter der oben gemachten Voraussetzung der Existenz der Ableitungen beweisen wir durch wirkliche Berechnung von $\varkappa$ und τ.

Diesem Zwecke dient folgende Hilfsbetrachtung: Um den Nullpunkt O des Koordinatensystems legen wir die Kugel des Radius 1 und ziehen parallel und gleichgerichtet zur Tangente, Hauptnormale und Binormale des Punktes P die drei Kugelradien, deren Endpunkte T, H und B heißen mögen. Unter Benutzung der Bezeichnungen von S. 323ff. hat T die Koordinaten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, der Punkt H aber $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ und der Punkt B endlich $\cos \Lambda$, $\cos \mathrm{M}$, $\cos \mathrm{N}$. Läßt man jetzt P stetig die Raumkurve durchlaufen, so beschreibt der Punkt T (wegen der Existenz und Stetigkeit der Ableitungen) auf der Kugelfläche stetig eine Kurve, die man als die *„sphärische Indikatrix" der Tangenten* unserer Raumkurve bezeichnet; entsprechend beschreibt der Radiusendpunkt H die *„sphärische Indikatrix" der Hauptnormalen* und der Endpunkt B diejenige der *Binormalen.*

Gehören nun zum Kurvenpunkte P_1 die Punkte T_1 und B_1 der ersten und dritten Indikatrix, so sind die oben mit δ und ε bezeichneten Winkel durch die Bogen größter Kugelkreise:

$$\delta = +\widehat{TT_1}, \qquad \varepsilon = \pm\widehat{BB_1}$$

gegeben. Da aber beim Grenzübergange $\lim \Delta s = 0$ der Quotient des Kreisbogens und der zugehörigen Sehne den Grenzwert 1 hat, so können wir auch setzen:

$$\varkappa = \lim_{\Delta s = 0} \left(\frac{\overline{TT_1}}{\Delta s}\right), \qquad \tau = \lim_{\Delta s = 0} \left(\frac{\overline{BB_1}}{\Delta s}\right).$$

Bezeichnen wir die Koordinaten von T als Funktionen von s kurz durch:

$$\cos\alpha = \mathsf{A}(s), \qquad \cos\beta = \mathsf{B}(s), \qquad \cos\gamma = \Gamma(s),$$

so liefert der Taylorsche Lehrsatz:

$$\mathsf{A}(s+\Delta s) - \mathsf{A}(s) = \mathsf{A}'(s+\vartheta_1\cdot\Delta s)\cdot\Delta s, \ldots,$$

woraus sich sofort ergibt:

$$\frac{\overline{TT_1}}{\Delta s} = \sqrt{\mathsf{A}'(s+\vartheta_1\cdot\Delta s)^2 + \mathsf{B}'(s+\vartheta_2\cdot\Delta s)^2 + \Gamma'(s+\vartheta_3\cdot\Delta s)^2}.$$

Eine entsprechende Betrachtung knüpft man an die Indikatrix der Binormalen. Nach Vollzug des Grenzüberganges und Rückkehr zu den ursprünglichen Bezeichnungen gewinnt man den Satz: *Die Flexion $\varkappa$ und die Torsion τ unserer Raumkurve im Punkte (x, y, z) oder kurz „im Punkte s" sind:*

(3) $$\varkappa = +\sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2},$$

(4) $$\tau = \pm\sqrt{\left(\frac{d\cos\Lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mathsf{M}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mathsf{N}}{ds}\right)^2}.$$

Zufolge (5) S. 323 erhält man demnach als *Ausdruck der Flexion in den Ableitungen der x, y, z nach s:*

(5) $$\varkappa = +\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Etwas schwieriger ist ein entsprechender Ausdruck für die Torsion τ zu gewinnen.

Wir lesen zunächst aus (15) S. 324 mit Rücksicht auf (5) für die Richtungskosinus der Hauptnormalen ab:

(6) $$\varkappa\cos\lambda = \pm x'', \qquad \varkappa\cos\mu = \pm y'', \qquad \varkappa\cos\nu = \pm z''.$$

Zur Bestimmung des Vorzeichens dient eine Kontinuitätsbetrachtung. Wir drehen das Achsenkreuz stetig um O, bis die x-Achse parallel und gleichgerichtet mit der Kurventangente im Punkte P ist, die y-Achse entsprechend mit der Hauptnormalen und die z-Achse mit der Binormalen. Hierbei ändern sich die λ, μ, ν stetig, ohne daß $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ zugleich verschwinden können; $\varkappa$ ist konstant, und es gilt $\varkappa > 0$, da für $\varkappa$ eine Vorzeichenbestimmung nicht in Frage kommt. Hieraus folgt, daß in (6) am Schlusse der Drehung noch dieselben Zeichen wie zu Anfang gelten müssen, da ein Wechsel mindestens für eine der drei Gleichungen eine unstetige Änderung zur Folge hätte. Am Schlusse der Drehung aber gilt $\cos\lambda = 0$, $\cos\mu = 1$, $\cos\nu = 0$, sowie andrerseits (s. die Rechnungen von S. 325 ff.) $x'' = 0$, $y'' > 0$, $z'' = 0$. Die zweite Gleichung (6) zeigt also,

daß die oberen Zeichen gelten: *Für die Richtungskosinus der Hauptnormalen gilt:*

(7) $$\varkappa \cos\lambda = x'', \qquad \varkappa \cos\mu = y'', \qquad \varkappa \cos\nu = z''.$$

Zur Berechnung der Richtungskosinus der Binormalen aus (18) S. 325 knüpfen wir an die identische Gleichung:

$$(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2$$
$$= (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2,$$

deren rechte Seite sich nach (5), sowie nach (6) S. 323 und (16) S. 324 zu $\varkappa^2$ berechnet. Es gilt also der Ansatz:

$$y'z'' - y''z' = \pm\varkappa\cos\Lambda, \quad z'x'' - z''x' = \pm\varkappa\cos\mathsf{M}, \quad x'y'' - x''y' = \pm\varkappa\cos\mathsf{N},$$

aus dem wir durch Benutzung von (5) S. 323 und der eben aufgestellten Gleichungen (7) ablesen:

$$\pm\cos\Lambda = \cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu,$$
$$\pm\cos\mathsf{M} = \cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu,$$
$$\pm\cos\mathsf{N} = \cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda.$$

Die vorhin ausgeführte Kontinuitätsbetrachtung führt auch hier zur Vorzeichenbestimmung; man hat am Schlusse $\cos\alpha = 1$, $\cos\mu = 1$, $\cos\mathsf{N} = 1$, während alle weiteren Kosinus verschwinden. Zufolge der dritten Gleichung gelten also die oberen Zeichen: *Für die Richtungskosinus der Binormalen gilt:*

(8) $$\varkappa\cos\Lambda = y'z'' - y''z', \quad \varkappa\cos\mathsf{M} = z'x'' - z''x', \quad \varkappa\cos\mathsf{N} = x'y'' - x''y'.$$

Zur Darstellung der Torsion τ knüpfen wir nun an die drei Gleichungen:

(9) $$\begin{cases} x'\cos\Lambda + y'\cos\mathsf{M} + z'\cos\mathsf{N} = 0, \\ x''\cos\Lambda + y''\cos\mathsf{M} + z''\cos\mathsf{N} = 0, \\ \cos^2\Lambda + \cos^2\mathsf{M} + \cos^2\mathsf{N} = 1, \end{cases}$$

von denen die beiden ersten zum Ausdruck bringen, daß die Binormale senkrecht zur Tangente und zur Hauptnormale steht. Durch Differentiation der ersten Gleichung mit Benutzung der zweiten, sowie durch Differentiation der dritten Gleichung mit Benutzung von (8) folgt:

$$x'\frac{d\cos\Lambda}{ds} + y'\frac{d\cos\mathsf{M}}{ds} + z'\frac{d\cos\mathsf{N}}{ds} = 0,$$

$$(y'z'' - y''z')\frac{d\cos\Lambda}{ds} + (z'x'' - z''x')\frac{d\cos\mathsf{M}}{ds} + (x'y'' - x''y')\frac{d\cos\mathsf{N}}{ds} = 0.$$

Mit Rücksicht auf (16) S. 324 folgt hieraus weiter, daß die Ableitungen

der $\cos \Lambda$, $\cos M$, $\cos N$ nach s den x'', y'', z'' und also den $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ proportional sind:

$$\frac{d \cos \Lambda}{ds} : \frac{d \cos M}{ds} : \frac{d \cos N}{ds} = \cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu.$$

Mit Benutzung der Darstellung (4) von τ ergibt sich demnach:

(10) $$\frac{d \cos \Lambda}{ds} = \pm \tau \cos \lambda, \quad \frac{d \cos M}{ds} = \pm \tau \cos \mu, \quad \frac{d \cos N}{ds} = \pm \tau \cos \nu.$$

Man differenziere nun die Gleichungen (8) und verwerte (10); es folgt:

$$\pm \varkappa\tau \cos \lambda = y'z''' - y'''z' - \cos \Lambda \cdot \frac{d\varkappa}{ds},$$

$$\pm \varkappa\tau \cos \mu = z'x''' - z'''x' - \cos M \cdot \frac{d\varkappa}{ds},$$

$$\pm \varkappa\tau \cos \nu = x'y''' - x'''y' - \cos N \cdot \frac{d\varkappa}{ds}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen bzw. mit den drei Gleichungen (7) und addiert die Ergebnisse, so folgt bei Benutzung der zweiten Gleichung (9):

$$\pm \varkappa^2\tau = x''(y'z''' - y'''z') + y''(z'x''' - z'''x') + z''(x'y''' - x'''y').$$

Zur Bestimmung des Vorzeichens dient wieder die obige Kontinuitätsbetrachtung, an deren Schlusse $x' = 1$, $y' = 0$, $z' = 0$, $y'' > 0$, $z'' = 0$ war, während $z''' > 0$ oder < 0 gilt, je nachdem die Kurve im Punkte P rechts oder links gewunden ist. Am Schlusse der stetigen Abänderung der Koordinaten gilt also:

$$\pm \varkappa^2\tau = - y''z''',$$

und zufolge der Vorzeichenbestimmung der Torsion haben τ und $y''z'''$ gleiche Vorzeichen; es gilt also das untere Zeichen: *Als Ausdruck der Torsion τ der Raumkurve im Punkte (x, y, z) folgt:*

(11) $$\tau = \frac{x'(y''z''' - y'''z'') + y'(z''x''' - z'''x'') + z'(x''y''' - x'''y'')}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Die reziproken Werte $\varkappa^{-1} = \varrho$ und $\tau^{-1} = r$ bezeichnet man als „*ersten*“ bzw. „*zweiten Krümmungsradius*“ oder als „*Flexionsradius*“ und „*Torsionsradius*“ der Raumkurve im Punkte (x, y, z). Der Kreis des Radius ϱ und des auf der Hauptnormalen gelegenen Mittelpunktes $(x + \varrho \cos \lambda,\ y + \varrho \cos \mu,\ z + \varrho \cos \nu)$ oder, ausführlicher geschrieben, der Mittelpunktskoordinaten:

(12) $$\xi = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad \eta = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad \zeta = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

heißt der „*Krümmungskreis*“ der Raumkurve an der Stelle (x, y, z), der Punkt der Koordinaten (12) aber „*Krümmungsmittelpunkt*“.

Man kann den Krümmungskreis auch als denjenigen Kreis erklären, *der die Raumkurve an der Stelle* (x, y, z) *in drei zusammenfallenden Punkten schneidet.* Um den Krümmungskreis von hieraus durch einen Grenzübergang zu gewinnen, betrachten wir zunächst den Kreis, welcher die Kurve im Punkte P berührt und durch den weiteren Kurvenpunkt P_1 der Koordinaten x_1, y_1, z_1 hindurchläuft. Dieser Kreis ist in der den Punkt P_1 enthaltenden Tangentialebene des Berührungspunktes P gelegen, deren Gleichung nach (4) S. 322:

$$(13) \qquad (\xi - x)(y'(z_1 - z) - z'(y_1 - y)) + (\eta - y)(z'(x_1 - x) - x'(z_1 - z)) + (\zeta - z)(x'(y_1 - y) - y'(x_1 - x)) = 0$$

ist. Der Mittelpunkt (ξ, η, ζ) des fraglichen Kreises genügt weiter der Normalebenengleichung:

$$(14) \qquad (\xi - x)x' + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0,$$

und drittens muß der Punkt (ξ, η, ζ) von (x_1, y_1, z_1) dieselbe Entfernung haben, wie von (x, y, z):

$$(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 + (\zeta - z_1)^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y^2) + (\zeta - z)^2,$$

eine Gleichung, die man auch so umschreiben kann:

$$(15) \qquad 2(\xi - x)(x_1 - x) + 2(\eta - y)(y_1 - y) + 2(\zeta - z)(z_1 - z) = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2.$$

Gehört P_1 zum Argumente $(s + \Delta s)$, so haben wir die Darstellungen:

$$x_1 - x = x'(s) \cdot \Delta s + \frac{1}{2} x''(s + \vartheta_1 \cdot \Delta s) \cdot \Delta s^2, \qquad x_1 - x = x'(s + \vartheta_1' \cdot \Delta s) \cdot \Delta s,$$

. . . .

von denen wir die links stehenden in (15) links, die rechts stehenden aber rechts eintragen wollen. Wegen (14) folgt nach Fortheben von Δs^2:

$$(\xi - x) \cdot x''(s + \vartheta_1 \cdot \Delta s) + (\eta - y) \cdot y''(s + \vartheta_2 \cdot \Delta s) + (\zeta - z) \cdot z''(s + \vartheta_3 \cdot \Delta s) = (x'(s + \vartheta_1' \cdot \Delta s))^2 + (y'(s + \vartheta_2' \cdot \Delta s))^2 + (z'(s + \vartheta_3' \cdot \Delta s))^2.$$

Ehe wir nun die Auflösung nach den gesuchten Mittelpunktskoordinaten ξ, η, ζ vornehmen, vollziehen wir sogleich den Grenzübergang $\lim \Delta s = 0$. Die Ebene (13) wird zur Schmiegungsebene, die die Normalebene (14) in der Hauptnormalen:

$$\frac{\xi - x}{x''} = \frac{\eta - y}{y''} = \frac{\zeta - z}{z''}$$

schneidet; die umgeformte Gleichung (15) aber liefert für $\lim \Delta s = 0$:

$$(\xi - x)x'' + (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' = 1.$$

Die Auflösung nach ξ, η, ζ führt zu den Koordinaten (12) des Krümmungsmittelpunktes zurück.

Die Gleichungen (7) und (10), letztere mit den richtigen Vorzeichen versehen, kann man auch so schreiben:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d\cos\alpha}{ds}=\dfrac{\cos\lambda}{\varrho}, & \dfrac{d\cos\beta}{ds}=\dfrac{\cos\mu}{\varrho}, & \dfrac{d\cos\gamma}{ds}=\dfrac{\cos\nu}{\varrho}, \\ \dfrac{d\cos\Lambda}{ds}=-\dfrac{\cos\lambda}{r}, & \dfrac{d\cos M}{ds}=-\dfrac{\cos\mu}{r}, & \dfrac{d\cos N}{ds}=-\dfrac{\cos\nu}{r}. \end{cases}$$

Ein entsprechendes Gleichungssystem besteht für die Ableitungen von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$. Indem man nämlich die drei Gleichungen:

$$\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu=0,$$
$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$$
$$\cos\Lambda\cos\lambda+\cos M\cos\mu+\cos N\cos\nu=0$$

unter Benutzung von (16) nach s differenziert, folgt:

$$\cos\alpha\frac{d\cos\lambda}{ds}+\cos\beta\frac{d\cos\mu}{ds}+\cos\gamma\frac{d\cos\nu}{ds}=-\frac{1}{\varrho},$$
$$\cos\lambda\frac{d\cos\lambda}{ds}+\cos\mu\frac{d\cos\mu}{ds}+\cos\nu\frac{d\cos\nu}{ds}=0,$$
$$\cos\Lambda\frac{d\cos\lambda}{ds}+\cos M\frac{d\cos\mu}{ds}+\cos N\frac{d\cos\nu}{ds}=+\frac{1}{r}.$$

Man multipliziere diese Gleichungen bzw. mit $\cos\alpha$, $\cos\lambda$, $\cos\Lambda$ und addiere.[1]) Auf diese Weise gewinnt man die erste der drei folgenden Gleichungen:

$$(17)\quad \frac{d\cos\lambda}{ds}=\frac{\cos\Lambda}{r}-\frac{\cos\alpha}{\varrho},\quad \frac{d\cos\mu}{ds}=\frac{\cos M}{r}-\frac{\cos\beta}{\varrho},\quad \frac{d\cos\nu}{ds}=\frac{\cos N}{r}-\frac{\cos\gamma}{\varrho}.$$

Die zweite und die dritte Gleichung folgen entsprechend. Die neun Gleichungen (16) und (17) werden als die „*Frenetschen Formeln*“ bezeichnet.

6. Aufgaben über Krümmung der Raumkurven. 1) Die Krümmung der zylindrischen Schraubenlinie ist zu untersuchen. — Indem man $t=cs$ in die Gleichungen (7) S. 312 der Schraubenlinie einträgt (s. auch S. 326, unten), folgt durch Berechnung von x', y', z', x'', ... leicht:

$$(1)\qquad c=\frac{2\pi}{\sqrt{h^2+(2a\pi)^2}},\qquad \varkappa=\frac{4a\pi^2}{h^2+(2a\pi)^2},\qquad \tau=\frac{2\pi h}{h^2+(2a\pi)^2}.$$

Das Krümmungszentrum des Punktes (x, y, z) hat die Koordinaten:

$$\xi=-\left(\frac{h}{2a\pi}\right)^2x,\qquad \eta=-\left(\frac{h}{2a\pi}\right)^2y,\qquad \zeta=z.$$

Die zylindrische Schraubenlinie hat also, was aus ihrer Verschiebbarkeit in sich selbstverständlich ist, konstante Krümmungen $\varkappa$ und τ.

---

1) Man beachte, daß in dem vom „begleitenden Dreikant“ (S. 325) gelieferten Koordinatenkreuze $\cos\alpha$, $\cos\lambda$, $\cos\Lambda$ die Richtungskosinus der x-Achse, $\cos\beta$, $\cos\mu$, $\cos M$ die der y-Achse usw. sind. Es gelten also die Gleichungen:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\lambda+\cos^2\Lambda=1,\qquad \cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos\lambda\cdot\cos\mu+\cos\Lambda\cdot\cos M=0,\ \cdots.$$

2) Man rechne die Hauptformeln der Krümmungstheorie auf t als unabhängige Variable und damit auf die Darstellung (5) S. 312 der Raumkurve um. — Braucht man für die Ableitungen nach t die in der Mechanik üblichen Bezeichnungen:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \ldots, \quad \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \ldots,$$

so hat man zunächst

$$(2) \qquad \dot{x} = x' \cdot \dot{s}, \qquad \ddot{x} = x'' \cdot \dot{s}^2 + x' \cdot \ddot{s}, \qquad \dddot{x} = x''' \cdot \dot{s}^3 + 3x'' \cdot \dot{s} \cdot \ddot{s} + x' \cdot \dddot{s}$$

und entsprechend für y und z. Hieraus folgt weiter:

$$\dot{y}\ddot{z} - \ddot{y}\dot{z} = (y'z'' - y''z')\dot{s}^3, \qquad \dot{z}\ddot{x} - \ddot{z}\dot{x} = (z'x'' - z''x')\dot{s}^3, \ldots,$$

$$\dddot{x}(\dot{y}\ddot{z} - \ddot{y}\dot{z}) + \dddot{y}(\dot{z}\ddot{x} - \ddot{z}\dot{x}) + \dddot{z}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) = (x'''(y'z'' - y''z') + \cdots) \cdot \dot{s}^6.$$

Die Relation (6) S. 323 führt auf die schon unter (1) S. 322 angegebene Gleichung:

$$(3) \qquad \dot{s} = +\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

zurück. Die Gleichung der Normalebene (13) S. 324 und diejenige der Schmiegungsebene (12) S. 324 behalten ihre Gestalten unter Ersatz von x', x'', y', ... durch $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$, ... bei. Durch Differentiation des aus (3) folgenden Ausdrucks von $\dot{s}^2$ ergibt sich:

$$(4) \qquad \dot{s}\ddot{s} = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}.$$

Andrerseits berechnet man aus den beiden ersten Gleichungen (2):

$$x'' = \frac{\ddot{x}}{\dot{s}^2} - \dot{x}\frac{\ddot{s}}{\dot{s}^3},$$

und entsprechende Ausdrücke gelten für y'', z''. Man beweise daraufhin für die Flexion $\varkappa$ den Ausdruck:

$$(5) \qquad \varkappa = \frac{+\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - \ddot{s}^2}}{\dot{s}^2},$$

dessen reziproker Wert den Krümmungsradius ϱ liefert. Man beweise endlich für die in (11) S. 331 gegebene Torsion τ die neue Darstellung:

$$(6) \qquad \tau = \frac{\dot{x}(\ddot{y}\dddot{z} - \dddot{y}\ddot{z}) + \dot{y}(\ddot{z}\dddot{x} - \dddot{z}\ddot{x}) + \dot{z}(\ddot{x}\dddot{y} - \dddot{x}\ddot{y})}{\dot{s}^2(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - \ddot{s}^2)}.$$

3) Die als „*konische Spirale*“ benannte Raumkurve ist durch:

$$x = t \cdot \cos(a \cdot \ln t), \qquad y = t \cdot \sin(a \cdot \ln t), \qquad z = bt$$

mit zwei positiven Konstanten a, b gegeben. Die Kurve liegt auf dem Kegel der Gleichung $z^2 = b^2(x^2 + y^2)$, und ihre Projektion auf die x,y-Ebene stellt sich in Polarkoordinaten r, ϑ durch $\vartheta = a \cdot \ln r$ dar, ist also eine logarithmische Spirale (s. S. 273). Man beweise für die konische Spirale die Gleichungen:

$$\dot{s} = \sqrt{1 + a^2 + b^2}, \qquad \varkappa^{-1} = \frac{1 + a^2 + b^2}{a\sqrt{1 + a^2}} \cdot t, \qquad \tau^{-1} = \frac{1 + a^2 + b^2}{ab} \cdot t.$$

Man zeige ferner, daß die Hauptnormale parallel zur x,y-Ebene verläuft, und daß der Richtungswinkel der Binormalen gegen die z-Achse konstant ist:

$$\mathrm{N} = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}\right).$$

4) Man zeige, daß eine Kurve, deren Torsion konstant gleich 0 ist, eine ebene Kurve ist. — Aus (16) S. 333 folgt für $\tau = 0$, $r = \infty$, daß die Ableitungen

der cos Λ, cos M, cos N nach s konstant gleich 0 sind, so daß die Kosinus selbst konstant, etwa gleich a, b, c sind (s. S. 130). Die erste Gleichung (9) S. 330 zeigt also, daß die Ableitung der Funktion $(ax + by + cz)$ konstant gleich 0 ist, so daß diese Funktion selbst konstant, etwa gleich d ist. Es besteht also für alle Punkte der Kurve die Gleichung:

$$ax + by + cz = d,$$

so daß die Kurve der durch diese Gleichung dargestellten Ebene angehört.

5) Wie oben aus der Änderung der Tangentenrichtung die Flexion $\varkappa$ und aus derjenigen der Binormalenrichtung die Torsion τ erklärt wurde, so gründet man auf die Änderung der „Hauptnormalen" den Begriff der *„totalen Krümmung"* **K** der Raumkurve. — Man beweise die Formeln:

$$\mathbf{K} = +\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}, \qquad \mathbf{K}^2 = \varkappa^2 + \tau^2.$$

Die zweite folgt aus der ersten auf Grund der Frenetschen Formeln (17).

7. Die Krümmung der Flächen. Eine Fläche sei durch die Gleichung:

$$(1) \qquad z = f(x, y)$$

gegeben, deren rechte Seite $f(x, y)$ in einem ausgewählten Bereiche mit den Ableitungen erster und zweiter Ordnung eindeutig und stetig sei. Für diese Ableitungen sind folgende Bezeichnungen gebräuchlich:

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f_x' = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y' = q, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$ [1]

Die Tangentialebene der Fläche im Punkte (x, y, z) hat die Gleichung:

$$(3) \qquad (\xi - x)p + (\eta - y)q = \zeta - z.$$

Den Voraussetzungen entsprechend hat das zu untersuchende Flächenstück nirgends eine zur z-Achse parallele Tangentialebene.[2] Die Flächennormale in dem mit P zu bezeichnenden Punkte (x, y, z) läuft also nicht horizontal (parallel zur x,y-Ebene). Geben wir der Flächennormale eine *„nach oben weisende"* Pfeilrichtung, so wird ihr Richtungsunterschied gegen die positive z-Achse spitz; wir lesen also aus (3) ab: *Die Richtungskosinus der nach oben gerichteten Flächennormalen des Punktes P sind gegeben durch:*

$$(4) \qquad \frac{-p}{+\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \qquad \frac{-q}{+\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \qquad \frac{1}{+\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.$$

Die Untersuchung der Flächenkrümmung gründen wir auf die Betrachtung von Kurven, die auf der Fläche gelegen sind. Es sei eine solche

---

1) Die Bezeichnungen von § 5 werden beibehalten, so daß s auch die Bedeutung einer Bogenlänge haben wird. Es wird aus dem Zusammenhange immer leicht deutlich sein, ob s eine Bogenlänge ist oder die Ableitung f_{xy}'' bedeutet.

2) Will man indessen die Fläche gerade in der Umgebung einer solchen Tangentialebene untersuchen, so genügt, um den Rechnungen des Textes Geltung zu verschaffen, ein Wechsel der Koordinatenachsen.

durch den Punkt P hindurchlaufende Kurve gegeben, und zwar dadurch, daß wir die Koordinaten der Punkte dieser Kurve als Funktionen $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ ihrer Bogenlänge s auffassen. Da die Kurve auf der Fläche (1) liegt, so ist die Gleichung $z(s) = f(x(s), y(s))$ in s identisch erfüllt. Durch Differentiation finden wir somit:

$$z' = p \cdot x' + q \cdot y' \tag{5}$$

oder, unter Einführung der Richtungskosinus der Tangente unserer Kurve im Punkte P:

$$\cos\gamma = p \cdot \cos\alpha + q \cdot \cos\beta. \tag{6}$$

Diese Relation ist für die Richtungskosinus einer Flächentangente im Punkte P charakteristisch.

Man differenziere jetzt die Gleichung (6) nach s, wobei man für die Ableitungen von p und q:

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x} x' + \frac{\partial p}{\partial y} y' = r\cos\alpha + s\cos\beta, \cdots$$

findet und die Ableitungen der $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nach den Frenetschen Formeln (16) S. 333 durch die Richtungskosinus der Hauptnormalen ausdrücken kann. Es ergibt sich auf diese Weise:

$$\frac{\cos\nu}{\varrho} = p\frac{\cos\lambda}{\varrho} + q\frac{\cos\mu}{\varrho} + (r\cos\alpha + s\cos\beta)\cos\alpha + (s\cos\alpha + t\cos\beta)\cos\beta,$$

eine Gleichung, der man auch die Gestalt geben kann:

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{-p\cos\lambda - q\cos\mu + \cos\nu}{+\sqrt{p^2+q^2+1}} = \frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{+\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Zufolge (4) ist der zweite Faktor links der Kosinus des Winkels θ zwischen der Flächennormalen und der Hauptnormalen der Kurve. Also gilt der Satz: *Für die Flexion $\varkappa$ bzw. den Flexionsradius ϱ unserer Kurve im Punkte P besteht die Regel:*

$$\varkappa \cdot \cos\theta = \frac{1}{\varrho} \cdot \cos\theta = \frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{+\sqrt{p^2+q^2+1}}, \tag{7}$$

wo $p, q, r, \cdots$ die Ableitungen (2) im Punkte P sind, α, β die beiden ersten Richtungswinkel der Kurventangente bedeuten und θ den Winkel zwischen der Hauptnormalen der Kurve und der nach oben gerichteten Flächennormalen darstellt.

Die Flexion ist hiernach für alle durch P hindurchlaufenden Kurven der Fläche, welche gleiche Tangente und gleiche Hauptnormale oder, wie man auch sagen kann, gleiche Tangente und gleiche Schmiegungsebene haben, ein und dieselbe. Die Flexion wird demnach auch bereits von derjenigen Kurve geliefert, die durch die fragliche Schmiegungsebene auf

der Fläche ausgeschnitten wird. Es erscheint also nicht erforderlich, mit Kurven doppelter Krümmung auf der Fläche zu arbeiten, *vielmehr genügt es für unsere Zwecke, allein „ebene“ Schnittkurven heranzuziehen:* wir nennen demnach fortan $\varkappa$ kurz die „Krümmung“ und ϱ den „Krümmungsradius“ der Kurve.

Ist der Zähler in (7) rechter Hand gleich 0, so gilt für jeden Winkel θ die Gleichung $\varkappa = 0$. Wir schließen diesen Fall zunächst aus, halten für die nächste Untersuchung an der Tangente fest, wollen aber durch dieselbe alle möglichen Schnittebenen hindurchlegen, abgesehen vom Falle $\cos\theta = 0$, der zur Tangentialebene (3) führt. Da jetzt $\varkappa > 0$ ist, so folgt aus (7):

(8) $$\operatorname{sgn}(\cos\theta) = \operatorname{sgn}(r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta).$$

Je nachdem das rechts stehende Zeichen + oder − ist, sind also alle Winkel θ spitz oder stumpf. Da die Hauptnormale jetzt einfach die nach der „konkaven“ Seite gerichtete Normale der Kurve ist, so ergibt sich aus der gewählten Richtung der Flächennormalen: *Sämtliche durch die ausgesuchte Tangente zu legenden Ebenen liefern Schnittkurven, welche die Tangentialebene von oben oder von unten berühren, je nachdem das in* (8) *stehende Zeichen + oder − ist.*

Der Wert $\theta = 0$ bzw. π liefert den zur ausgewählten Tangente gehörenden sogenannten „*Normalschnitt*“. Für diesen Schnitt gilt:

(9) $$\varkappa = \frac{1}{\varrho} = \frac{|r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta|}{+\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Aus (7) lesen wir weiter den Satz von Meusnier ab: *Der Krümmungsradius desjenigen durch die gewählte Tangente laufenden Schnittes, dessen Ebene mit derjenigen des Normalschnittes den „spitzen“ Neigungswinkel θ bildet, ist gleich dem Produkt des Krümmungsradius* (9) *vom Normalschnitt und des Kosinus des Neigungswinkels θ.* Man kann dem Satze auch folgende Fassung geben: *Der Krümmungsmittelpunkt eines beliebigen zur gewählten Tangente gehörenden Schnittes ist der Fußpunkt des Lotes vom Krümmungsmittelpunkte des Normalschnittes auf die neue Schnittebene.* Zufolge dieses Satzes wird man die Untersuchung auf die Normalschnitte allein beschränken dürfen.

Wir lassen jetzt in der Tangentialebene (3) des Punktes P die Tangente sich um den Punkt P drehen und untersuchen die Krümmungsradien ϱ aller hierbei eintretenden Normalschnitte unserer Fläche durch den Punkt P. Zum Unterschiede gegen den bisherigen Brauch wollen wir $\varkappa$ und ϱ nicht mehr absolut nehmen, sondern an Stelle von (9) durch:

(10) $$\varkappa = \frac{1}{\varrho} = \frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{+\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

geben, *so daß $\varkappa$ und ϱ positives oder negatives Vorzeichen haben, je nachdem der Normalschnitt in der Umgebung von P oberhalb oder unterhalb der Tangentialebene liegt.* Zur Abkürzung setzen wir $\cos\alpha = A$, $\cos\beta = B$; dann ist:

$$\cos\gamma = pA + qB,$$

so daß die Veränderlichkeit von A und B an die Relation gebunden ist:

$$(11) \qquad (1+p^2)A^2 + 2pqAB + (1+q^2)B^2 = 1.$$

Der Quotient $A:B = X$ ist unbeschränkt variabel unter Einschluß des Wertes ∞, und jedem einzelnen Werte X entspricht eine unserer Tangenten und umgekehrt. Man bestimmt nämlich bei Angabe von X den Wert B aus:

$$B^2((1+p^2)X^2 + 2pqX + (1+q^2)) = 1,$$

so daß man drei bis auf einen gemeinsamen Zeichenwechsel eindeutig bestimmte Richtungskosinus gewinnt:

$$\cos\alpha = BX, \qquad \cos\beta = B, \qquad \cos\gamma = (pX+q)B.$$

Mit Benutzung der Abkürzung X folgt aus (10) und (11):

$$(12) \quad \varkappa\sqrt{p^2+q^2+1} = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{\varrho} = \frac{rX^2+2sX+t}{(1+p^2)X^2+2pqX+(1+q^2)}.$$

Da die im Nenner stehende Funktion von X keine reellen Nullpunkte hat, *so ist $\varkappa$, wie auch schon aus* (10) *hervorgeht, eine beständig endliche und stetige Funktion von X.*

Ein besonderer Fall liegt vor, wenn die in (12) rechts stehende Funktion von X mit einer Konstanten identisch ist. *Dann haben alle Normalschnitte den gleichen Krümmungsradius, und umgekehrt muß, wenn dies zutreffen soll, die fragliche Funktion konstant sein.* Hierzu ist hinreichend und notwendig, daß die beiden im Zähler und Nenner stehenden ganzen Funktionen bis auf einen von X unabhängigen Faktor identisch sind. Nennt man demnach einen solchen Punkt P der Fläche einen „*Nabelpunkt*", so ergibt sich der Satz: *Die hinreichende und notwendige Bedingung für einen Nabelpunkt der Fläche ist das Bestehen der Proportion:*

$$(13) \qquad r:s:t = (1+p^2):pq:(1+q^2).$$

Da die in (12) rechts im Nenner stehende Funktion beständig positiv ist, so gilt:

$$(14) \qquad \operatorname{sgn}(\varkappa) = \operatorname{sgn}(rX^2+2sX+t).$$

Ist erstlich $s^2 - rt < 0$, so hat die rechts stehende ganze Funktion zweiten Grades keinen (reellen) Nullpunkt und ist also für alle X entweder nur positiv, nämlich wenn $r = f''_{xx} > 0$ ist, oder nur negativ, nämlich falls $r = f''_{xx} < 0$ zutrifft. Im ersten Falle liegen alle Normalschnitte in der

Umgebung von P oberhalb der Tangentialebene, im zweiten unterhalb derselben. Man sagt zur Kennzeichnung dieser Art der Flächenkrümmung, P sei ein *Punkt „elliptischer“ Krümmung* oder kurz ein *„elliptischer Punkt“* der Fläche: *In der Umgebung eines durch $s^2 - rt < 0$ charakterisierten Punktes elliptischer Krümmung verläuft die Fläche ganz oberhalb der Tangentialebene (für $r > 0$) oder ganz unterhalb derselben (für $r < 0$), abgesehen natürlich vom Punkte P selbst, der in der Tangentialebene liegt.* Das Ellipsoid der Gleichung:

$$(15) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

besteht ausschließlich aus elliptischen Punkten. Durch Differentiation nach x und y folgt nämlich aus (15):

$$(16) \qquad pz = -\frac{c^2}{a^2}x, \qquad qz = -\frac{c^2}{b^2}y,$$

sowie durch nochmalige Differentiation:

$$(17) \qquad rz = -p^2 - \frac{c^2}{a^2}, \qquad sz = -pq, \qquad tz = -q^2 - \frac{c^2}{b^2}.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich aber:

$$z^2(s^2 - rt) = -p^2\frac{c^2}{b^2} - q^2\frac{c^2}{a^2} - \frac{c^4}{a^2b^2} < 0.$$

Ist zweitens $s^2 - rt > 0$, so hat die in (14) rechts stehende ganze Funktion von X zwei reelle und verschiedene Nullpunkte, so daß wir zwei verschiedene Tangenten mit $\varkappa = 0$, $\varrho = \infty$ gewinnen. Diese Tangenten zerlegen die Tangentialebene in vier paarweise diametrale Winkel, wobei die Tangenten des einen Winkelpaares Schnitte liefern, die nach oben konkav sind, während die Schnitte des anderen Winkelpaares nach unten konkav sind. Man spricht jetzt von einem *Punkte „hyperbolischer Krümmung“* oder einem *„hyperbolischen“ Punkte* der Fläche: *In der Umgebung eines durch $s^2 - rt > 0$ charakterisierten hyperbolischen Punktes verläuft die Fläche teils oberhalb, teils unterhalb der Tangentialebene; und zwar tritt ein Wechsel bei den beiden zu $\varkappa = 0$ gehörenden Tangenten ein, so daß die Fläche in der nächsten Umgebung eines hyperbolischen Punktes sattelförmige Gestalt hat.* Für das durch:

$$(18) \qquad 2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

gegebene hyperbolische Paraboloid gilt:

$$p = \frac{x}{a^2}, \qquad q = -\frac{y}{b^2}, \qquad r = \frac{1}{a^2}, \qquad s = 0, \qquad t = -\frac{1}{b^2};$$

diese Fläche setzt sich also ausschließlich aus hyperbolischen Punkten

zusammen. Die beiden Tangenten mit $\varkappa = 0$ sind hier die beiden Geraden der Fläche, die durch den Punkt P hindurchlaufen (s. Aufgabe 3, S. 320). Man veranschauliche sich an Fig. 104 die Gestalt der Fläche in der Umgebung des Nullpunktes.

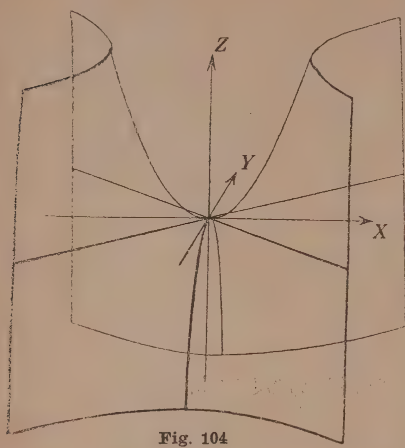


Fig. 104

Ist endlich $s^2 - rt = 0$, so hat man *eine* Tangente mit $\varkappa = 0$, während für die übrigen Normalschnitte des Punktes P die Krümmung $\varkappa$ entweder durchweg > 0 oder durchweg < 0 ist. Jetzt heißt P ein *Punkt „parabolischer" Krümmung* oder ein *„parabolischer" Punkt* der Fläche. *Bei einem durch $s^2 - rt = 0$ charakterisierten parabolischen Punkte sind die Normalschnitte, abgesehen von einem einzigen, entweder sämtlich nach unten oder sämtlich nach oben konkav; der ausgenommene Normalschnitt hat aber im allgemeinen in P einen Wendepunkt.* Es genüge, diese Aussage an einem Beispiele zu erläutern, und zwar betrachten wir die durch:

$$z = e^{-x^2 - y^2} \tag{19}$$

gegebene Rotationsfläche, deren Achse die z-Achse ist. Die in der x, z-Ebene gelegene Meridiankurve ist in Fig. 105 skizziert; sie hat zwei in der Figur mit P und P' bezeichnete Wendepunkte bei $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Man findet aus (19) leicht:

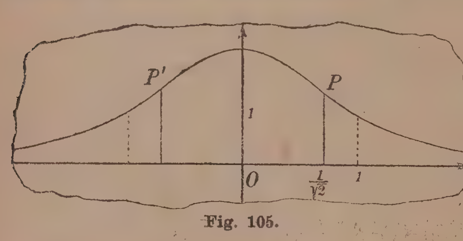


Fig. 105.

$$s^2 - rt = 8z^2\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Der durch P und P' hindurchlaufende Parallelkreis besteht aus lauter parabolischen Punkten, der von ihm umschlossene Flächenteil aus lauter elliptischen und der äußere Rest der Fläche aus lauter hyperbolischen Punkten. Für den Flächenpunkt P der Koordinaten $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{\sqrt{e}}$ gilt:

$$\varkappa = -\frac{2\cos^2\beta}{\sqrt{e} + 2},$$

so daß alle Normalschnitte, abgesehen von dem in der Figur dargestellten, bei P ganz unterhalb der Tangentialebene liegen.

Um allgemein genauere Angaben über die Krümmungen $\varkappa$ der zu einem Punkte P einer vorgelegten Fläche gehörenden Normalschnitte

festzustellen, nehmen wir an, daß die Bedingung (13) eines Nabelpunktes nicht zutrifft, und wollen dann zunächst die Extremwerte von $\varkappa$ feststellen. Es handelt sich um die Extremwerte der Funktion $(rA^2+2sAB+tB^2)$ unter Gültigkeit der Nebenbedingung (11), wobei also die Regeln von S. 257 ff. zur Anwendung gelangen. Mittelst eines konstanten Multiplikators λ bilden wir uns demnach die Funktion:

$$(r+\lambda(1+p^2))A^2+2(s+\lambda pq)AB+(t+\lambda(1+q^2))B^2-\lambda$$

der beiden zunächst unabhängig zu denkenden Variablen A und B und setzen deren partielle erste Ableitungen gleich 0:

$$(20)\qquad \begin{cases}(r+\lambda(1+p^2))A+(s+\lambda pq)B=0,\\ (s+\lambda pq)A+(t+\lambda(1+q^2))B=0\end{cases}$$

Hieraus folgt, da A und B nicht zugleich verschwinden können:

$$(r+\lambda(1+p^2))(t+\lambda(1+q^2))-(s+\lambda pq)^2=0,$$

so daß λ der quadratischen Gleichung genügt:

$$(21)\qquad \lambda^2(1+p^2+q^2)+\lambda(r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2))-(s^2-rt)=0.$$

Indem man weiter die Gleichungen (20) mit A und B multipliziert und dann addiert, ergibt sich bei Benutzung von (11):

$$rA^2+2sAB+tB^2+\lambda=0$$

und also zufolge (10):

$$(22)\qquad \varkappa=\frac{1}{\varrho}=-\frac{\lambda}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Als eine durchweg endliche und stetige Funktion der A, B muß $\varkappa$ mindestens ein Maximum und ein Minimum besitzen. Da wir soeben nur zwei Werte λ fanden, so folgt: *Die Gleichung* (21) *hat, sofern die Proportion* (13) *nicht zutrifft, stets zwei reelle und verschiedene Lösungen λ, die, in* (22) *eingesetzt, die beiden Extremwerte $\varkappa$ liefern.*

Die zu den beiden Extremwerten gehörenden Krümmungsradien werden als die „*Hauptkrümmungsradien*" der Fläche im Punkte P benannt und seien durch ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnet. Man kann aus ihnen die übrigen Krümmungsradien ϱ der Normalschnitte des Punktes P leicht gewinnen. Um die fragliche Regel auf kürzestem Wege abzuleiten, nehmen wir eine Drehung des Achsenkreuzes um O derart vor, daß die neue x,y-Ebene parallel der Tangentialebene im Punkte P wird, und daß weiter die x,z-Ebene parallel zur normalen Schnittebene des Hauptkrümmungsradius ϱ_1 verläuft. Die Richtungskosinus der zu dieser Schnittebene gehörenden Tangente sind dann $A=1$ und $B=0$, so daß, da gegenwärtig $p=q=0$ gilt, aus (20) sich $\lambda=-r$ und $s=0$ ergibt. Da in diesem Falle als

zweite Lösung der Gleichung (21) sofort $\lambda = -t$ folgt, so finden wir für die Hauptkrümmungsradien aus (22):

$$\frac{1}{\varrho_1} = r, \qquad \frac{1}{\varrho_2} = t$$

und können die Gleichung (10) in die Gestalt setzen:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \alpha}{\varrho_1} + \frac{\cos^2 \beta}{\varrho_2} = \frac{\cos^2 \alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho_2}.$$

Wir nennen die zu ϱ_1 und ϱ_2 führenden Normalschnitte die „*Hauptschnitte*" der Fläche im Punkte P und machen alsdann das eben gewonnene Ergebnis unabhängig von der besonderen Lage des Koordinatenkreuzes, indem wir die Bezeichnung α etwa durch ω ersetzen und ω als Neigungswinkel des zu untersuchenden Schnittes gegen den zu ϱ_1 gehörenden Hauptschnitt fassen. Dann ergibt die Gleichung:

$$(23) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \omega}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \omega}{\varrho_2}$$

die nach Euler benannte Regel: *Der Krümmungsradius ϱ irgend eines Normalschnittes der Fläche im Punkte P berechnet sich aus den Hauptkrümmungsradien ϱ_1, ϱ_2 auf Grund der Formel* (23), *in der ω den Neigungswinkel des Normalschnittes gegen den zu ϱ_1 gehörenden Hauptschnitt bedeutet.*

Der besondere Wert $\omega = \frac{\pi}{2}$ ergibt $\varrho = \varrho_2$: *Die beiden Hauptschnitte stehen somit aufeinander senkrecht.* Haben wir einen hyperbolischen Punkt P, so sind ϱ_1 und ϱ_2 endlich und von entgegengesetztem Vorzeichen. Dann liefern die beiden zu:

$$\operatorname{tg} \omega = \pm \sqrt{-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$$

gehörenden Normalschnitte $\varrho = \infty$ und also $\varkappa = 0$: *Die Hauptschnitte halbieren die Winkel zwischen jenen beiden Normalschnitten des hyperbolischen Punktes P, denen die Krümmung $\varkappa = 0$ zukommt.* In einem elliptischen Punkte sind alle ϱ endlich und von gleichem Vorzeichen. Schließlich hat für einen parabolischen Punkt die Gleichung (21) eine Lösung $\lambda = 0$, welche den Hauptkrümmungsradius $\varrho = \infty$ liefere; die Gleichung (23) kürzt sich dann zu:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \omega}{\varrho_1}.$$

Den ausführlicheren Untersuchungen über die Flächenkrümmung legt man als Krümmungsmaße im einzelnen Punkte die Größen:

$$(24) \qquad K_1 = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}, \qquad K_2 = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

zugrunde, von denen die erste die „*totale*“ oder „*Gaußsche Krümmung*“ oder kurz das „*Krümmungsmaß*“ genannt wird, während die zweite die „*mittlere Krümmung*“ der Fläche im Punkte P heißt. Wir notieren noch als Ausdrücke der K_1, K_2 in den partiellen Ableitungen p, q, r, s, t:

$$(25)\qquad \begin{cases} K_1 = -\dfrac{s^2 - rt}{(p^2+q^2+1)^2}, \\ K_2 = \dfrac{r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)}{(\sqrt{p^2+q^2+1})^3}. \end{cases}$$

Das Krümmungsmaß K_1 ist positiv, negativ oder gleich 0, je nachdem P ein elliptischer, hyperbolischer oder parabolischer Punkt ist.

8. Die Indikatrix eines Flächenpunktes. Bezugnahme auf frühere Entwicklungen. Die Einteilung der Flächenpunkte in elliptische, hyperbolische und parabolische Punkte kann man noch in einer anderen Art begründen. Eine zur Tangentialebene (3) S. 335 des Berührungspunktes (x, y, z) parallele Ebene ist darstellbar durch:

$$(1)\qquad (\xi - x)p + (\eta - a)q - (\zeta - z) = -\tfrac{1}{2}\delta,$$

unter δ eine Konstante verstanden. Ist δ absolut genommen sehr klein, so läuft die Ebene (1) dicht neben der Tangentialebene her. Die Schnittkurve einer solchen Ebene mit der Fläche läßt sich in der nächsten Umgebung des fraglichen Flächenpunktes P angenähert als Kurve zweiten Grades darstellen, wie sogleich näher ausgeführt wird. Diese letztere Kurve zweiten Grades heißt die „*Indikatrix*“ *des Flächenpunktes* P, insofern ihre Gestalt anzeigt, zu welcher der drei oben genannten Arten der Flächenpunkt gehört.

Der Schnitt der Ebene (1) mit der Fläche ist durch die Gleichung (1) und die Flächengleichung $\zeta = f(\xi, \eta)$ dargestellt. Entwickeln wir $f(\xi, \eta)$ nach der Taylorschen Formel (4) S. 197, indem wir $n = 2$ nehmen und $h = \xi - x$, $k = \eta - y$ eintragen:

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) = f(x, y) &+ (f'_x(x, y)(\xi - x) + f'_y(x, y)(\eta - y)) \\ &+ \tfrac{1}{2}[f''_{xx}(x + \vartheta(\xi - x), y + \vartheta(\eta - y))(\xi - x)^2 \\ &+ 2f''_{xy}(x + \vartheta(\xi - x), y + \vartheta(\eta - y))(\xi - x)(\eta - y) \\ &+ f''_{yy}(x + \vartheta(\xi - x), y + \vartheta(\eta - y))(\eta - y)^2], \end{aligned}$$

so soll die in Aussicht genommene Annäherung, die wegen der Kleinheit von $(\xi - x)$ und $(\eta - y)$ und der Stetigkeit der zweiten Ableitungen statthaft ist, die sein, daß wir die Werte der partiellen zweiten Ableitungen für den Punkt $(x + \vartheta(\xi - x), y + \vartheta(\eta - y))$ durch die zum Punkte P gehörenden Werte r, s, t ersetzen. Unsere Fläche ist auf diese Weise

bei Aufnahme der Bezeichnungen p, q, r, s, t in der nächsten Umgebung der Stelle (x, y, z) angenähert durch:

$$0=(\xi-x)p+(\eta-y)q-(\zeta-z)+\tfrac{1}{2}(r(\xi-x)^2+2s(\xi-x)(\eta-y)+t(\eta-y)^2)$$

dargestellt. Um den Schnitt mit der Ebene (1) zu erhalten, können wir die letzte Gleichung auch ersetzen durch:

$$(2) \qquad r(\xi-x)^2+2s(\xi-x)(\eta-y)+t(\eta-y)^2=\delta,$$

die dann zusammen mit der Ebenengleichung (1) die als „Indikatrix" bezeichnete Kurve darstellt.

Ist nun $s^2-rt<0$, so muß, damit eine reelle Indikatrix vorliegt, $\operatorname{sgn}(\delta)=\operatorname{sgn}(r)$ zutreffen. *Die Indikatrix ist dann eine „Ellipse"* (s. „A. G.", § 40), *die Fläche verläuft in der nächsten Umgebung von P nur auf der oberen oder unteren Seite der Tangentialebene (und zwar, wie wir schon wissen, je nachdem* $\operatorname{sgn}(r)=+1$ *oder* $=-1$ *ist) und wir kommen zur Vorstellung des „elliptischen" Flächenpunktes.* Ist zweitens $s^2-rt>0$, so gibt sowohl $\delta>0$ als $\delta<0$ einen reellen Schnitt. *Jetzt ist die Indikatrix eine „Hyperbel", die Fläche verläuft in der nächsten Umgebung von P sowohl oberhalb als unterhalb der Tangentialebene, und wir gelangen zur Vorstellung eines in der Tat durch $s^2-rt>0$ charakterisierten „hyperbolischen" Punktes.* Ist drittens $s^2-rt=0$, so mögen doch nicht alle drei Ableitungen r, s, t verschwinden. Für einen reellen Schnitt ist dann $\operatorname{sgn}(\delta)=\operatorname{sgn}(r)$ oder, falls r verschwindet, $\operatorname{sgn}(\delta)=\operatorname{sgn}(t)$ erforderlich. *Die Indikatrix zerfällt jetzt in ein „Paar paralleler Geraden"; diese Gestalt ist aber für einen durch $s^2-rt=0$ charakterisierten „parabolischen" Punkt bezeichnend.*

Als besonderen Satz haben wir noch: *Die Indikatrix eines Nabelpunktes ist ein Kreis.* Legen wir nämlich das Koordinatensystem so, daß die Tangentialebene parallel zur x,y-Ebene läuft, so gilt $p=0$, $q=0$, und die Proportion (13) S. 338 liefert $r=t$, $s=0$, so daß die Indikatrix durch:

$$\zeta-z=\frac{1}{2}\delta, \qquad (\xi-x)^2+(\eta-y)^2=\left(\frac{\delta}{r}\right)$$

dargestellt wird und also ein Kreis ist.

Die eben benutzte Lage des Koordinatensystems gestattet uns noch, auf zwei frühere Entwicklungen ergänzend und erläuternd zurückzugehen, nämlich auf die Darlegungen von S. 307 ff. über *singuläre Punkte ebener Kurven* und diejenigen von S. 247 ff. über *Maxima und Minima einer Funktion $f(x, y)$.*

In der horizontalen Tangentialebene des Punktes (x, y, z) unserer Fläche gebrauchen wir ξ und η als variable Koordinaten; die ebene Schnittkurve der Tangentialebene mit der Fläche hat dann die Gleichung:

$$f(\xi, \eta)-z=g(\xi, \eta)=0.$$

Die beiden Bedingungen $p=0$, $q=0$ kleiden sich in die Gestalten:

$$g'_\xi(\xi, \eta) = 0, \qquad g'_\eta(\xi, \eta) = 0,$$

woraus nach S. 308 hervorgeht, *daß die Schnittkurve einer Tangentialebene mit der Fläche im Berührungspunkte einen singulären Punkt hat.* Die nähere Fallunterscheidung von S. 309 aber ergibt sogleich weiter: *Der fragliche singuläre Punkt ist ein Doppelpunkt, eine Spitze oder ein isolierter Punkt, je nachdem der Punkt P auf der Fläche ein hyperbolischer, parabolischer oder ein elliptischer ist.* Die beiden reellen Kurventangenten im Doppelpunkte sind die beiden Flächentangenten mit den Normalschnitten der Krümmung $\varkappa = 0$. Im Falle der Spitze erkennen wir, daß die Fläche dicht am Punkte P in der Hauptsache ganz auf der einen Seite der Tangentialebene verläuft, nur zwischen den beiden in der Spitze sich berührenden Kurvenästen dringt die Fläche auf die andere Seite der Tangentialebene hinüber.

In anderer Gestalt treten uns die hier zugrunde liegenden Rechnungen bei der Bestimmung der Extremwerte der Funktionen $f(x, y)$ entgegen (s. S. 250). Die damaligen Bedingungen (9), die jetzt die Form $p=0$, $q=0$ annehmen, bedeuten geometrisch, *daß die Tangentialebene der Fläche $z=f(x, y)$ in einem Punkte (x, y) mit Extremwert $f(x, y)$ notwendig horizontal vorlaufen muß.* Die fernere Bedingung (10) S. 250, jetzt die Gestalt $s^2 - rt < 0$ annehmend, lehrt, *daß der Punkt (x, y, z) auf der Fläche ein „elliptischer" sein muß.* Nur dann ist in der Tat (x, y, z) ein höchster oder tiefster Punkt auf der Fläche. Dagegen ist für $s^2 - rt > 0$ die Fläche an der Stelle (x, y, z) sattelförmig gekrümmt, so daß es in jeder Umgebung der Stelle (x, y) Funktionswerte gibt, die $> f(x, y)$ sind, und auch solche, die $< f(x, y)$ sind.

9. Aufgaben über die Krümmung der Flächen. 1) Man untersuche, ob auf dem dreiachsigen Ellipsoid der Gleichung (15) S. 339 mit $a > b > c$ Nabelpunkte vorkommen. — Die Proportion (13) S. 338 kleidet sich zufolge (17) S. 339 in die Gestalt:

$$\left(\frac{c^2}{a^2} + p^2\right) : pq : \left(\frac{c^2}{b^2} + q^2\right) = (1 + p^2) : pq : (1 + q^2).$$

Wäre $pq \neq 0$, so würde $a = b = c$ entgegen der Annahme folgen; also ist mindestens eine der Größen p, q gleich 0. Wäre $p = 0$, so würde:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} q^2 = 1 + q^2$$

folgen, was unmöglich ist, da zufolge $a > b$, $a > c$ die linke Seite dieser Gleichung größer als die rechte ist. Also ist $q = 0$ und:

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} p^2 = 1 + p^2, \qquad p = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Aus (16) und (15) S. 339 berechnet man die vier Nebelpunkte:

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \qquad y = 0, \qquad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Man vgl. die Entwicklungen über Kreisschnitte des Ellipsoides S. 262ff., sowie „A. G.“, § 76.

2) Die Bedeutung des in (24) S. 342 gegebenen Krümmungsmaßes K_1 ist die, daß dasselbe unverändert bleibt bei jeder Verbiegung der Fläche, bei welcher die Längen der Kurven auf der Fläche unverändert bleiben. Um sich diesen Satz wenigstens anschaulich nahezulegen, nehme man ein kleines Stückchen der Fläche und biege den Hauptschnitt des Radius ϱ_1 so, daß ϱ_1 abnimmt; dann wird eben der andere Hauptschnitt derart auseinander gebogen, daß $\varrho_1 \cdot \varrho_2$ konstant bleibt. Nehmen wir jetzt eine *Fläche von konstantem Krümmungsmaße* K_1, so wird dieselbe bei jeder Verbiegung ihr Krümmungsmaß behalten. Es besteht aber sogar der Satz, daß bei zwei Flächen mit konstantem und gleichem Krümmungsmaße die eine immer nach geeigneter Verbiegung mit der anderen zur Deckung gebracht werden kann oder, wie man sagt, *daß die eine Fläche auf der anderen abwickelbar ist.* So sind alle Zylinder- und Kegelflächen, die durchweg die konstante Krümmung $K_1 = 0$ haben, auf der Ebene abwickelbar.

Wir stellen nun folgende Aufgabe: *Man untersuche die von den gesamten Tangenten einer Raumkurve gebildete Fläche* und zeige, *daß dieselbe das konstante Krümmungsmaß* $K_1 = 0$ *hat und also auf einer Ebene abwickelbar ist.* — Die einzelne Tangente einer Raumkurve ist gegeben durch:

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'},$$

wo wir x, y, z als Funktionen der Bogenlänge s fassen. Der durch v zu bezeichnende gemeinsame Wert der drei hier gleichgesetzten Quotienten ist der mit richtigem Vorzeichen versehene Abstand des variablen Punktes (ξ, η, ζ) der Tangente vom Berührungspunkte (x, y, z). Gebrauchen wir für die Bogenlänge der Raumkurve statt s die Bezeichnung u, so folgt:

$$(1) \qquad \xi = x(u) + v \cdot x'(u), \qquad \eta = y(u) + v \cdot y'(u), \qquad \zeta = z(u) + v \cdot z'(u)$$

als eine dem allgemeinen Ansatze (8) S. 313 sich unterordnende Darstellung der Fläche aller Tangenten. Fassen wir jetzt ζ als Funktion von ξ und η, so gilt:

$$p = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi} = (z' + vz'')\frac{\partial u}{\partial \xi} + z'\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Die Differentiation der beiden ersten Gleichungen (1) nach ξ ergibt:

$$1 = (x' + vx'')\frac{\partial u}{\partial \xi} + x'\frac{\partial v}{\partial \xi}, \qquad 0 = (y' + vy'')\frac{\partial u}{\partial \xi} + y'\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Berechnet man hieraus $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ und trägt die zu gewinnenden Ausdrücke in die voraufgehende Gleichung ein, so folgt die erste der Gleichungen:

$$p = -\frac{y'z'' - y''z'}{x'y'' - x''y'}, \qquad q = -\frac{z'x'' - z''x'}{x'y'' - x''y'},$$

während sich die zweite auf entsprechendem Wege ergibt. Hieraus geht hervor, daß p und q nur von u, nicht aber von v abhängen. Also berührt die Tangentialebene unserer Fläche „im Punkte (u, v)“ die Fläche längs der ganzen zugehörigen Tangente der Raumkurve und erweist sich als identisch mit der Schmiegungsebene der Kurve „im Punkte u“ (vgl. (12) S. 324). Weiter folgt aus dem Umstande, daß p und q nur von u allein abhängen, für die partiellen zweiten Ableitungen r, s, t:

$$r = \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{dp}{du}\frac{\partial u}{\partial \xi}, \qquad s = \frac{dp}{du}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{dq}{du}\frac{\partial u}{\partial \xi}, \qquad t = \frac{dq}{du}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Hieraus ergibt sich sofort:

$$s^2 - rt = \frac{dp}{du}\frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{dq}{du}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{dp}{du}\frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{dq}{du}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

so daß nach (25) S. 343 tatsächlich K_1 konstant gleich 0 ist.

Um sich die Abwickelbarkeit der Tangentenfläche auf die Ebene anschaulich verständlich zu machen, markiere man, wie in Fig. 106 geschehen ist, auf der Kurve in mäßigen Zwischenräumen eine Reihe von Punkten $P, P_1, P_2, P_3, \ldots$, ziehe von P aus die Sekante PP_1, von P_1 aus die Sekante P_1P_2 usw. Die aneinander geketteten ebenen Winkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Sekanten (s. Fig. 106) liefern dann offenbar ein auf der Ebene abwickelbares Gebilde. Dieses Gebilde aber nähert sich, wenn wir die Punkte P einander immer näher wählen, der Tangentenfläche als Grenzlage an.

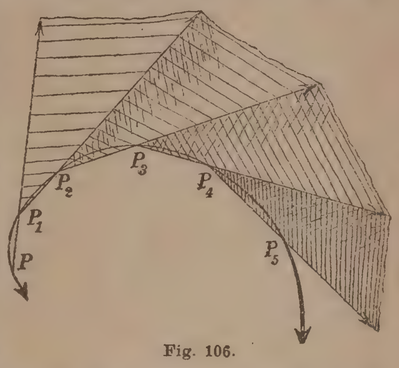


Fig. 106.

3) Aus einer in der x, y-Ebene, etwa oberhalb der x-Achse, gelegenen Kurve (s. Fig. 107) stelle man durch Rotation um die x-Achse eine Rotationsfläche her. Es soll eine Gleichung für das Krümmungsmaß K_1 der Rotationsfläche abgeleitet werden. — Der eine Hauptschnitt eines jeden Punktes der Rotationsfläche ist der durch ihn hindurchlaufende „Meridianschnitt". Der zugehörige Hauptkrümmungsradius ϱ_1 ist einfach der Krümmungsradius der Meridiankurve und als solcher durch:

$$\varrho_1 = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

bei positiv genommener Wurzel mit dem richtigen Vorzeichen gegeben. Der andere Hauptschnitt läuft durch die Normale PB der Fig. 107 senkrecht zur Papierebene. Nach dem Meusnierschen Satze (s. S. 337) ist der Punkt B der x-Achse das zugehörige Krümmungszentrum. Die durch die Ordinate PQ senkrecht zur Papierebene laufende Ebene schneidet nämlich einen Parallelkreis aus, der in Q sein Krümmungszentrum hat. Da aber diese Ebene mit der zweiten Hauptschnittebene die Flächentangente gemein hat, so muß nach dem genannten Satze (zweite Fassung) das Krümmungszentrum des zweiten Hauptschnittes auf der x-Achse, als dem in Q errichteten Lote auf der Ebene des Parallelkreises, liegen. Hiernach folgt aus (8) S. 278 für den Hauptkrümmungsradius:

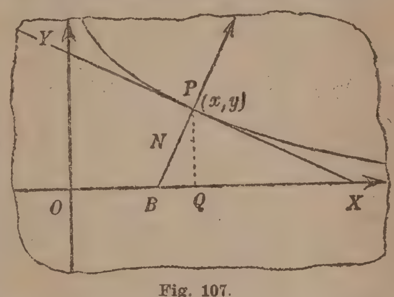


Fig. 107.

$$\varrho_2 = -N = -y\sqrt{1+y'^2}$$

mit positiv genommener Wurzel. Es gilt somit:

$$K_1 = -\frac{y''}{y(1+y'^2)^2}. \qquad (2)$$

4) Offenbar ist die Kugel des Radius 1 ein Beispiel einer Fläche des konstanten *positiven* Krümmungsmaßes 1, was man mit der Regel (2) leicht bestätigt. Die Evolute der Kettenlinie (𝔈𝔬𝔰 Kurve) ist in Fig. 94, S. 305, gezeichnet und daselbst unter (3) dargestellt; die Kurve ist, wie dort bemerkt wurde, unter dem Namen der „*Traktrix*" bekannt. Man beweise, *daß durch Rotation der Traktrix*

eine Fläche von konstantem „negativem" Krümmungsmaß -1, die sogenannte „*Pseudosphäre*", entsteht. — Aus (5) S. 305 folgt nämlich:

$$1 + y'^2 = \frac{1}{1-y^2}, \qquad y'' = \frac{y}{(1-y^2)^2},$$

so daß die Regel (2) ohne weiteres $K_1 = -1$ liefert.

10. Ebene Kurvenscharen und Hüllkurven. Unter „*Höhenkurven*" oder „*Niveaukurven*" einer Fläche versteht man diejenigen Kurven, welche durch Parallelebenen zur horizontal gedachten x, y-Ebene ausgeschnitten werden. Ist die Fläche durch eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben und eine einzelne Horizontalebene durch $z = p$ dargestellt, unter p eine Konstante verstanden, so wird die zugehörige Höhenkurve durch die Gleichung:

(1) $$f(x, y, p) = 0$$

geliefert. Projizieren wir alle Höhenkurven auf die x, y-Ebene, so erhalten wir *eine Schar unendlich vieler ebener Kurven, welche durch die Gleichung* (1) *vermittelst des „Parameters" p dargestellt ist.* Der Parameter p hat alle Werte zu durchlaufen, die reelle Horizontalschnitte der Fläche liefern; dabei entspricht jedem Einzelwerte p eine Kurve der Schar.

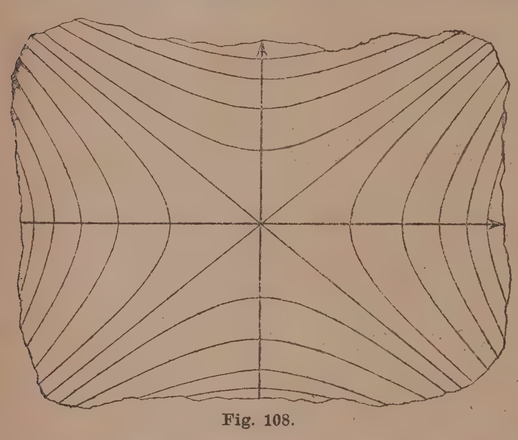


Fig. 108.

Auch umgekehrt können wir von jeder in der Ebene gegebenen Kurvenschar, die durch eine Gleichung (1) mit dem Parameter p dargestellt ist, sofort den Rückgang nehmen zu einer Fläche im Raume, dargestellt durch $f(x, y, z) = 0$, deren Höhenkurven die Kurvenschar in der besprochenen Art liefern.

In Fig. 108 ist die der Gleichung:

(2) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2p = 0$$

entsprechende Schar der Hyperbeln mit gemeinsamen Achsen und Asymptoten skizziert. Es handelt sich hier um die auf die x, y-Ebene projizierten Höhenkurven eines hyperbolischen Paraboloids (s. Fig. 104, S. 340).

Durch die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + d^2z^2 + 2exz - b^2 = 0$$

wird, falls $0 < |e| \lessdot d$ gilt, ein Ellipsoid dargestellt mit dem Koordinatennullpunkte als Mittelpunkte und der y-Achse als mittlerer Haupt-

achse, während die x, y-Ebene eine der beiden diametralen Kreisschnittebenen ist. Nach bekannten Sätzen (s. „A. G.", § 76 und Fig. 94 daselbst) sind jetzt alle Höhenkurven Kreise. Dies ist auch aus der letzten Gleichung einleuchtend, die als Gleichung der zugehörigen Kurvenschar der x, y-Ebene die Kreisgleichung:

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + d^2p^2 + 2epx - b^2 = 0$$

liefert. Während übrigens in (2) der Parameter p unbeschränkt war, ist in (3), falls man nur reelle Kreise haben will, p auf das Intervall:

$$-\frac{b}{\sqrt{d^2 - e^2}} \leqq p \leqq +\frac{b}{\sqrt{d^2 - e^2}}$$

einzuschränken; die beiden Extremwerte geben Kreise des Radius 0 und entsprechen den horizontalen Tangentialebenen des Ellipsoides. Die Gestalt der Kreisschar ist in Fig. 109 angegeben. Man versteht diese Figur am einfachsten vom Ellipsoid aus; zur Erleichterung der Anschauung wurde das Stück der einzelnen Höhenkurve, das durch die darüberliegende Kreisscheibe nicht verdeckt ist, etwas stärker ausgezogen.[1])

Bei der Schar (2) der Hyperbeln läuft durch jeden Punkt der Ebene eine und nur eine Kurve der Schar hindurch, was sich algebraisch in der Weise bestätigt, daß jedem Wertepaare x, y *ein* durch (2) gegebener Wert p zugehört. Die Kreisschar (3) dagegen wird (s. Fig. 109) von einer Ellipse umhüllt, die als die „*Hüllkurve*" (auch „*einhüllende Kurve*" oder „*Enveloppe*") der Schar bezeichnet wird. *Durch den einzelnen Punkt im Innern der Hüllkurve laufen je „zwei" Kurven der Schar hindurch; durch jeden Punkt der Hüllkurve selbst aber „eine", die die Hüllkurve daselbst berührt; das Äußere der Hüllkurve dagegen ist frei von Kurven der Schar.* Faßt man bei gegebenen x, y die Gleichung (3) als quadratische Gleichung für p auf, so hat dieselbe eine reelle Doppelwurzel für:

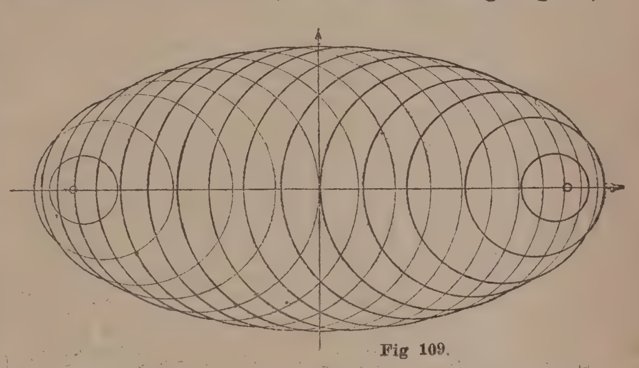


Fig 109.

$$(4) \qquad (d^2 - e^2)\, x^2 + d^2y^2 - b^2d^2 = 0;$$

sie hat indessen zwei reelle verschiedene Wurzeln p oder komplexe

1) In der Figur wurde $e < 0$ angenommen.

Wurzeln, je nachdem der in (4) links stehende Ausdruck negativ oder positiv ist.

Noch einleuchtender gestaltet sich die Anknüpfung an die räumlichen Verhältnisse. Nach (4) S. 316 ist allgemein die Gleichung einer Tangentialebene unseres Ellipsoides:

$$(x + ez)(\xi - x) + y(\eta - y) + (d^2z + ex)(\zeta - z) = 0.$$

Soll diese Ebene vertikal (parallel zur z-Achse) verlaufen, so muß $d^2z + ex = 0$ sein. Der *Zylinder aller vertikalen Tangenten des Ellipsoides* umhüllt diese Fläche, welche den Zylinder von innen berührt und zwar längs einer Ellipse, die durch die eben gewonnene Gleichung $d^2z + ex = 0$, eine Diametralebene darstellend, auf dem Ellipsoid ausgeschnitten wird. *Die Elimination von z aus der Gleichung dieser Ebene und der Ellipsoidgleichung führt zur Gleichung der Zylinderfläche oder (in der x, y-Ebene gedeutet) zur Gleichung der Hüllkurve* (4) *zurück.* Einleuchtend ist nun, daß jede zur z-Achse parallele Gerade im Innern des Zylinders das Ellipsoid zweimal trifft und also *zwei* Höhenkurven liefert, daß jede Mantellinie des Zylinders *eine*, jede außerhalb parallel zur z-Achse laufende Gerade *keine* Höhenkurve ergibt.

Wir verallgemeinern nun die hiermit dargelegten Verhältnisse für eine beliebige Kurvenschar (1) und stellen uns gleich auch die zugehörige durch $f(x, y, z) = 0$ gegebene Fläche vor, deren Tangentialebenen wir nach (4) S. 316 darstellen. Für die Berührungspunkte (x, y, z) der vertikal verlaufenden Tangenten der Fläche ist somit die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ charakteristisch, so daß alle diese Berührungspunkte diejenige Raumkurve bilden, die durch das Gleichungenpaar:

$$f(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

dargestellt wird. Gibt es überhaupt keine Punkte (x, y, z), die diese beiden Gleichungen zugleich befriedigen, so hat eben die Fläche keine vertikalen Tangenten. Wir nehmen jetzt an, daß solche Tangenten auftreten, und gewinnen dann die Gleichung des Zylinders aller vertikalen Flächentangenten, indem wir z aus den beiden Gleichungen (5) eliminieren. In Fig. 110 ist ein Stück der in der x, y-Ebene gelegenen Leitkurve der Zylinderfläche gezeichnet und im Punkte P die Normale der Kurve angedeutet. Hier möge der Zylinder auf seiner konkaven Seite von der Fläche berührt werden, wie durch

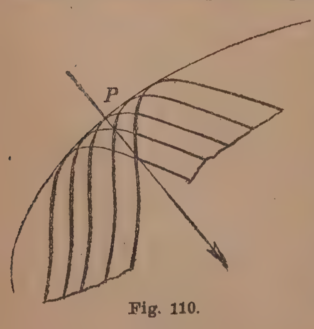


Fig. 110.

die in der Figur skizzierten Höhenkurven angedeutet ist. Die im Punkte P senkrecht zur Papierebene (parallel zur z-Achse) errichtete Gerade schneidet als Tangente unsere Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten; die z-Koordinate derselben befriedigt neben etwaigen sonstigen Lösungen die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ als Doppelwurzel, falls wir unter x und y die Koordinaten von P verstehen. Gehen wir auf der Normalen nach der Seite der Pfeilrichtung, so löst sich die Doppelwurzel z in ein Paar reeller verschiedener Wurzeln z_1, z_2; gehen wir nach der anderen Seite, so hören die beiden Wurzeln auf, reell zu sein.

Die gewonnenen Ergebnisse mögen jetzt für die Kurvenschar (1) in der x, y-Ebene ausgesprochen werden; wir gebrauchen dabei die Ausdrucksweise, daß die Kurvenschar einen einzelnen Punkt (x, y) der Ebene n-fach bedeckt, wenn n verschiedene (reelle) Kurven der Schar durch diesen Punkt hindurchlaufen. *Gibt es Wertsysteme x, y, p, welche die beiden Gleichungen:*

$$(6) \qquad f(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} = 0$$

zugleich befriedigen, so sagt man, die Kurvenschar habe eine „Hüllkurve", deren Gleichung man durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen (6) *gewinnt.* Die Bedeutung der Hüllkurve ist die, *daß sie die Ebenenteile voneinander trennt, welche von der Schar ungleich bedeckt sind; überschreiten wir die Hüllkurve irgendwo, so ändert sich die Vielfachheit der Bedeckung um zwei Einheiten. Zwei diesseits vorhandene Kurvenzüge verschmelzen beim Erreichen der Hüllkurve zu „einer" Kurve der Schar, die die Hüllkurve an jener Stelle berührt, und kommen jenseits in Fortfall.* Eine Hüllkurve tritt demnach stets und nur dann ein, wenn die Bedeckung der Ebene durch die Schar nicht überall die gleiche ist.

11. Aufgaben über Kurvenscharen und Hüllkurven. 1) Man bestätige durch Rechnung den selbstverständlichen Satz, daß die Schar der Tangenten einer durch $y = f(x)$ gegebenen Kurve eben diese Kurve als Hüllkurve besitzt. — Setzt man in der Tangentengleichung $\eta - f(x) = f'(x)(\xi - x)$ zum Anschluß an die Bezeichnungen von § 10 statt x den Parameter p ein und ersetzt ξ, η durch x, y, so ist:

$$y - f(p) - f'(p)(x - p) = 0$$

die Gleichung der Kurvenschar. Die zweite Gleichung (6) § 10 wird:

$$-f'(p) - f''(p)(x - p) + f'(p) = -f''(p)(x - p) = 0$$

oder einfach $p = x$. Trägt man diesen Ausdruck für p in die Gleichung der Schar ein, so folgt $y - f(x) = 0$ als Gleichung der Hüllkurve.

2) Man zeige auf demselben Wege, daß die Hüllkurve aller Normalen der Kurve $y = f(x)$ die zugehörige Evolute ist. — Die Schar der Normalen hat die Gleichung:

$$(1) \qquad \xi - x + f'(x)(\eta - f(x)) = 0,$$

wo wir x als „Parameter“ beibehalten. Durch Differentiation nach dem Parameter x erhalten wir:

(2) $$-1 + f''(x)(\eta - f(x)) - f'(x)^2 = 0.$$

Die Auflösung der Gleichungen (1) und (2) nach ξ und η ergibt:

$$\xi = x - \frac{f'(x) + f'(x)^3}{f''(x)} \qquad \eta = f(x) + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)}$$

und also in der Tat eine bekannte Darstellung der Evolute (s. (1) S. 299).

3) Die Gleichung:

(3) $$\frac{x}{\sqrt{a^2 - p^2}} + \frac{y}{p} - 1 = 0$$

stellt die Schar aller Geraden dar, deren einzelne zwischen den Achsen die Strecke a hat. Man stelle die Hüllkurve fest. — Durch Differentiation nach p folgt bei Entfernung der Nenner:

$$xp^3 - y\left(\sqrt{a^2 - p^2}\right)^3 = 0.$$

Setzt man demnach:

(4) $$\sqrt{a^2 - p^2} = \sigma x^{\frac{1}{3}}, \qquad p = \sigma y^{\frac{1}{3}},$$

so folgt einerseits durch Eintragung in (3), andrerseits durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen (4):

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \sigma, \qquad a^2 = \sigma^2\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right).$$

Also ist $\sigma = a^{\frac{2}{3}}$, und wir gelangen, wie es sein muß (s. „A. G.“, § 47), zur Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ der Astroide.

4) Einer auf der negativen x-Achse in großer Entfernung von O befindliche Lichtquelle sendet Lichtstrahlen, die als zur x-Achse parallel angesehen werden mögen. Diese Strahlen sollen am Halbkreise ABC (s. Fig. 111) des Radius 1 um O reflektiert werden. Man bestimme die „Hüllkurve der reflektierten Strahlen“, die als eine *„Brennlinie“* oder *„Katakaustik“* bezeichnet wird. — Trifft der Strahl den spiegelnden Halbkreis im Punkte der Koordinaten $\cos p$, $\sin p$, so hat (s. Fig. 111) der reflektierte Strahl die Gleichung:

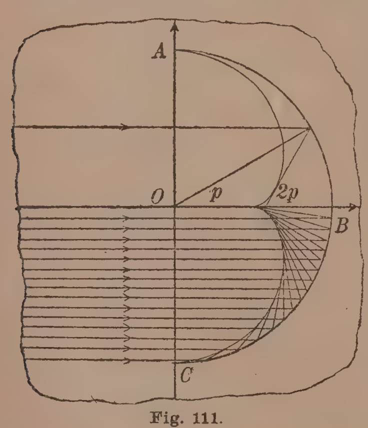


Fig. 111.

$$x \sin 2p - y \cos 2p - \sin p = 0.$$

Die zweite Gleichung (6) § 10 lautet hier:

$$x \cos 2p + y \sin 2p - \tfrac{1}{2} \cos p = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichungen bzw. mit $\cos p$ und $\sin p$, so folgt durch ihre Addition und Subtraktion:

$$x \sin 3p - y \cos 3p = \tfrac{3}{4} \sin 2p,$$
$$x \sin p \quad - y \cos p \quad = \tfrac{1}{4} \sin 2p.$$

Durch Lösung dieser Gleichungen nach x und y findet man:

$$x = \tfrac{3}{4} \cos p - \tfrac{1}{4} \cos 3p,$$
$$y = \tfrac{3}{4} \sin p - \tfrac{1}{4} \sin 3p.$$

Der Vergleich mit (3) S. 270 lehrt, daß die gesuchte Brennlinie identisch ist mit der *zweispitzigen Epizykloide*, die den Werten $a = \frac{1}{2}$, $b = c = \frac{1}{4}$ der damaligen Konstanten zugehört.

5) Im Punkte (1, 0) der Ebene sei eine Lichtquelle, und die von hier ausziehenden Strahlen sollen an einer Ellipse der Brennpunkte $(\pm 1, 0)$ reflektiert werden, so daß die zurückgeworfenen Strahlen nach dem anderen Brennpunkte konvergieren. Es soll jedoch an der y-Achse eine Brechung nach dem Gesetze (5) S. 242 eintreten. Die sich hierbei als „Hüllkurve der gebrochenen Strahlen" ergebende *„Brennlinie"* oder *„Diakaustik"* ist festzustellen. — In Fig. 112 ist ein einzelner Lichtstrahl gezeichnet, und zwar für den Fall, daß der Brechungsindex ν, d. i. der Quotient $\sin\alpha : \sin\beta$, größer als 1 ist. Verstehen wir unter μ den reziproken Wert von ν, so ist die Gleichung des gebrochenen Strahles:

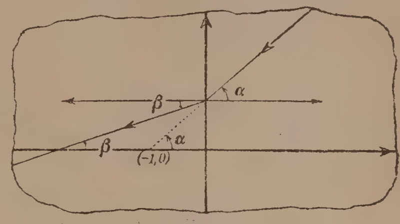


Fig. 112.

(5) $$y = x \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha, \quad \sin\beta = \mu\sin\alpha,$$

wobei β und α durch die zweite Gleichung verbunden sind. Wenn wir α als Parameter betrachten, so folgt durch Differentiation nach α:

$$\frac{x}{\cos^2\beta}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0, \qquad \cos\beta\,\frac{d\beta}{d\alpha} = \mu\cos\alpha.$$

Tragen wir den aus der zweiten Gleichung folgenden Wert von $\frac{d\beta}{d\alpha}$ in die erste ein und lösen diese Gleichung nach x, so folgt:

$$\mu x = -\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^3, \qquad (\mu x)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2.$$

Mit Benutzung des gewonnenen Wertes von x folgt weiter aus (5):

$$y = \frac{(\mu^2-1)\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}, \qquad (1-\mu^2)^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha}.$$

Nehmen wir vorerst $\mu < 1$ an (Fall der Fig. 112), so ergibt sich:

(6) $$(\mu x)^{\frac{2}{3}} - (\sqrt{1-\mu^2}\cdot y)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

ist hingegen $\mu > 1$, so schreiben wir die Gleichung der Hüllkurve so:

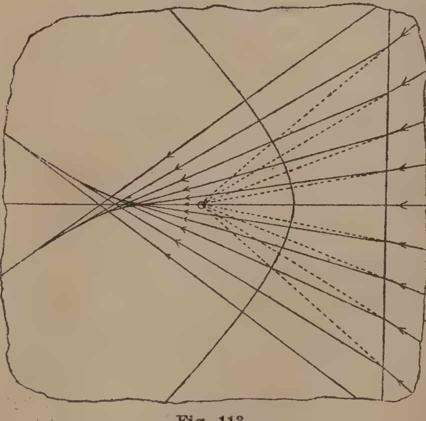
(7) $$(\mu x)^{\frac{2}{3}} + (\sqrt{\mu^2-1}\cdot y)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Die Diakaustik (6) ist die Evolute der Hyperbel der Gleichung:

$$\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{1-\mu^2} = 1$$

(s. S. 304, Aufg. 2), die die Punkte $(\pm 1, 0)$ zu Brennpunkten hat; die für $\mu > 1$ eintretende Brennlinie (7) aber ist die Evolute der durch:

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2-1} = 1$$


Fig. 113.

gegebenen Ellipse (s. S. 302) wieder mit den Brennpunkten $(\pm 1, 0)$. Fig. 113 erläutert die Verhältnisse im Falle $\mu < 1$, und zwar für $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kapitel III. **Untersuchung der Bewegungen.**

1. Bewegung eines einzelnen Punktes. Für eine in einem gewissen Intervalle eindeutige und stetige Funktion $s = f(t)$ wurde S. 22 eine Versinnlichung eingeführt, bei der t als Maß der Zeit und s als Abszisse auf einer Geraden gedeutet wurde. Durch die Funktion ist dann eine *Bewegung* des Punktes P der Abszisse s festgelegt, und mittelst dieser *geradlinigen Bewegung eines Punktes P* versinnlichten wir eben die Funktion. Dabei gewannen die beiden ersten Ableitungen $f'(t)$ und $f''(t)$, deren Existenz wir annehmen, bekannte Bedeutungen (s. S. 100 und 133): In Übereinstimmung mit den physikalischen Grundbegriffen erklärten wir $f'(t)$ als „*Geschwindigkeit*" und $f''(t)$ als „*Beschleunigung*" des Punktes P zur Zeit t. Zur Veranschaulichung der Geschwindigkeit trägt man am Punkte P auf der geradlinigen Bahn einen Pfeil der Länge $|f'(t)|$ ab und zwar in der Richtung wachsender oder abnehmender s, je nachdem $f'(t) > 0$ oder < 0 ist. Dieser Pfeil, der zugleich die augenblickliche Richtung der Bewegung anzeigt, heißt der „*Vektor*" *der Geschwindigkeit* und legt deren „Größe" und „Richtung" fest. Genau so erklärt man einen „*Vektor*" *der Beschleunigung*, der nach „Größe" und „Richtung" die augenblickliche Beschleunigung des Punktes P festlegt.

Der Gegenstand der folgenden Untersuchung soll nun *die Bewegung eines einzelnen Punktes im Raume* sein. Es möge in einem rechtwinkligen Systeme der Ort des Punktes P zur Zeit t durch die drei Gleichungen:

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

gegeben sein, die dann also im Sinne von (5) S. 312 die von dem Punkte beschriebene Raumkurve darstellen. In dem Zeitintervalle, das der Betrachtung zugrunde liegen möge, seien die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ samt ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung eindeutig und stetig. Die Bogenlänge s der Kurve führen wir so ein, daß die Maßzahl s mit wachsendem t wächst; die Bezeichnungen von S. 321 ff und insbesondere die von Aufgabe 2, S. 334, behalten wir im vollen Umfange bei.

Beschreibt nun während des auf den Augenblick t folgenden Zeitintervalles Δt der Punkt P das Bogenstück Δs, so heißt der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die „*mittlere Geschwindigkeit*" des Punktes während des Intervalles Δt. Der Grenzwert dieses Quotienten:

$$(2) \qquad \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = +\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

heißt die „*Geschwindigkeit*" des Punktes P zur Zeit t und werde durch:

$$(3) \qquad v = \dot{s} = +\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

bezeichnet. Zur Veranschaulichung der Geschwindigkeit tragen wir am Punkte P in der Richtung der Bewegung, d. h. tangential zur Kurve (1) in der Richtung wachsender Werte t, eine Strecke der Länge $v = \dot{s}$ ab. Diese Strecke nennen wir den *„Vektor“ der Geschwindigkeit* zur Zeit t. Man bezeichnet einen solchen Vektor unter Benutzung der Frakturschrift durch $\mathfrak{v}$; der „Betrag“ oder die „Größe“ $|\mathfrak{v}|$ des Vektors $\mathfrak{v}$ ist natürlich gleich $v = \dot{s}$, seine Richtungskosinus gegen die Achsen aber sind die der Tangente:

(4) $$\cos\alpha = x' = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = y' = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = z' = \frac{dz}{ds}.$$

Die Projektionen des Vektors $\mathfrak{v}$ auf die Achsen heißen seine *„Komponenten“* oder ausführlich *„die nach den Achsen genommenen Komponenten der Geschwindigkeit“*; man bezeichnet sie durch $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ und berechnet für sie die Ausdrücke:

(5) $$\begin{cases} \mathfrak{v}_x = v \cdot \cos\alpha = x' \cdot \dot{s} = \dfrac{dx}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}, \\ \mathfrak{v}_y = v \cdot \cos\beta = y' \cdot \dot{s} = \dfrac{dy}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y}, \\ \mathfrak{v}_z = v \cdot \cos\gamma = z' \cdot \dot{s} = \dfrac{dz}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z}. \end{cases}$$

Die Pfeilrichtung des Vektors $\mathfrak{v}$ ist dabei mitzuprojizieren und regelt das Vorzeichen der Zahlen $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$.

Die Addition zweier Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ vollzieht man, wie Fig. 114 näher darlegt, indem man den Vektor $\mathfrak{w}$, ohne seine Größe und Richtung zu ändern, vom Endpunkte des Vektors $\mathfrak{v}$ ausziehen läßt; der vom Anfangspunkte von $\mathfrak{v}$ bis zum Endpunkte von $\mathfrak{w}$ ziehende Vektor ist dann die durch $\mathfrak{v} + \mathfrak{w}$ zu bezeichnende Summe. Man kann, wie gleichfalls Fig. 114 erläutert, die Vektorsumme $\mathfrak{v} + \mathfrak{w}$ auch als Diagonale des Parallelogramms erklären, das man durch Ergänzung der beiden von gemeinsamem Anfangspunkte ausziehenden Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ herstellt. Einleuchtend (s. wieder Fig. 114) ist bei der ersten Erklärung der Summe der wichtige Satz: *Die Projektion der Vektorsumme auf eine Achse, etwa die x-Achse, ist gleich der algebraischen Summe der Projektionen der einzelnen Summanden:*

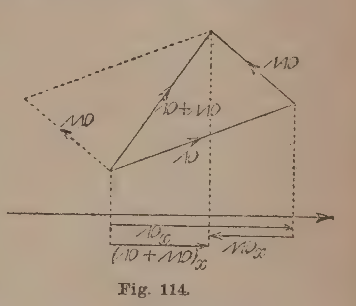


Fig. 114.

(6) $$(\mathfrak{v} + \mathfrak{w})_x = \mathfrak{v}_x + \mathfrak{w}_x.$$

Die Erklärung der *Differenz zweier Vektoren* ist eine einfache Folge des Begriffs der Vektorsumme. Setzen wir $\mathfrak{v} + \mathfrak{w} = \mathfrak{u}$, so folgt:

$$\mathfrak{u} - \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$$

als Ausdruck desjenigen Vektors, der zum Subtrahenden $\mathfrak{v}$ addiert werden muß, um den Minuenden $\mathfrak{u}$ zu liefern. Auch die Konstruktion der Differenz $\mathfrak{w}$ aus dem Minuenden $\mathfrak{u}$ und dem Subtrahenden $\mathfrak{v}$ ist einleuchtend.

Wir bilden nun, unter $\mathfrak{v}(t)$ den Geschwindigkeitsvektor unseres Punktes P zur Zeit t verstanden, die Differenz:

$$\Delta \mathfrak{v}(t) = \mathfrak{v}(t + \Delta t) - \mathfrak{v}(t),$$

welche denjenigen Vektor darstellt, der zu $\mathfrak{v}(t)$ hinzukommen muß, um $\mathfrak{v}(t + \Delta t)$ zu gewinnen. Wir können also $\Delta \mathfrak{v}(t)$ kurz als den Zuwachs des Geschwindigkeitsvektors während des Zeitintervalles Δt bezeichnen. Unter dem Quotienten:

(7) $$\frac{\Delta \mathfrak{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathfrak{v}(t + \Delta t) - \mathfrak{v}(t)}{\Delta t}$$

aber haben wir einen Vektor zu verstehen, der die Richtung des Vektors $\Delta \mathfrak{v}(t)$ hat, und dessen Betrag aus demjenigen von $\Delta \mathfrak{v}(t)$ durch Division mit Δt hervorgeht. *Diesen Vektor* (7) *erklären wir als den „Vektor der mittleren Beschleunigung" des Punktes P während des auf den Augenblick t folgenden Zeitintervalles Δt.* Falls für $\lim \Delta t = 0$ der Vektor (7) einem bestimmten Vektor als Grenzlage zustrebt, *erklären wir ihn als den „Vektor der Beschleunigung" des Punktes zur Zeit t.* Daß aber eine solche Grenzlage eintritt, folgt aus dem obigen Satze über die Komponenten einer Vektorsumme, aus dem ein entsprechender Satz über die Komponenten einer Vektordifferenz sofort hervorgeht. So haben wir z. B. für die nach der x-Achse genommene Komponente von $\Delta \mathfrak{v}(t)$ die Darstellung:

$$(\Delta \mathfrak{v}(t))_x = \mathfrak{v}_x(t + \Delta t) - \mathfrak{v}_x(t) = \dot{x}(t + \Delta t) - \dot{x}(t) = \ddot{x}(t + \vartheta \Delta t)\Delta t.$$

Teilen wir noch durch Δt, so ergibt sich für $\lim \Delta t = 0$ der Satz: *Die nach den Achsen genommenen Komponenten des Beschleunigungsvektors zur Zeit t oder kurz die „Komponenten der Beschleunigung" sind:*

(8) $$\ddot{x}(t) = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \ddot{y}(t) = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \ddot{z}(t) = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Bezeichnen wir diesen Vektor durch $\mathfrak{b}$, so ist sein Betrag:

(9) $$|\mathfrak{b}| = +\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

seine Richtungskosinus aber sind:

(10) $$\frac{\ddot{x}}{|\mathfrak{b}|} = \frac{\ddot{x}}{+\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \quad \frac{\ddot{y}}{|\mathfrak{b}|} = \frac{\ddot{y}}{+\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}},$$
$$\frac{\ddot{z}}{|\mathfrak{b}|} = \frac{\ddot{z}}{+\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}.$$

Die Ableitungen x', y', z' nach s hängen mit denen nach t durch die Gleichungen $\dot{x} = x' \cdot \dot{s}, \ldots$ zusammen. Nochmalige Differentiation nach t ergibt:

$$\ddot{x} = x' \cdot \ddot{s} + x'' \cdot \dot{s}^2, \quad \ddot{y} = y' \cdot \ddot{s} + y'' \cdot \dot{s}^2, \quad \ddot{z} = z' \cdot \ddot{s} + z'' \cdot \dot{s}^2;$$

wir können dafür auch schreiben:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{s} \cos \alpha + \frac{\dot{s}^2}{\varrho} \cos \lambda, \\ \ddot{y} &= \ddot{s} \cos \beta + \frac{\dot{s}^2}{\varrho} \cos \mu, \\ \ddot{z} &= \ddot{s} \cos \gamma + \frac{\dot{s}^2}{\varrho} \cos \nu, \end{aligned} \right.$$

unter λ, μ, ν die Richtungswinkel der Hauptnormalen und unter ϱ den ersten Krümmungsradius (Flexionsradius) der Bahnkurve unseres Punktes P verstanden (siehe S. 330 ff.). Die drei ersten Glieder in (11) rechts sind die Komponenten eines Vektors vom Betrage $|\ddot{s}|$, der mit der Tangente zusammenfällt und deren Richtung hat oder ihr entgegengerichtet ist, je nachdem sgn $(\ddot{s})$ gleich + oder − ist. Die drei weiteren Glieder sind die Komponenten eines Vektors vom Betrage $\frac{\dot{s}^2}{\varrho}$, der die Richtung der Hauptnormalen hat. Diese beiden Vektoren liefern die *„Tangentialbeschleunigung"* und die *„Zentripetalbeschleunigung"*. Bedienen wir uns der Sprechweise der Mechanik, die eine Vektorsumme als *„Resultante"* der summierten Vektoren bezeichnet, so gilt der Satz: *Die „Totalbeschleunigung", d. i. die Beschleunigung unseres Punktes P zur Zeit t mit den in* (8) *berechneten Komponenten, ist die Resultante der „Tangentialbeschleunigung" und der „Zentripetalbeschleunigung"; die erstere ist durch* $\ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2}$ *gegeben und hat bei positivem Vorzeichen von* $\ddot{s}$ *die Pfeilrichtung der Tangente, bei negativem aber die entgegengesetzte Richtung*; *die Zentripetalbeschleunigung ist gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit* $v = \dot{s}$, *geteilt durch den ersten Krümmungsradius (Flexionsradius)* ϱ, *und hat die Richtung der Hauptnormalen der Raumkurve.*

Die als Tangentialbeschleunigung bezeichnete Komponente ist es, welche die Änderung der Geschwindigkeit hervorruft; so lange diese Komponente $\ddot{s} = \frac{dv}{dt}$ gleich 0 ist, bleibt v konstant. Die Zentripetalbeschleunigung aber bewirkt die Krümmung der Bahn; so lange diese Komponente gleich 0 ist, muß $\varrho = \infty$ und also die Bahn gerade sein.

2. Aufgaben über die Bewegung eines einzelnen Punktes. 1) Der Punkt P beschreibe eine Ellipse der Halbachsen a, b nach dem Gesetze:

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t.$$

Man bestimme die Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Zeit t. — Da $\ddot{x} = -x$, $\ddot{y} = -y$ ist, so ist der Vektor der Totalbeschleunigung in jedem Augenblicke nach Größe und Richtung durch den von P nach dem Mittelpunkte der Ellipse gerichteten Ellipsenradius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gegeben. Die Geschwindigkeit $v = \sqrt{a^2 + b^2 - r^2}$ erreicht ihr Maximum a im Scheitelpunkte der kleinen Achse, ihr Minimum b im Scheitelpunkte der großen Achse.

2) Der Punkt P beschreibe eine Hyperbel der Halbachsen a, b nach dem Gesetze:

$$x = a \operatorname{Cos} t, \qquad y = b \operatorname{Sin} t.$$

Man bestimme wieder Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Zeit t. — Hier gilt $\ddot{x} = x$, $\ddot{y} = y$, so daß der Vektor der Totalbeschleunigung wieder durch den Hyperbelradius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ nach Größe und Richtung gegeben ist; doch hat er jetzt die Richtung vom Mittelpunkte fort. Die Geschwindigkeit $v = \sqrt{r^2 - a^2 + b^2}$ erreicht im Scheitelpunkte ihr Minimum b.

3) Der Punkt P durchlaufe eine zylindrische Schraubenlinie nach dem Gesetze:

$$x = a \cos(t^2), \qquad y = -a \sin(t^2), \qquad z = -\frac{h}{2\pi} t^2.$$

Man zeige für die Tangential- und Zentripetalbeschleunigung die Darstellungen:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \sqrt{4a^2 + \left(\frac{h}{\pi}\right)^2}, \qquad \frac{v^2}{\varrho} = 4at^2,$$

so daß jene konstant ist und diese proportional dem Quadrat der Zeit wächst. Man vgl. hierzu auch Aufgabe 1) S. 333.

4) Ein in der Ebene beweglicher Punkt P habe zur Zeit t die Polarkoordinaten $r(t)$, $\vartheta(t)$. Man drücke seine Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten aus. — Bezeichnet man mit $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\vartheta}, \ddot{\vartheta}$ die Ableitungen nach t, so folgt aus $x = r \cos\vartheta$, $y = r \sin\vartheta$:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}, \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta + r\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta},$$

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\vartheta - 2\dot{r}\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta} - r\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2 - r\sin\vartheta\cdot\ddot{\vartheta}, \ldots,$$

und hieraus ergibt sich für die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung b:

$$(1) \qquad v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2}, \qquad b = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})^2}.$$

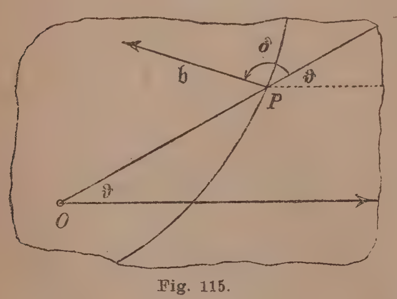


Fig. 115.

Es sei δ der Winkel zwischen dem Vektor $\mathfrak{b}$ der Beschleunigung und der Verlängerung des Radiusvektor r der Kurve über P hinaus (s. Fig. 115). Man zeige dann das Bestehen der Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \cos\delta = \dfrac{\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2}{b}, \\[2ex] \sin\delta = \dfrac{2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta}}{b}. \end{cases}$$

Zerlegt man demnach den Beschleunigungsvektor $\mathfrak{b}$ in zwei Komponenten $\mathfrak{b}_r$ und $\mathfrak{b}_\vartheta$ nach der Richtung des Radiusvektor OP und senkrecht dazu im Sinne wachsender ϑ, so gilt:

$$(3) \qquad \mathfrak{b}_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2, \qquad \mathfrak{b}_\vartheta = 2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta}.$$

5) Läuft der Vektor der Beschleunigung oder seine Verlängerung beständig durch einen und denselben Punkt der Ebene hindurch, so spricht man von einer

„Zentralbewegung“ und nennt jenen Punkt das *„Zentrum der Beschleunigung“*. Man nehme dieses Zentrum zum Pole der Polarkoordinaten und entwickle besondere Eigenschaften der Zentralbewegung. — Die charakteristische Eigenschaft der Zentralbewegung ist, daß $\mathfrak{b}_\vartheta$ konstant gleich 0 ist, was man auch durch die Gleichung:

(4) $$2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d(r^2\dot{\vartheta})}{dt} = 0$$

ausdrücken kann. Hiernach ist $r^2\dot{\vartheta}$ von t unabhängig, d. h. es besteht für die Zentralbewegung die Gleichung:

(5) $$r^2\dot{\vartheta} = r^2\frac{d\vartheta}{dt} = a,$$

Fig. 116.

unter a eine Konstante verstanden.

Die Gleichung gestattet eine bekannte geometrische Deutung. Man verstehe unter $F(\vartheta)$ den Inhalt der Fläche, die vom Radiusvektor r_0 eines festen Anfangswinkels ϑ_0, dem Radiusvektor r des variablen Winkels ϑ und dem zwischenliegenden Kurvenstück begrenzt ist. Der Zuwachs $\varDelta F(\vartheta)$ der Fläche, der der Vergrößerung von ϑ um $\varDelta\vartheta$ entspricht (Sektor OPP_1 der Fig. 116), kann zwischen zwei Dreiecksinhalte eingeschlossen werden. Setzt man nämlich $\overline{OP_1} = r + \varDelta r$, $\overline{OP_1'} = r + dr$, so ist:

$$\tfrac{1}{2}r(r + \varDelta r)\sin\varDelta\vartheta < \varDelta F(\vartheta) < \tfrac{1}{2}r(r + dr)\sin\varDelta\vartheta,$$

falls die Kurve an der betrachteten Stelle gegen O konkav ist; im anderen Falle sind die Ungleichheitszeichen umzukehren. Man findet hieraus leicht $\frac{1}{2}r^2$ als Ableitung der Funktion $F(\vartheta)$ nach ϑ:

(6) $$\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta} = \lim_{\varDelta\vartheta = 0}\frac{\varDelta F(\vartheta)}{\varDelta\vartheta} = \frac{1}{2}r^2.$$

Beschreibt der Punkt P im Laufe der Zeit t die Kurve, so wird damit auch der Flächeninhalt F eine Funktion von t, und es gilt:

(7) $$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\vartheta}.$$

Zufolge (5) und (7) ist für unsere Zentralbewegung die Ableitung von F nach t konstant gleich $\frac{1}{2}a$. Wir folgern hieraus, daß die Ableitung der Funktion $(F - \frac{1}{2}at)$ nach t konstant gleich 0 ist, so daß diese Funktion mit einer Konstanten b identisch ist; für die Fläche F als Funktion der Zeit t gilt somit:

(8) $$F = \tfrac{1}{2}at + b.$$

Man drückt dieses Gesetz gewöhnlich so aus: *Für eine Zentralbewegung ist hinreichend und notwendig, daß der vom Zentrum der Beschleunigung O nach dem wandernden Punkte P laufende Radiusvektor OP in gleichen Zeiten stets gleiche Flächen beschreibt.* Da nämlich aus der Gleichung (8) umgekehrt wieder $\mathfrak{b}_\vartheta = 0$ folgt, so ist auch die Gleichung (8) charakteristisch für eine Zentralbewegung.

6) Bei einer Zentralbewegung des Zentrums O durchlaufe P einen Kegelschnitt des Brennpunktes O (erstes und zweites Keplersches Gesetz); man untersuche die Beschleunigung und Geschwindigkeit des Punktes. — Als Kegelschnittgleichung benutzen wir nach (5) S. 271:

(9) $$r(1 - c\cdot\cos\vartheta) = p,$$

unter c die numerische Exzentrizität und unter p den Halbparameter verstanden. Aus (9) folgt durch Differentiation nach t:

$$\dot{r}(1 - c\cos\vartheta) + r\cdot c\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta} = p\cdot\frac{\dot{r}}{r} + r\dot{\vartheta}\cdot c\sin\vartheta = 0,$$

und also unter Benutzung von (5):

(10) $$\dot{r} = -\frac{ac}{p} \cdot \sin\vartheta.$$

Durch nochmalige Differentiation nach t folgt mit Rücksicht auf (5):

$$\ddot{r} = -\frac{ac}{p} \cdot \cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta} = -c \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{a^2 p^{-1}}{r^2}.$$

Da $r\dot{\vartheta}^2 = a^2 r^{-3}$ gesetzt werden kann, so ergibt sich weiter:

$$\mathfrak{b}_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = -\frac{a^2}{r^3} - c \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{a^2 p^{-1}}{r^2},$$

ein Ausdruck, der sich mit Hilfe von (9) umgestaltet in:

(11) $$\mathfrak{b}_r = -\frac{a^2 p^{-1}}{r^2}.$$

Die Beschleunigung ist also nach dem Zentrum O hingerichtet und indirekt proportional dem Quadrat des Radiusvektor r (Gravitationsgesetz).

Für die Geschwindigkeit v findet man aus (1), (10) und (5):

$$v = \sqrt{\frac{a^2c^2}{p^2}\sin^2\vartheta + \frac{a^2}{r^2}} = \frac{a}{p}\sqrt{c^2\sin^2\vartheta + \left(\frac{p}{r}\right)^2},$$

und also folgt weiter unter Benutzung von (9):

(12) $$v = \frac{a}{p}\sqrt{(1+c^2) - 2c\cos\vartheta}.$$

Im Falle einer elliptischen Bahn tritt das Minimum der Geschwindigkeit für $\vartheta = 0$ (Aphel), das Maximum für $\vartheta = \pi$ (Perihel) ein.

7) Fig. 117 stellt den in „A. G.", § 43, näher besprochenen *„Schubkurbelmechanismus"* dar. Die Länge der Kurbel $\overline{OA}$ sei a, die der „Schubstange" $\overline{AB}$

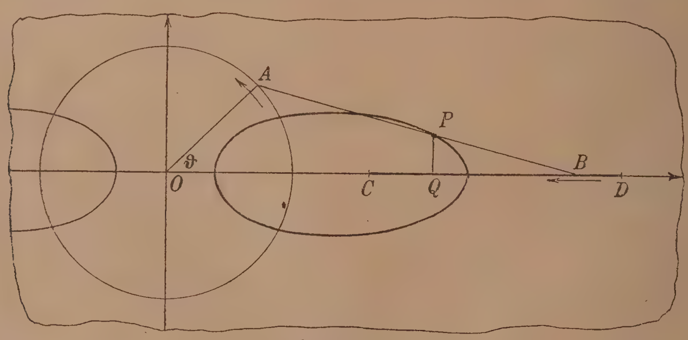


Fig. 117.

gleich l. Der Punkt P der Schubstange zerlege dieselbe in die Strecken $\overline{AP} = b$, $\overline{BP} = c = l - b$. Der „Kurbelwinkel" ist mit ϑ bezeichnet. Nach „A. G.", § 43, sind die auf O als Nullpunkt und OB als positive x-Achse bezogenen Koordinaten von P, in Abhängigkeit von ϑ:

(13) $$x = \frac{b}{l}x_0 + \frac{a(l-b)}{l}\cos\vartheta, \qquad y = \frac{a(l-b)}{l}\sin\vartheta,$$

wo x_0 die Abszisse des „Gleitpunktes" B ist:

$$x_0 = a\cos\vartheta + l\sqrt{1-\frac{a^2}{l^2}\sin^2\vartheta}\,. \tag{14}$$

Man bestimme die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes P der Schubstange, der die in Fig. 117 gezeichnete Kurve (eine algebraische Kurve vierten Grades) beschreibt. — Aus (13) folgt:

$$\dot{x} = \frac{b}{l}\dot{x}_0 - \frac{a(l-b)}{l}\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}, \qquad \dot{y} = +\frac{a(l-b)}{l}\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta},$$

sowie für die Komponenten der Beschleunigung:

$$\ddot{x} = \frac{b}{l}\ddot{x}_0 - \frac{a(l-b)}{l}\left(\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2 + \sin\vartheta\cdot\ddot{\vartheta}\right),$$

$$\ddot{y} = -\frac{a(l-b)}{l}\left(\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2 - \cos\vartheta\cdot\ddot{\vartheta}\right);$$

die Ableitungen $\dot{\vartheta}$ und $\ddot{\vartheta}$ des Kurbelwinkels nach t heißen „Winkelgeschwindigkeit" und „Winkelbeschleunigung" der Kurbel. Durch die vorstehenden Gleichungen ist die Bewegung des Punktes P auf diejenige des Gleitpunktes B zurückgeführt.

In dem in der Technik wichtigen Falle $a < l$ kann man die in (14) rechts stehende Wurzel in eine konvergente Binomialreihe entwickeln und findet:

$$x_0 = a\cos\vartheta + l - \frac{a^2}{2l}\sin^2\vartheta + \cdots.$$

Drückt man die geraden Potenzen von $\sin\vartheta$ durch die Kosinus der Vielfachen von ϑ aus, also:

$$\sin^2\vartheta = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\vartheta), \ldots,$$

(s. die Behandlung der Fourierschen Reihen in Bd. 2), so folgt:

$$x_0 = \frac{4l^2-a^2}{4l} + a\cos\vartheta + \frac{a^2}{4l}\cos 2\vartheta + \cdots. \tag{15}$$

Ist die Kurbel a im Vergleich zur Schubstange l sehr klein, so bieten die in (15) angegebenen Glieder bereits eine brauchbare Näherungsdarstellung von x_0.

Bei Schwungrädern von Dampfmaschinen ist die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ nahezu konstant und $\ddot{\vartheta}$ fast gleich 0. Dann gilt näherungsweise:

$$\dot{x}_0 = -a\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta} - \frac{a^2}{2l}\sin 2\vartheta\cdot\dot{\vartheta} + \cdots,$$

$$\ddot{x}_0 = -a\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2 - \frac{a^2}{l}\cos 2\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2 - \cdots.$$

Die Beschleunigung des Gleitpunktes B (auch jedes Punktes P der Schubstange) ist hiernach bei gleicher Stellung der Kurbel dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional. Der Vergleich der Koeffizienten der beiden Glieder mit $\cos 2\vartheta$ in den Ausdrücken für x_0 und $\ddot{x}_0$ zeigt aber, wie man sagen kann, *daß die Wirkung dieses Gliedes bei der Beschleunigung $\ddot{x}_0$ viermal so stark ist als beim Orte x_0.*

3. Ebene Bewegung eines starren Körpers. Man bezeichnet die Bewegung eines starren Körpers als eine *ebene*, falls sich jeder Punkt des Körpers beständig parallel zu einer festen Ebene bewegt. Legen wir

parallel zu dieser Ebene irgend eine Ebene durch den Körper hindurch und denken sie fortan mit dem Körper fest verbunden, so können wir die vorliegende Bewegung auch als *eine solche dieser Ebene in sich selbst* auffassen; denn mit dieser Bewegung der Ebene in sich ist die Bewegung des ganzen Körpers festgelegt.

Wir denken uns zwei Exemplare dieser Ebene, ein festliegendes und ein bewegliches, übereinander gelagert und legen in jeder Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde, wobei der Bestimmtheit halber die Annahme gelten möge, *daß zur Zeit* $t = 0$ *beide Koordinatensysteme zusammenfallen.* Die Bewegung kann dann in der Art dargestellt werden, *daß wir die Koordinaten des beweglichen Nullpunktes im festen Systeme zu irgend einer Zeit* t *durch zwei Gleichungen* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ *angeben und den Richtungswinkel* ϑ *der beweglichen* x*-Achse gegen die feste gleichfalls als Funktion der Zeit* $\vartheta(t)$ *als gegeben ansehen.* Die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ seien in dem der Betrachtung zugrunde liegenden Zeitintervalle samt ihren zur Benutzung kommenden Ableitungen eindeutig und stetig. Für $t = 0$ verschwinden alle drei Funktionen φ, ψ und ϑ, da in diesem Augenblicke das bewegliche Koordinatensystem mit dem festen zusammenfallen sollte.

Die Bahn, die irgend ein Punkt P der Koordinaten x_0, y_0 der beweglichen Ebene im Laufe der Zeit t in der festen Ebene beschreibt, ist nun leicht festzustellen. Der Punkt (x_0, y_0) im beweglichen Systeme hat nämlich nach den Formeln über Transformation rechtwinkliger Koordinaten (s. „A. G.“, § 3) zur Zeit t im festen Systeme der Koordinaten:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x_0 \cos \vartheta(t) - y_0 \sin \vartheta(t) + \varphi(t), \\ y = x_0 \sin \vartheta(t) + y_0 \cos \vartheta(t) + \psi(t). \end{cases}$$

Für jedes gewählte Wertsystem x_0, y_0 ist hierdurch mittels der dritten, unabhängigen Variablen t eine Kurve dargestellt; *wir nennen sie die „Bahnkurve“ des Punktes* P*, der sich zur Zeit* $t = 0$ *an der Stelle* (x_0, y_0) *der festen Ebene befand.*

Um die *Komponenten der Geschwindigkeit* des fraglichen Punktes P zur Zeit t zu berechnen, haben wir seine in (1) dargestellten Koordinaten nach t zu differenzieren:

$$\dot{x} = -(x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta)\dot{\vartheta} + \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = (x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta)\dot{\vartheta} + \dot{\psi}.$$

Mit Hilfe von (1) nehmen diese Komponenten die Gestalt an:

$$(2) \qquad \dot{x} = -(y - \psi)\dot{\vartheta} + \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = +(x - \varphi)\dot{\vartheta} + \dot{\psi}.$$

Hieraus ergibt sich ein höchst einfaches Bild über die Geschwindigkeit und damit über den augenblicklichen Bewegungszustand der Ebene. Wir nehmen zunächst an, daß $\dot{\vartheta}(t) \neq 0$ sei. Dann gibt es einen und nur

einen Punkt, der zur Zeit t die Geschwindigkeit 0 hat und also auch die Komponenten $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ liefert. Die Koordinaten[1]) dieses Punktes, welche durch ξ, η bezeichnet werden mögen, sind die Werte von x und y, für welche die in (2) rechts stehenden Ausdrücke verschwinden:

$$(3) \qquad \xi = \varphi(t) - \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\vartheta}(t)}, \qquad \eta = \psi(t) + \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{\vartheta}(t)}.$$

Mit Hilfe von ξ und η schreiben sich die Komponenten (2) so:

$$(4) \qquad \dot{x} = -(y - \eta)\dot{\vartheta}, \qquad \dot{y} = +(x - \xi)\dot{\vartheta}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ hat also den Betrag:

$$v = +\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = |\dot{\vartheta}| \cdot \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

und die Richtungskosinus gegen die festen Achsen:

$$(5) \qquad \frac{\dot{x}}{v} = -\frac{(y-\eta)\cdot \operatorname{sgn}(\dot{\vartheta})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad \frac{\dot{y}}{v} = +\frac{(x-\xi)\cdot \operatorname{sgn}(\dot{\vartheta})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}.$$

Demnach ist für irgend einen Punkt (x, y) die Geschwindigkeit v proportional zum Abstande dieses Punktes (x, y) vom Punkte (ξ, η), und die Richtung der Geschwindigkeit ist senkrecht zur Verbindungsgeraden beider Punkte: *Der Bewegungszustand der Ebene zur Zeit t zeigt das Bild einer Drehung der Ebene um den Punkt* (ξ, η), *den sogenannten „augenblicklichen Drehpol", von der „Winkelgeschwindigkeit"* $\dot{\vartheta}$, *deren Vorzeichen die Drehungsrichtung festlegt.* Die Richtungskosinus (5) sind zugleich die der Tangente der Bahnkurve im Punkte t. Es folgt demnach: *Die Normale jeder der zweifach unendlich vielen Bahnkurven* (1) *„im Punkte t" läuft durch den augenblicklichen Drehpol* (3) *hindurch.* Irgend zwei nicht zusammenfallende unter diesen Normalen genügen demnach, um den Drehpol zu konstruieren.

Im besonderen Falle $\dot{\vartheta} = 0$ ist der augenblickliche Bewegungszustand der Ebene noch einfacher, da jetzt die Komponenten $\dot{x} = \dot{\varphi}$, $\dot{y} = \dot{\psi}$ für alle Punkte (x, y) die gleichen sind. *Für* $\dot{\vartheta}(t) = 0$ *zeigt der Bewegungszustand zur Zeit t das Bild einer „Parallelverschiebung" oder „Translation" der bewegten Ebene; der Vektor* $\mathfrak{v}$ *hat für alle Punkte der Ebene den Betrag* $v = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}$ *und die Richtungskosinus* $\frac{\dot{\varphi}}{v}, \frac{\dot{\psi}}{v}$. Man kann auch sagen, der Drehpol liege im Unendlichen, und zwar in derjenigen Richtung, die durch die *nunmehr durchweg parallelen Normalen der Bahnkurven* „im Punkte t" gegeben ist.

---

1) Wenn nichts weiter gesagt ist, sind immer die Koordinaten im festen Systeme gemeint.

Mittels der Transformationsformeln (1) stellt man leicht als Koordinaten des augenblicklichen Drehpoles im beweglichen Systeme fest:

(6) $$\xi_0 = \frac{\dot\varphi \sin\vartheta - \dot\psi \cos\vartheta}{\dot\vartheta}, \quad \eta_0 = \frac{\dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi \sin\vartheta}{\dot\vartheta}.$$

Der geometrische Ort aller Drehpole (ξ, η) in der festen Ebene wird als die *„feste Polkurve“* bezeichnet; sie ist durch das Gleichungenpaar (3) mittels der unabhängigen Variablen t dargestellt. Entsprechend nennt man den geometrischen Ort aller Drehpole (ξ_0, η_0) in der beweglichen Ebene die *„bewegliche Polkurve“*; ihre Darstellung mittels der Variablen t ist in (6) enthalten.

Die Ableitungen von ξ und η nach t sind:

(7) $$\dot\xi = \dot\varphi - \frac{\dot\vartheta\ddot\psi - \dot\psi\ddot\vartheta}{\dot\vartheta^2}, \quad \dot\eta = \dot\psi + \frac{\dot\vartheta\ddot\varphi - \dot\varphi\ddot\vartheta}{\dot\vartheta^2}.$$

Differenziert man aber die in (6) angegebenen Ausdrücke ξ_0, η_0 nach t, so lassen sich die Ergebnisse mit Hilfe der Gleichung (7) in folgender Art zusammenziehen:

(8) $$\dot\xi_0 = +\dot\xi \cos\vartheta + \dot\eta \sin\vartheta, \quad \dot\eta_0 = -\dot\xi \sin\vartheta + \dot\eta \cos\vartheta.$$

Bilden die Tangenten der Polkurven im gemeinsamen „Punkte t“ mit den bezüglichen Abszissenachsen die Winkel α und α_0, so gilt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dot\eta}{\dot\xi}, \quad \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\dot\eta_0}{\dot\xi_0}.$$

Die Gleichungen (8) aber lehren die Beziehung:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\vartheta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\vartheta} = \operatorname{tg}(\alpha - \vartheta), \quad \alpha_0 = \alpha - \vartheta.$$

Bei der gegenseitigen Lage der Koordinatensysteme folgt hieraus: *Zur Zeit t berührt die bewegliche Polkurve die feste im augenblicklichen Drehpole* (ξ, η).

Auf der festen Polkurve bewegt sich der Drehpol mit der aus (7) zu berechnenden Geschwindigkeit $+\sqrt{\dot\xi^2 + \dot\eta^2}$ fort, und zwar in derjenigen Richtung, die durch die Komponenten (7) festgelegt ist. Zufolge (8) ist aber:

$$\sqrt{\dot\xi_0^2 + \dot\eta_0^2} = \sqrt{\dot\xi^2 + \dot\eta^2},$$

so daß der Pol auf der beweglichen Polkurve *mit der gleichen Geschwindigkeit* voranschreitet. Hiermit haben wir ein übersichtliches Bild der ebenen Bewegung gewonnen: *Die bewegliche Polkurve rollt ohne Gleitung auf der festen Polkurve ab, wobei der Berührungspunkt mit einer Geschwindigkeit der Komponenten* (7) *voranschreitet.* Die starr mit der rollenden Kurve verbundene Ebene wird dabei, wie man sagt, „zwangläufig“ mitgenommen.

4. Beschleunigungen bei der ebenen Bewegung. Um die Komponenten der Beschleunigung des Punktes (x, y) zur Zeit t zu bestimmen, nehmen wir zunächst wieder $\dot{\vartheta}(t) \neq 0$ an und bezeichnen die Entfernung des Punktes (x, y) vom augenblicklichen Drehpole (ξ, η) mit r; dann gilt:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{(x-\xi)(\dot{x}-\dot{\xi}) + (y-\eta)(\dot{y}-\dot{\eta})}{r}.$$

Mit Benutzung der Ausdrücke (4) S. 363 für $\dot{x}, \dot{y}$ kürzt sich der Ausdruck für $\dot{r}$ in folgender Art:

$$\dot{r} = -\frac{(x-\xi)\dot{\xi} + (y-\eta)\dot{\eta}}{r}. \tag{1}$$

Die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes (x, y) sind nach (5) S. 363:

$$\dot{x} = -\frac{y-\eta}{r}\operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}) \cdot v, \quad \dot{y} = +\frac{x-\xi}{r}\operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}) \cdot v.$$

Durch nochmalige Differentiation nach t ergeben sich als Komponenten der Beschleunigung:

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{y-\eta}{r}\operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}) \cdot \dot{v} - \operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}) v \cdot \left(\frac{\dot{y}-\dot{\eta}}{r} + \frac{(y-\eta)((x-\xi)\dot{\xi} + (y-\eta)\dot{\eta})}{r^3}\right), \\ \ddot{y} &= +\frac{x-\xi}{r}\operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}) \cdot \dot{v} + \operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}) v \cdot \left(\frac{\dot{x}-\dot{\xi}}{r} + \frac{(x-\xi)((x-\xi)\dot{\xi} + (y-\eta)\dot{\eta})}{r^3}\right). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Als Tangentialbeschleunigung $\dot{v}$ findet man durch Differentation von $v = \operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}) \cdot \dot{\vartheta} r$ mit Rücksicht auf (1):

$$\dot{v} = \operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}) r \left(\ddot{\vartheta} - \dot{\vartheta}\frac{(x-\xi)\dot{\xi} + (y-\eta)\dot{\eta}}{r^2}\right). \tag{3}$$

Die von den beiden ersten Gliedern in (2) rechts gelieferten *Komponenten der Tangentialbeschleunigung* sind somit:

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{y-\eta}{r^2}\left(\ddot{\vartheta} r^2 - \dot{\vartheta}((x-\xi)\dot{\xi} + (y-\eta)\dot{\eta})\right), \\ &+\frac{x-\xi}{r^2}\left(\ddot{\vartheta} r^2 - \dot{\vartheta}((x-\xi)\dot{\xi} + (y-\eta)\dot{\eta})\right). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Die beiden letzten Glieder in (2) rechts liefern die Zentripetalbeschleunigung. Indem man die in den ersten Gliedern der Klammerausdrücke auftretenden $\dot{y}$ und $\dot{x}$ nach (4) S. 363 ersetzt, gewinnt man nach kurzer Umrechnung als *Komponenten der Zentripetalbeschleunigung* des Punktes (x, y) zur Zeit t:

$$\left\{\begin{aligned} &-\operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}) v \frac{x-\xi}{r^3}(\dot{\vartheta} r^2 - (x-\xi)\dot{\eta} + (y-\eta)\dot{\xi}), \\ &+\operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}) v \frac{y-\eta}{r^3}(\dot{\vartheta} r^2 - (x-\xi)\dot{\eta} + (y-\eta)\dot{\xi}), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

die nach Einsetzung des Ausdrucks $\operatorname{sgn}(\dot\vartheta)\cdot\dot\vartheta r$ für v die Gestalt annehmen:

$$(6)\qquad \begin{cases} -\dot\vartheta\dfrac{x-\xi}{r^2}(\dot\vartheta r^2-(x-\xi)\dot\eta+(y-\eta)\dot\xi), \\ -\dot\vartheta\dfrac{y-\eta}{r^2}(\dot\vartheta r^2-(x-\xi)\dot\eta+(y-\eta)\dot\xi). \end{cases}$$

Neben der bisherigen *Annahme einer nicht-verschwindenden Winkelgeschwindigkeit* $\dot\vartheta(t)$ gelte jetzt auch noch *die „Winkelbeschleunigung"* $\ddot\vartheta(t)$ *zur Zeit t als von 0 verschieden.* Durch:

$$(7)\qquad \begin{cases} (x-\xi)^2+(y-\eta)^2-\dfrac{1}{\dot\vartheta}((x-\xi)\dot\eta-(y-\eta)\dot\xi)=0, \\ (x-\xi)^2+(y-\eta)^2-\dfrac{\dot\vartheta}{\ddot\vartheta}((x-\xi)\dot\xi+(y-\eta)\dot\eta)=0 \end{cases}$$

werden dann in den variablen Koordinaten x, y zwei Kreise K_1 und K_2 dargestellt, die als „*Wendekreis*" und „*Wechselkreis*" zur Zeit t bezeichnet werden. Beide Kreise laufen durch den Pol (ξ, η) hindurch und zwar der erste tangential, der zweite normal zur Polkurve. Die Mittelpunkte von K_1 und K_2 sind:

$$\left(\xi+\frac{\dot\eta}{2\dot\vartheta},\ \eta-\frac{\dot\xi}{2\dot\vartheta}\right)\quad \text{bzw.}\quad \left(\xi+\frac{\dot\vartheta\dot\xi}{2\ddot\vartheta},\ \eta+\frac{\dot\vartheta\dot\eta}{2\ddot\vartheta}\right).$$

Ist $V=+\sqrt{\dot\xi^2+\dot\eta^2}$ die augenblickliche Geschwindigkeit, mit der der Drehpol auf der Polkurve fortschreitet, so gilt für die Durchmesser D_1 und D_2 unserer Kreise:

$$(8)\qquad D_1=\frac{V}{|\dot\vartheta|},\quad D_2=\left|\frac{\dot\vartheta}{\ddot\vartheta}\right|V,\quad D_2=\frac{\dot\vartheta^2}{|\ddot\vartheta|}\cdot D_1.$$

In Fig. 118 sind die Lagenverhältnisse der Polkurve, des Vektors der Geschwindigkeit V des Drehpoles (ξ, η) und der beiden Kreise K_1 und K_2 für den Fall zweier positiver Werte $\dot\vartheta$, $\ddot\vartheta$ dargestellt. Die übrigen Zeichenkombinationen wird man leicht entsprechend erläutern. Auf Grund von (8) kann man durch Konstruktion vierter Proportionalen sehr leicht $|\dot\vartheta|$ und $|\ddot\vartheta|$ bei gegebenen V, D_1, D_2 gewinnen oder auch (was unserer Entwicklung besser entspricht) die Durchmesser D_1, D_2 bei gegebenen $V, \dot\vartheta, \ddot\vartheta$ konstruieren.

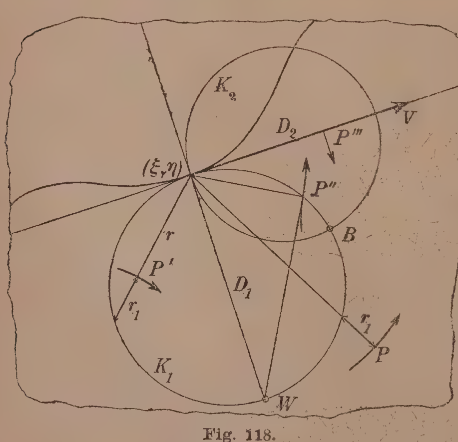


Fig. 118.

Setzt man die Koordinaten irgend eines Punktes (x, y) in eine Gleichung (7) eines der beiden Kreise ein, so gibt die linke Seite der Gleichung einen Zahlwert $p(x,y)$, den man als die „Potenz" des Punktes (x,y) in bezug auf den Kreis bezeichnet. Liegt (x, y) außerhalb K, so ist $p(x, y) > 0$ und gleich dem Produkte der Abschnitte irgend einer Kreissekante, gemessen vom Punkte (x, y) bis zu den beiden Schnittpunkten der Sekante mit dem Kreise. Liegt (x, y) im Kreise, so ist $p(x, y) < 0$, und $-p(x, y)$ ist gleich dem Produkte der Abschnitte irgend einer Kreissehne durch (x, y) von diesem Punkte (x, y) bis zu den Sehnenendpunkten („A. G.", § 18).

Ziehen wir nun die Sekante bzw. Sehne zunächst des Wechselkreises K_2, die zum Pole (ξ, η) und irgend einem Punkte (x, y) gehört, so ist der eine der beiden hierbei eintretenden Abschnitte stets gleich r. Nennen wir also den anderen r_2, so gilt:

$$p_2(x, y) = r \cdot r_2 \quad \text{bzw.} \quad p_2(x, y) = -r \cdot r_2,$$

je nachdem (x, y) außerhalb oder innerhalb des Wechselkreises liegt. Da zufolge (3):

$$\dot{v} = \operatorname{sgn}(\dot{\vartheta})\, \ddot{\vartheta} \cdot \frac{p_2(x, y)}{r}$$

gilt, so folgt für die Tangentialbeschleunigung und ihre Komponenten im Punkte (x, y):

$$(9) \qquad \dot{v} = \pm \operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}) \cdot r_2 \ddot{\vartheta}, \quad \mp \frac{y - \eta}{r} r_2 \ddot{\vartheta}, \quad \pm \frac{x - \xi}{r} \cdot r_2 \ddot{\vartheta},$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem der Punkt (x, y) außerhalb oder innerhalb des Wechselkreises liegt. *Der Betrag* $|\dot{v}|$ *der Tangentialbeschleunigung ist hiernach für alle vom Drehpole verschiedenen Punkte* (x, y) *proportional zu* r_2, *nämlich gleich dem Produkte des Abstandes* r_2 *und der Winkelbeschleunigung* $\ddot{\vartheta}$. *Die Bewegung ist entweder außerhalb des Wechselkreises beschleunigt und innerhalb verzögert oder umgekehrt*[1]); *die Punkte des Wechselkreises selbst haben keine Tangentialbeschleunigung.*[2]) Die Benennung „Wechselkreis" ist diesen Verhältnissen entsprechend gewählt.

Beim Wendekreise K_1 erklären wir für den einzelnen Punkt (x, y) die Strecke r_1 genau so wie r_2 beim Kreise K_2, so daß die Potenz $p_1(x, y)$ wieder gleich $\pm r r_1$ wird, je nachdem (x, y) außerhalb oder innerhalb K_1

1) Nämlich je nachdem $\operatorname{sgn}(\dot{\vartheta} \cdot \ddot{\vartheta})$ gleich $+$ oder $-$ ist.

2) Für den Pol (ξ, η) selbst gilt die vorstehende Rechnung nicht. Wird der Punkt (x, y) im Laufe seiner Bewegung einmal Drehpol, so erreicht er in diesem Augenblicke einen Rückkehrpunkt seiner Bahnkurve; die Zerlegung der Beschleunigung in Tangential- und Zentripetalbeschleunigung verliert hier ihre Bedeutung.

liegt. Für die Komponenten der Zentripetalbeschleunigung folgt dann aus (5) oder (6):

$$(10)\qquad \frac{\xi - x}{r}\cdot(\pm r_1\dot{\vartheta}^2), \quad \frac{\eta - y}{r}\cdot(\pm r_1\dot{\vartheta}^2),$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem (x, y) außerhalb oder innerhalb des Wendekreises liegt; für die Zentripetalbeschleunigung selbst ergibt sich:

$$(11)\qquad r_1\dot{\vartheta}^2 = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{r^2\dot{\vartheta}^2}{\varrho}, \qquad r_1\varrho = r^2,$$

unter ϱ den Krümmungsradius der von (x, y) beschriebenen Bahnkurve zur Zeit t verstanden. Da die in (10) vor der Klammer stehenden Faktoren die Richtungskosinus der von (x, y) gegen den Pol (ξ, η) gerichteten Strecke r sind, so ergibt sich aus den vorstehenden Formeln der Satz: *Die Zentripetalbeschleunigung des Punktes (x, y) ist proportional zu r_1, nämlich gleich dem Produkte der Strecke r_1 und des Quadrates der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}^2$; die Bahnkurve des Punktes (x, y), deren Normale durch den Pol (ξ, η) hindurchläuft, weist dem Pole ihre konkave Seite (Punkt P der Fig. 118) oder ihre konvexe Seite (Punkt P' der Fig. 118) zu, je nachdem (x, y) außerhalb oder innerhalb des Wendekreises liegt; ist der Punkt (x, y) zur Zeit t auf dem Wendekreise gelegen (Punkt P'' der Figur), so durchläuft er in diesem Augenblicke einen Wendepunkt seiner Bahnkurve, wobei alle zur Zeit t vorliegenden Wendetangenten (s. die Linie $P''W$ der Figur) durch den zum Pole (ξ, η) diametralen Punkt W des Wendekreises, den sogenannten „Wendepol" hindurchlaufen.* In einem Punkte (x, y) des Wendekreises selbst, dessen Benennung durch die vorstehende Betrachtung gerechtfertigt erscheint, ist also die Zentripetalbeschleunigung gleich 0. Für die Konstruktion des Krümmungsradius ϱ der Bahnkurve ergeben sich aus der zweiten Gleichung (11) für die verschiedenen Lagen des Punktes (x, y) sehr einfache Regeln.[1])

Für den in Fig. 118 mit B bezeichneten Schnittpunkt beider Kreise K_1 und K_2 sind beide Beschleunigungskomponenten und also die Totalbeschleunigung gleich 0; dieser Punkt heißt der *„Beschleunigungspol" zur Zeit t.* Indessen wäre es fehlerhaft, falls man den gleichen Schluß für den zweiten Schnittpunkt beider Kreise, den Pol (ξ, η) ziehen wollte. Nähert sich der Punkt (x, y) längs der Peripherie K_2 dem Pole an, so ist natürlich die Tangentialbeschleunigung beständig gleich 0. Daraus folgt aber nur, daß, wenn wir den Pol erreichen, die Totalbeschleunigung senkrecht zur Polkurve verläuft. Zu dem gleichen Schlusse kommen wir

1) Um die Krümmung deutlicher hervortreten zu lassen, sind die Segmente der Bahnkurven in Fig. 118 stärker gekrümmt, als es nach den zugehörigen Radien ϱ der Fall sein sollte.

bei Annäherung an den Pol längs K_1. Nehmen wir als Beispiel die Verhältnisse der Fig. 118, welche $\dot{\vartheta} > 0$, $\ddot{\vartheta} > 0$ voraussetzen, so ist die im Punkte P''' des Durchmessers D_2 in der Pfeilrichtung wirkende Tangentialbeschleunigung zufolge (9) gleich $r_2\ddot{\vartheta}$, wird also, falls (x, y) zum Pole wandert, die in der Richtung des Durchmessers D_1 daselbst wirkende Totalbeschleunigung $D_2\ddot{\vartheta}$. Zu demselben Werte muß man gelangen, falls man sich dem Pole längs D_1 nähert und mit der Zentripetalbeschleunigung arbeitet. Die sich hier nach (11) ergebende Zentripetalbeschleunigung $D_1\dot{\vartheta}^2$ ist zufolge (8) in der Tat gleich $D_2\ddot{\vartheta}$.

Gilt die besondere Voraussetzung, *daß zur Zeit t die Winkelbeschleunigung $\ddot{\vartheta}(t)$ verschwindet, so artet der Wechselkreis K_2 in die zum Pole (ξ, η) gehörende Normale der Polkurve aus.* Die Komponenten der Tangentialbeschleunigung des Punktes (x, y) werden nun:

$$\frac{y-\eta}{r} \cdot \frac{(x-\xi)\dot{\xi}+(y-\eta)\dot{\eta}}{r} \cdot \dot{\vartheta}, \qquad -\frac{x-\xi}{r} \cdot \frac{(x-\xi)\dot{\xi}+(y-\eta)\dot{\eta}}{r} \cdot \dot{\vartheta};$$

man kann unter Benutzung der bisher entwickelten Formeln hieraus leicht eine Konstruktion des Vektors der Tangentialbeschleunigung ableiten.

Ist endlich *zur Zeit t die Winkelgeschwindigkeit* $\dot{\vartheta}(t) = 0$, so bietet der Geschwindigkeitszustand nach S. 363 das einfache Bild einer Translation dar. Zur Berechnung der Beschleunigung müssen wir auf (2) S. 362 zurückgehen und finden unter Benutzung von $\dot{\vartheta}(t) = 0$ als Komponenten der Beschleunigung des Punktes (x, y) zur Zeit t:

$$\ddot{x} = -(y-\psi)\ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi}, \qquad \ddot{y} = +(x-\varphi)\ddot{\vartheta} + \ddot{\psi}.$$

Ist auch noch $\ddot{\vartheta} = 0$, so kommen wir wieder auf das Bild der Translation zurück. Ist aber die Winkelbeschleunigung von 0 verschieden, so gibt es *einen im Endlichen gelegenen Geschwindigkeitspol der Koordinaten:*

$$X = \varphi - \frac{\ddot{\psi}}{\ddot{\vartheta}}, \qquad Y = \psi + \frac{\ddot{\varphi}}{\ddot{\vartheta}},$$

mit denen sich die Komponenten $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ so ausdrücken:

$$\ddot{x} = -(y-Y)\ddot{\vartheta} \qquad \ddot{y} = +(x-X)\ddot{\vartheta}.$$

Hieran schließen sich ähnliche Deutungen, wie wir sie oben für den Geschwindigkeitszustand der ebenen Bewegung durchgeführt haben.

5. Untersuchung der Konchoidenbewegung. Zur Erläuterung der allgemeinen Sätze in § 3 und 4 diene die mechanisch leicht herstellbare „*Konchoidenbewegung*". Der Nullpunkt O' der bewegten Ebene soll mit konstanter Geschwindigkeit die feste x-Achse in der Richtung wachsen-

der x beschreiben, während die Ordinatenachse der bewegten Ebene stets durch den Punkt $x = 0$, $y = 1$ der festen Ebene hindurchlaufe. Wählen wir die Abszisse des Punktes O' direkt als Zeitmaß t, so gilt für die in (1) S. 362 mit φ und ψ bezeichneten Funktionen:

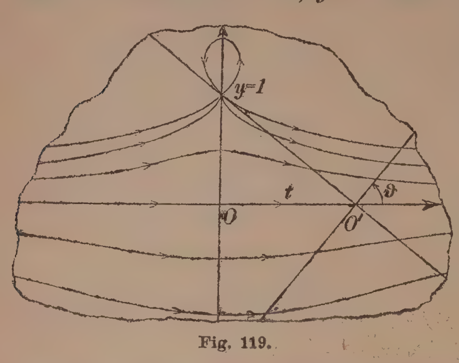


Fig. 119.

$$\varphi(t) = t, \qquad \psi(t) = 0;$$

für den Winkel ϑ aber berechnet man leicht (s. Fig. 119):

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tg} t, \qquad \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \sin\vartheta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

wobei t als unbeschränkte Variable gilt und $\sqrt{1+t^2}$ positiv zu nehmen ist. *Die Darstellung* (1) S. 362 *der Konchoidenbewegung ist:*

$$(1) \qquad x = \frac{x_0 - y_0 t}{\sqrt{1+t^2}} + t, \qquad y = \frac{x_0 t + y_0}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Die Benennung der vorliegenden ebenen Bewegung rührt von der Gestalt der Bahnkurven her, die von den Punkten der beweglichen y-Achse beschrieben werden. Setzt man $x_0 = 0$, $y_0 = p$ in (1) ein, so ergibt sich als Gleichungenpaar der einzelnen dieser Bahnkurven:

$$x = t - \frac{pt}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad y = \frac{p}{\sqrt{1+t^2}},$$

woraus nach Elimination von t folgt:

$$(2) \qquad (x^2 + (y-1)^2)y^2 - p^2(y-1)^2 = 0.$$

Wir haben hier eine *Schar von Kurven vierten Grades* vor uns, die man als „*Konchoiden*" („*Muschellinien*") bezeichnet; in der einzelnen Kurve vierten Grades sind immer *zwei* Bahnkurven zusammengefaßt, diejenigen für $y_0 = \pm p$. Die Gestalt und Lage der fraglichen Kurvenschar ist in Fig. 119 skizziert. Jede Konchoide hat den Punkt $x = 0$, $y = 1$ zum singulären Punkte, und zwar für $|p| < 1$ als „isolierten Punkt", für $|p| = 1$ als „Rückkehrpunkt" und für $|p| > 1$ als „Doppelpunkt" (s. S. 307 ff.).

Aus (3) S. 363 folgt für die Koordinaten des Drehpoles in der festen Ebene:

$$(3) \qquad \xi = t, \qquad \eta = 1 + t^2, \qquad \eta = 1 + \xi^2;$$

entsprechend folgt aus (6) S. 364 für die Koordinaten ξ_0, η_0 des Drehpoles in der bewegten Ebene:

$$(4) \qquad \xi_0 = t\sqrt{1+t^2}, \qquad \eta_0 = \sqrt{1+t^2}, \qquad \eta_0^4 = \xi_0^2 + \eta_0^2.$$

Die feste Polkurve ist eine Parabel des Parameters 1, *die den Punkt* (0, 1) *zum Scheitelpunkte und die positive y-Achse zur Achse hat; die bewegliche Polkurve ist der oberhalb der Abszissenachse verlaufende Teil der durch die dritte Gleichung* (4) *dargestellten Kurve vierten Grades.*[1]) In Fig. 120 ist die Parabel ausgezogen und die bewegliche Polkurve in ihrer zur Zeit $t = 0$ zutreffenden Lage punktiert angedeutet; außerdem ist die Bahnkurve des Scheitelpunktes der beweglichen Polkurve, d. i. die „gespitzte Konchoide", angegeben.

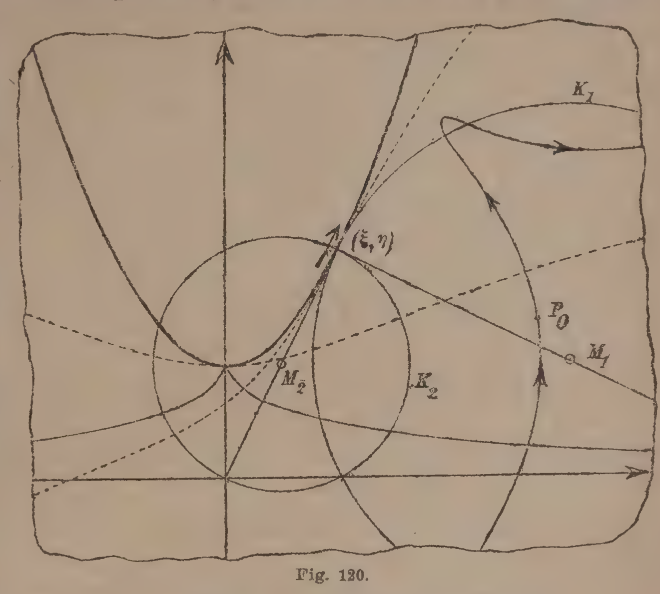


Fig. 120.

Für die Winkelgeschwindigkeit, die Winkelbeschleunigung der bewegten Ebene und für die Komponenten der Geschwindigkeit des auf der Parabel fortwandernden Poles (ξ, η) findet man:

$$(5) \qquad \dot{\vartheta} = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \ddot{\vartheta} = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \qquad \dot{\xi} = 1, \qquad \dot{\eta} = 2t.$$

Nach S. 366 folgt leicht: *Der Mittelpunkt* M_1 *des Wendekreises ist der Punkt* $(2t + t^3, \frac{1}{2}(1 + t^2))$, *so daß der Wendekreis einfach der Kreis über der Parabelnormale N* (vgl. (8) S. 278) *als Durchmesser ist.* In Fig. 120 ist die bewegliche Polkurve im Augenblicke $t = 1$ und der zugehörige Wendekreis K_1 gezeichnet. Der zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ gelegene Punkt P_0 liegt zur Zeit $t = 1$ an der Stelle (2, 3) auf dem augenblicklichen Wendekreise; die in der Figur angegebene Bahnkurve des Punktes P_0 zeigt hier in der Tat einen Wendepunkt. Weiter ergibt sich aus den Rechnungen von S. 366 leicht: *Der Mittelpunkt* M_2 *des Wechselkreises ist der Punkt* $\left(\frac{3t^2-1}{4t}, \frac{1+t^2}{2}\right)$, *so daß der Wechselkreis einfach der Kreis über*

1) Die Kurve befolgt das Gesetz, daß der Radiusvektor ihres einzelnen Punktes gleich dem Quadrat der Ordinate ist; sie ist deshalb sehr leicht zu zeichnen. Übrigens besteht die ganze Kurve aus zwei zur Abszissenachse symmetrischen Zweigen und dem Nullpunkte als isolierten Punkte.

der Parabeltangente T (s. S. 278) *als Durchmesser ist.* Der Beschleunigungspol ist der Punkt $x = t$, $y = 0$, was deshalb selbstverständlich ist, weil sich dieser Punkt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Für $t = 0$ artet der Wechselkreis in die Normale der Polkurve (y-Achse) aus. Ist $t > 0$, so ist die Bewegung des einzelnen Punktes (x, y) innerhalb des Wechselkreises beschleunigt und außerhalb verzögert; für $t < 0$ ist es umgekehrt.

6. Aufgaben über ebene Bewegungen. 1) Man untersuche die ebene Bewegung der gleitenden Stange eines Ellipsographen (s. „A. G.", § 42). — In Fig. 121 ist die gleitende Stange mit AB bezeichnet, ihre Länge sei l (so daß l gleich der Summe $a + b$ der Halbachsen a und b der vom Punkte P der Figur durchlaufenen Ellipse ist). Der Endpunkt A gleite auf der y-Achse, der Endpunkt B auf der x-Achse; diese beiden Achsen sind also die Bahnkurven der Punkte A und B. Hat zur Zeit t die Stange die in der Figur durch AB bezeichnete Lage, so liegt nach einem S. 363 genannten Satze der augenblickliche Drehpol (ξ, η) auf einem Lote zur y-Achse im Punkte A und auf einem solchen zur x-Achse im Punkte B; wir haben also einfach $\xi = \overline{OB}$, $\eta = \overline{OA}$, so daß die feste Polkurve der Kreis um O mit dem Radius l ist. Da der Drehpol über der Stange einen rechten Winkel spannt, so ist die bewegliche Polkurve der Kreis des Radius $\frac{1}{2}l$ über der Stange als Durchmesser. Man gelangt also einfach zur „Hypozykloidenbewegung" für das Radienverhältnis 2 : 1 des festen bzw. beweglichen Kreises (s. die folgende Aufgabe).

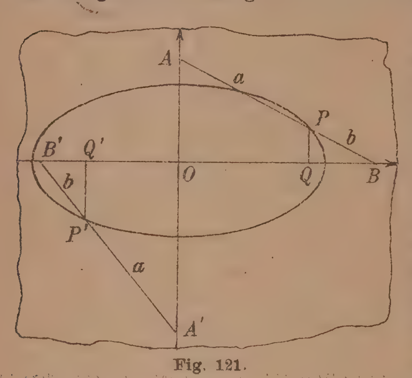


Fig. 121.

Man zeige nun, daß die fragliche ebene Bewegung durch:

$$x = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \qquad y = -x_0 \sin t + y_0 \cos t + l \sin t$$

darstellbar ist, daß der Wendekreis der rollende Kreis selbst ist, während der Wechselkreis in die Zentrale beider Kreise ausartet. Irgend ein Punkt des Wendekreises bleibt also im Laufe der Bewegung stets auf demselben gelegen; seine Bahnkurve besteht also aus lauter „Wendepunkten", d. h. sie ist eine Gerade. Alle übrigen Bahnkurven sind Ellipsen.

2) Man untersuche die verschiedenen Fälle der „Zykloidenbewegung". — Im Anschluß an (3) S. 270 zeige man z. B., daß die „Epizykloidenbewegung" darstellbar ist durch:

$$x = x_0 \cos mt - y_0 \sin mt + l(\cos t - \cos mt).$$

$$y = x_0 \sin mt + y_0 \cos mt + l(\sin t - \sin mt),$$

wo sich l und m aus den Kreisradien a und b so berechnen:

$$l = a + b, \qquad m = \frac{a + b}{b}.$$

Hier haben also die Funktionen φ, ψ, ϑ die Bedeutung:

$$\varphi(t) = l(\cos t - \cos mt), \qquad \psi(t) = l(\sin t - \sin mt), \qquad \vartheta(t) = mt.$$

Man bestätige die Angaben auch dadurch, daß man für den Drehpol:

$$\xi = a \cos t, \qquad \eta = a \sin t; \qquad \xi_0 = l - b \cos \frac{at}{b}, \qquad \eta_0 = b \sin \frac{at}{b}$$

berechnet. Die Einfachheit einer Zykloidenbewegung mit „konstanter Winkelgeschwindigkeit“ besteht darin, daß der ganze Bewegungszustand stets mit sich selbst kongruent bleibt. Man zeige noch, daß der Wechselkreis in die Zentrale der beiden Polkreise ausartet, und daß der Beschleunigungspol auf dieser Zentrale im Abstande $\frac{a^2+2ab}{a+b}$ vom Zentrum des festen Kreises liegt.

3) Man untersuche die Bewegung der Schubstange beim Schubkurbelmechanismus (s. Fig. 117, S. 360 und „A. G.“, § 43). — Man nehme den praktisch wichtigen Fall an, daß die Stangenlänge l größer als die Kurbel a ist, und setze ferner voraus, daß die Kurbel mit konstanter Geschwindigkeit umläuft, so daß der Kurbelwinkel als Zeitmaß gelten kann. Man zeige dann, daß sich die ebene Bewegung der Schubstange durch das folgende Gleichungenpaar darstellen läßt:

$$(1)\quad \begin{cases} x = x_0 \sqrt{1-\left(\frac{a}{l}\right)^2 \sin^2 t} + y_0 \frac{a}{l} \sin t + a\left(\cos t - \sqrt{1-\left(\frac{a}{l}\right)^2 \sin^2 t}\right), \\ y = -x_0 \frac{a}{l} \sin t + y_0 \sqrt{1-\left(\frac{a}{l}\right)^2 \sin^2 t} + \frac{a^2+al}{l} \sin t, \end{cases}$$

wobei die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist; die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ sind also die folgenden:

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi(t) = a\left(\cos t - \sqrt{1-\left(\frac{a}{l}\right)^2 \sin^2 t}\right), \\ \psi(t) = \frac{a^2+al}{l} \sin t, \\ \vartheta(t) = -\arcsin\left(\frac{a}{l} \sin t\right). \end{cases}$$

Man kann diese Angaben auch dadurch bestätigen, daß man erstens $x_0 = a$, $y_0 = 0$ in (1) einträgt, was in $x = a\cos t$, $y = a \sin t$ die Bahnkurve des Kurbelendpunktes A liefert, und daß man zweitens $x_0 = a + l$, $y_0 = 0$ einsetzt, was in:

$$x = a\cos t + l\sqrt{1-\left(\frac{a}{l}\right)^2 \sin^2 t}, \qquad y = 0$$

die schon S. 361 betrachtete Bahn des Gleitpunktes B ergibt (vgl. Fig. 122, S. 374).

Man zeige auf Grund von (3), S. 363, daß der Drehpol die Koordinaten hat:

$$(3)\quad \begin{cases} \xi = a\cos t + l\sqrt{1-\left(\frac{a}{l}\right)^2 \sin^2 t}, \\ \eta = a \sin t + l \operatorname{tg} t \sqrt{1-\left(\frac{a}{l}\right)^2 \sin^2 t}, \end{cases}$$

aus denen man durch Elimination von t als Gleichung der festen Polkurve:

$$(4)\quad (\xi^2 - l^2 + a^2)^2 (\xi^2 + \eta^2) - 4a^2\xi^4 = 0$$

gewinnt. Dieses Ergebnis ist auch anschaulich sofort einleuchtend. Da nämlich die Verlängerung der Kurbel über A hinaus die Normale der Bahnkurve von A zur Zeit t ist und die Senkrechte zur Abszissenachse im Punkte B die Normale der Bahn des Gleitpunktes zur Zeit t darstellt, so ist der Drehpol (ξ, η) einfach der Schnittpunkt dieser beiden Normalen. Die feste Polkurve ist also sehr leicht zu zeichnen (s. die in Fig. 122 stark ausgezogene Kurve, welche den als feste Pol-

kurve zur Benutzung kommenden Teil der Kurve sechsten Grades (4) darstellt); sie besteht aus zwei Zweigen mit einer zur y-Achse parallelen Asymptote. Die bewegliche Polkurve in ihrer Lage zur Zeit $t = 0$ ist durch starke Punktierung angedeutet; sie hat in B_0 eine „Selbstberührung" und zwei durch diesen Punkt hindurchlaufende Asymptoten. Die Konstruktion dieser Kurve ist wieder sehr leicht; man schiebe die Stange AB aus ihrer zur Zeit t zutreffenden Lage in die Anfangslage zurück und lasse das über AB stehende Dreieck mit der Spitze (ξ, η) an der Verschiebung teilnehmen, wobei dann eben der Punkt (ξ, η) an die zugehörige Stelle (ξ_0, η_0) gelangt. Man wolle sich das Zustandekommen der Bewegung durch Abrollen der beweglichen Polkurve auf der festen veranschaulichen.

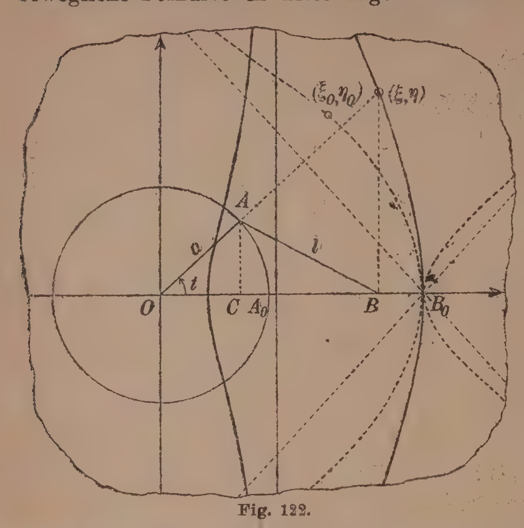


Fig. 122.

Sehr leicht ist es auch noch, den Wendekreis zu konstruieren. Da die Bahnkurve des Kurbelendpunktes A gegen den Pol ihre konvexe Seite kehrt, so liegt dieser Punkt *im* Wendekreise, und die in Gleichung (11) S. 368 mit r_1 bezeichnete Strecke lagert von A aus auf der Kurbel bzw. ihrer Verlängerung über O. Da der Punkt A die Geschwindigkeit $v = a$ hat, und da der zugehörige Krümmungsradius $\varrho = a$ ist, so folgt aus (11) S. 368 und der Ableitung der in (2) gegebenen Funktion ϑ:

$$r_1 = \frac{a}{\dot{\vartheta}^2} = \frac{l^2 - a^2 \sin^2 t}{a \cos^2 t}.$$

Aus Fig. 122 aber liest man für die mit $\overline{OC}$ und $\overline{BC}$ bezeichneten Strecken:

$$\overline{OC} = a \cos t,$$
$$\overline{BC} = \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2 t}$$

ab. Die Projektion $r_1 \cdot \cos t$ der Strecke r_1 auf die x-Achse ist demnach auf Grund der Gleichung:

$$(r_1 \cos t) \cdot \overline{OC} = \overline{BC}^2$$

elementar konstruierbar. Durch Zeichnung von r_1 gewinnt man im Endpunkte dieser Strecke einen Punkt des Wendekreises; zwei weitere Punkte dieses Kreises sind der Pol (ξ, η) und der Gleitpunkt B, durch den (wegen seiner geradlinigen Bahn) der Wendekreis beständig hindurchläuft.

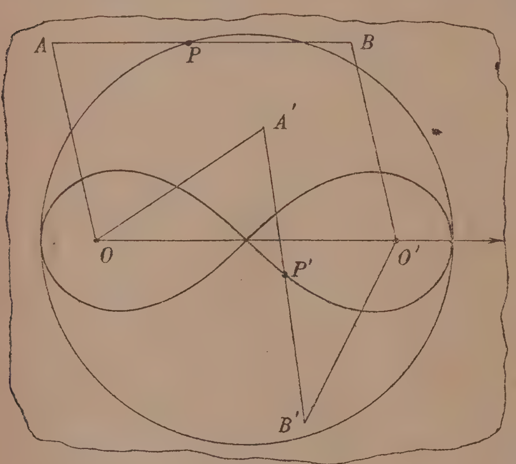


Fig. 123.

4) Man untersuche die Bewegung der Koppel bei einem überschlagenen Gelenkviereck (Kurbelmechanismus) mit gleichen Gegenseiten. — Dieser Mechanismus ist in Fig. 123 näher erläutert. Die beiden um O und O' drehbaren „Kurbeln"

$\overline{OA}$ und $\overline{O'B}$ sind einander gleich, und es sei $\overline{OA} = \overline{O'B} = 2a$; die „Koppel“ AB ist gleich dem Abstande $\overline{OO'}$ der festen Punkte O und O', und es werde $\overline{AB} = \overline{OO'} = 2e$ gesetzt. In der normalen Lage des Vierecks $(OABO')$ beschreibt jeder Punkt der Koppel und der mit ihr fest verbundenen Ebene einen Kreis des Radius $2a$. Bei der zu untersuchenden überschlagenen Lage des Vierecks $(OA'B'O')$ beschreibt der Mittelpunkt P' der Koppel, falls, wie wir annehmen wollen, $a < e$ ist, die schleifenförmige Kurve der Figur (vgl. „A. G.“, § 44).

In Fig. 124 sind O_1A und O_2B die beiden Kurbeln, ihre Bewegungsrichtungen sind durch Pfeile bei A und B angedeutet, die „Kurbelwinkel“ sind ω_1 und ω_2 genannt; die Geschwindigkeit sei so geregelt, daß das arithmetische Mittel

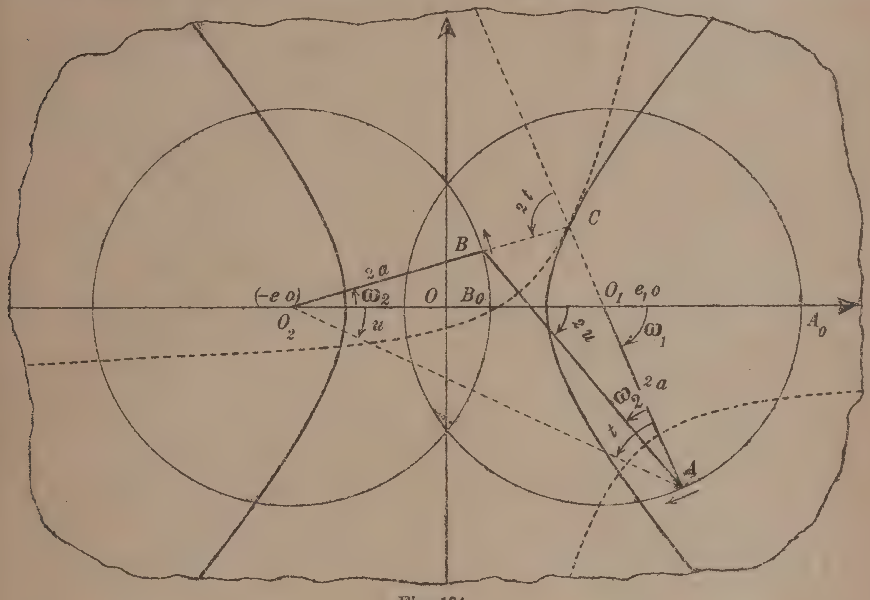


Fig. 124.

von ω_1 und ω_2 der Zeit proportional ist und also direkt als Zeitmaß dienen kann. Die halbe Differenz der Winkel ω_1 und ω_2 werde u genannt, so daß die Gleichungen gelten:

(5) $$\omega_1 + \omega_2 = 2t, \qquad \omega_1 - \omega_2 = 2u, \qquad \omega_1 = t + u, \qquad \omega_2 = t - u.$$

Man bestätige auf Grund des Umstandes, daß das Viereck AO_1BO_2 ein Antiparallelogramm ist, die verschiedenen in der Figur enthaltenen Angaben über die Winkelgrößen. Wie man aus dem Dreieck AO_1O_2 abliest, gilt zwischen t und u die Relation:

(6) $$\sin u = \frac{a}{e} \sin t.$$

Der zur Zeit t vorliegende Drehungswinkel ϑ der Koppel AB gegen die Anfangslage A_0B_0 ist, wie Fig. 124 zeigt, gleich $-2u$. Die Bewegung der mit der Koppel fest verbundenen Ebene ist dargestellt durch:

(7) $$\begin{cases} x = +x_0 \cos 2u + y_0 \sin 2u + 2a \cos(t-u) - (2a-e)\cos 2u - e, \\ y = -x_0 \sin 2u + y_0 \cos 2u + 2a \sin(t-u) + (2a-e)\sin 2u, \end{cases}$$

so daß die Funktionen φ, ψ, ϑ die Bedeutung haben:

$$\varphi(t) = 2a\cos(t-u) - (2a-e)\cos 2u - e,$$

$$\psi(t) = 2a\sin(t-u) + (2a-e)\sin 2u,$$

$$\vartheta(t) = -2u = -2\arcsin\left(\frac{a}{e}\sin t\right).$$

Man bestätige die Gleichungen (7), indem man aus ihnen für $x_0 = 2a \pm e$, $y_0 = 0$ die kreisförmigen Bahnen der Punkte A, B ableitet.

Als Hauptsatz gilt: *Die beiden Polkurven sind zwei kongruente Hyperbeln der halben Hauptachse a und der Exzentrizität e, die sich zur Zeit $t = 0$ in zwei Scheitelpunkten berühren.* Die feste Hyperbel ist in Fig. 124 stark ausgezogen, die bewegliche in ihrer Lage zur Zeit t punktiert gezeichnet. — Man veranschauliche sich den Bewegungsvorgang daraufhin in seinem ganzen Verlaufe. Der Satz ist einleuchtend (s. Fig. 124), da die Verlängerung der Kurbeln AO_1 und O_2B den Drehpol C liefern und:

$$\overline{O_2C} - \overline{O_1C} = 2a, \quad \overline{AC} - \overline{BC} = 2a$$

zutrifft. Man beweise den Satz auch auf Grund der Regeln (3) S. 363 und (6) S. 364. Für die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung gilt:

$$\dot{\vartheta}(t) = -2\dot{u} = -\frac{2a}{e}\cdot\frac{\cos t}{\cos u},$$

$$\ddot{\vartheta}(t) = \frac{2a}{e^2}\cdot\frac{e\sin t - a\sin u}{\cos^3 u};$$

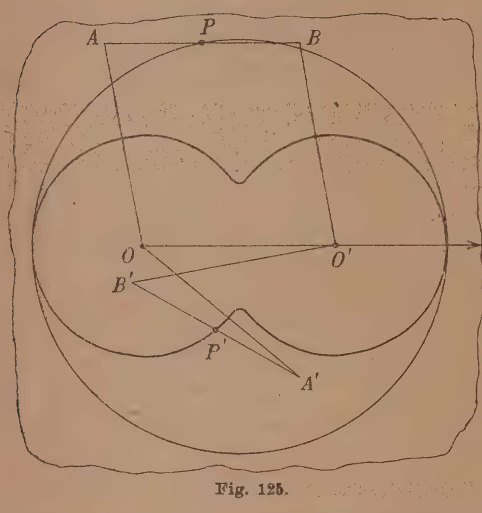


Fig. 125.

hierauf gründen sich Entwicklungen über die Wende- und Wechselkreise. — Der Fall $a > e$ werde durch Fig. 125 erläutert; man zeige, daß jetzt die beiden Polkurven zwei kongruente Ellipsen der halben großen Achse a und der Exzentrizität e sind. Wie gestalten sich die Verhältnisse im Falle $a = e$?

7. Drehungen eines starren Körpers um einen Punkt. Bewegt sich ein starrer Körper im Raume derart, daß ein mit dem Körper fest verbundener Punkt beständig seine Lage behält, handelt es sich also um *Drehungen um diesen Punkt*, so wählt man den Punkt als Nullpunkt eines im Raume festen und eines zweiten mit dem Körper fest verbundenen Koordinatensystems. Daß beide Systeme zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen sollen, wollen wir hier nicht fordern.

Zur Zeit t sei die Lage der beweglichen Achsen OX', OY', OZ' gegen die festen OX, OY, OZ die in Fig. 126 angegebene. Die in „A. G.", § 54 entwickelten Formeln über Transformation rechtwinkliger Koordinaten geben uns dann unmittelbar die Darstellung der vorliegenden Bewegung. Ein Punkt des starren Körpers, der im beweglichen Systeme die Koordinaten x_0, y_0, z_0 hat und also diese Koordinaten im fraglichen Systeme

beständig behält, möge zur Zeit t im festen Systeme die Koordinaten x, y, z haben. Dann gelten nach den genannten Formeln der analytischen Geometrie drei lineare Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3 z_0, \\ y = b_1 x_0 + b_2 y_0 + b_3 z_0, \\ z = c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3 z_0. \end{cases}$$

Weiß man, wie die Koeffizienten in (1) von t abhängen, so hat man in (1) eine brauchbare Darstellung der Bewegung gewonnen.

Um nun die Abhängigkeit der $a_1, \ldots, c_3$ von t darzustellen, vollziehen wir an der Hand der Fig. 126 den Übergang von den festen Achsen zur augenblicklichen Lage der beweglichen Achsen durch drei besondere Drehungen: eine erste um die Achse OZ durch den Winkel ψ, bis die Achse OX mit der „Knotenlinie" OK zusammenfällt; eine zweite um die Knotenlinie OK durch den Winkel ϑ, bis die Achse OZ ihre neue Lage OZ' annimmt; eine dritte um OZ' durch den Winkel φ, welche die Linie OK nach der Lage OX' verschiebt. Nach „A. G.", § 54, gelten dann die Gleichungen:

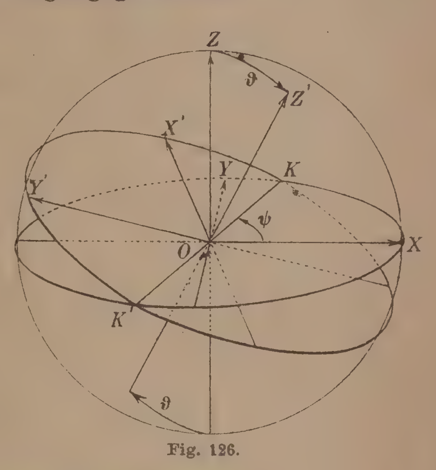


Fig. 126.

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1 = +\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta, \\ a_2 = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta, \\ a_3 = +\sin\psi\sin\vartheta, \\ b_1 = +\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta, \\ b_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta, \\ b_3 = -\cos\psi\sin\vartheta, \\ c_1 = \sin\varphi\sin\vartheta, \qquad c_2 = \cos\varphi\sin\vartheta, \qquad c_3 = \cos\vartheta. \end{cases}$$

Die Darstellung der Bewegung leisten wir, indem wir φ, ψ, ϑ als Funktionen der Zeit t geben; wir setzen diese Funktionen mit ihren zur Benutzung kommenden Ableitungen während des zugrunde liegenden Zeitintervalles als eindeutig und stetig voraus.

Bekanntlich bestehen die sechs aus (2) leicht folgenden Relationen:

$$(3)\qquad a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1, \qquad a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k = 0.$$

Auf Grund von (3) ergibt die Lösung von (1) nach x_0, y_0, z_0:

$$(4)\qquad \begin{cases} x_0 = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ y_0 = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ z_0 = a_3 x + b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

An Stelle von (3) können wir auch die folgenden sechs Relationen setzen:

$$(5)\qquad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \qquad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \ldots, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0, \qquad c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0, \ldots . \end{cases}$$

Endlich notieren wir noch die aus (2) leicht abzuleitenden Gleichungen:

$$(6)\qquad b_1 c_2 - b_2 c_1 = a_3, \qquad c_1 a_2 - c_2 a_1 = b_3, \qquad a_1 b_2 - a_2 b_1 = c_3.$$

Um nun den Bewegungsvorgang näher zu untersuchen, berechne man aus (1) durch Differentiation nach t die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes (x, y, z) zur Zeit t:

$$\dot{x} = \dot{a}_1 x_0 + \dot{a}_2 y_0 + \dot{a}_3 z_0, \qquad \dot{y} = \dot{b}_1 x_0 + \dot{b}_2 y_0 + \dot{b}_3 z_0, \qquad \dot{z} = \dot{c}_1 x_0 + \dot{c}_2 y_0 + \dot{c}_3 z_0.$$

Man trage rechts die Ausdrücke (4) für x_0, y_0, z_0 ein und gewinnt z. B. für x nach Ordnung der Glieder:

$$\dot{x} = (a_1 \dot{a}_1 + a_2 \dot{a}_2 + a_3 \dot{a}_3) x + (b_1 \dot{a}_1 + b_2 \dot{a}_2 + b_3 \dot{a}_3) y + (c_1 \dot{a}_1 + c_2 \dot{a}_2 + c_3 \dot{a}_3) z,$$

sowie ähnliche Ausdrücke für $\dot{y}$ und $\dot{z}$. Durch Differentiation der drei ersten Relationen (5) nach t erhält man aber:

$$a_1 \dot{a}_1 + a_2 \dot{a}_2 + a_3 \dot{a}_3 = 0, \qquad b_1 \dot{b}_1 + b_2 \dot{b}_2 + b_3 \dot{b}_3 = 0, \cdots,$$

während die Differentiation der drei letzten Relationen (5) ergibt:

$$b_1 \dot{c}_1 + b_2 \dot{c}_2 + b_3 \dot{c}_3 = -c_1 \dot{b}_1 - c_2 \dot{b}_2 - c_3 \dot{b}_3, \; c_1 \dot{a}_1 + c_2 \dot{a}_2 + \cdots = -a_1 \dot{c}_1 - a_2 \dot{c}_2 - \cdots, \cdots$$

Benutzen wir die drei Abkürzungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} b_1 \dot{c}_1 + b_2 \dot{c}_2 + b_3 \dot{c}_3 = p, \\ c_1 \dot{a}_1 + c_2 \dot{a}_2 + c_3 \dot{a}_3 = q, \\ a_1 \dot{b}_1 + a_2 \dot{b}_2 + a_3 \dot{b}_3 = r, \end{cases}$$

so gewinnen, wie man leicht ausrechnet, die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes (x, y, z) folgende einfache Gestalt:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dot{x} = \qquad\quad - ry + qz, \\ \dot{y} = \quad rx \qquad\quad - pz, \\ \dot{z} = -qx + py. \end{cases}$$

Durch Differentiation der Ausdrücke (2) nach t findet man, falls zur Kürzung der Ergebnisse die Formeln (2) gleich selbst wieder herangezogen werden:

$$\dot{a}_1 = a_2\dot{\varphi} - b_1\dot{\psi} + c_1\sin\psi\cdot\dot{\vartheta},\quad \dot{a}_2 = -a_1\dot{\varphi} - b_2\dot{\psi} + c_2\sin\psi\cdot\dot{\vartheta},\quad \dot{a}_3 = -b_3\dot{\psi} + c_3\sin\psi\cdot\dot{\vartheta},$$
$$\dot{b}_1 = b_2\dot{\varphi} + a_1\dot{\psi} - c_1\cos\psi\cdot\dot{\vartheta},\quad \dot{b}_2 = -b_1\varphi + a_2\dot{\psi} - c_2\cos\psi\cdot\dot{\vartheta},\quad \dot{b}_3 = +a_3\dot{\psi} - c_3\cos\psi\cdot\dot{\vartheta},$$
$$\dot{c}_1 = c_2\dot{\varphi} + \sin\varphi\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta},\quad \dot{c}_2 = -c_1\dot{\varphi} + \cos\varphi\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta},\quad \dot{c}_3 = -\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}.$$

Es ergibt sich demnach z. B. für p:

$$p = -c_1\dot{b}_1 - c_2\dot{b}_2 - c_3\dot{b}_3 = (b_1c_2 - b_2c_1)\dot{\varphi} - (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\dot{\psi} + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\cos\psi\cdot\dot{\vartheta},$$

wo sich die rechte Seite auf Grund der Relationen (5) und (6) sofort auf $a_3\dot{\varphi} + \cos\psi\cdot\dot{\vartheta}$ reduziert. Durch Weiterführung der Rechnungen gelangt man zu dem Ergebnis: *Die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes* (x, y, z) *zur Zeit* t *sind durch* (8) *gegeben, wobei* p, q, r *als Funktionen der Zeit erklärt sind durch:*

(9) $p = \sin\psi\sin\vartheta\cdot\dot{\varphi} + \cos\psi\cdot\dot{\vartheta},\quad q = -\cos\psi\sin\vartheta\cdot\dot{\varphi} + \sin\psi\cdot\dot{\vartheta},\quad r = \cos\vartheta\cdot\dot{\varphi} + \dot{\psi}.$

Die Gleichungen (8) liefern ein sehr anschauliches Bild über den augenblicklichen Geschwindigkeitszustand. Wir nehmen an, daß p, q, r nicht zugleich verschwinden. Wir ziehen alsdann, wie Fig. 127 andeutet, von O aus den Vektor $\mathfrak{u}$ nach dem Punkte der Koordinaten p, q, r, zweitens gleichfalls von O aus den Vektor $\mathfrak{r}$ nach dem Punkte (x, y, z) und denken uns am letzteren Punkte, den Komponenten (8) entsprechend, den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ angebracht, ziehen aber auch gleich von O aus den zu $\mathfrak{v}$ parallelen und gleichgerichteten Vektor, der in der Figur gleichfalls mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet ist und im Punkte $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ endet.

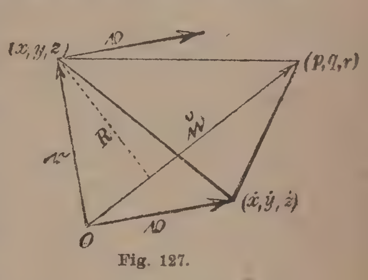


Fig. 127.

Es folgt nun zunächst aus (8):

(10) $$p\dot{x} + q\dot{y} + r\dot{z} = 0,\qquad x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0,$$

so daß der Vektor $\mathfrak{v}$ *sowohl auf* $\mathfrak{u}$ *als auf* $\mathfrak{r}$ *senkrecht steht.* Ergänzen wir die drei von O ausziehenden Vektoren durch Verbindung ihrer Endpunkte zu einem Tetraeder, so ist das Volumen T desselben nach „A. G.", § 62, gegeben durch:

$$\pm 6T = \dot{x}(qz - ry) + \dot{y}(rx - pz) + \dot{z}(py - qx),$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{v}$ in dieser Anordnung ein „Rechtssystem" oder ein „Linkssystem" bilden (s. „A. G.", § 48). Aber zufolge (8) gilt:

$$\pm 6T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = |\mathfrak{v}|^2 = v^2,$$

unter v den Betrag des Vektors $\mathfrak{v}$ verstanden. *Die drei Vektoren bilden also in der angegebenen Anordnung ein „Rechtssystem".*

Ist R der senkrechte Abstand des Punktes (x, y, z) vom Vektor $\mathfrak{u}$, so können wir das sechsfache Tetraedervolumen auch in der Gestalt:

$$6T = |\mathfrak{u}| \cdot R \cdot v$$

darstellen. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke von $6T$ ergibt:

$$(11) \qquad v = |\mathfrak{u}| \cdot R.$$

Die Geschwindigkeit v ist demnach zum Abstande R des Punktes (x, y, z) vom Vektor $\mathfrak{u}$ proportional, und ihre Richtung verläuft senkrecht zur Ebene, die durch $\mathfrak{u}$ und (x, y, z) festgelegt ist, und zwar in der Art, daß die durch $\mathfrak{v}$ angezeigte Drehung um $\mathfrak{u}$, vereint mit der Fortschrittsrichtung $\mathfrak{u}$, eine „Rechtsschraube" bildet. Der Geschwindigkeitszustand zur Zeit t ist also der, *daß der starre Körper im Augenblicke t eine Drehung der „Winkelgeschwindigkeit":*

$$(12) \qquad u = |\mathfrak{u}| = +\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

um die Achse $\mathfrak{u}$ im angegebenen Sinne ausführt. Die durch $\mathfrak{u}$ gegebene Gerade entspricht dem augenblicklichen Drehpole (ξ, η) der ebenen Bewegung und heißt die *„augenblickliche Drehachse"* oder *„Geschwindigkeitsachse"* zur Zeit t. Der Vektor $\mathfrak{u}$ legt nicht nur diese Drehachse fest, sondern liefert auch durch seine Länge und Pfeilrichtung die „Winkelgeschwindigkeit" und den „Drehsinn".

Da φ, ψ und ϑ als Funktionen der Zeit t als bekannt gelten, so geben die Gleichungen (9) auch p, q, r als Funktionen von t. Diese drei Gleichungen stellen demnach diejenige Raumkurve dar, die im Laufe der Zeit vom Endpunkte des Vektors $\mathfrak{u}$ im festen Koordinatensysteme beschrieben wird. Die Vektoren $\mathfrak{u}$ selbst bilden dabei einen Kegel mit O als Spitze, welcher der *„Weg der Geschwindigkeitsachse"* oder der *„instantanen Drehachse"* heißt oder auch kurz der *„feste Polkegel"* genannt werden möge. Der Punkt (p,q,r) hat zufolge (4) im beweglichen Systeme die Koordinaten:

$$p_0 = a_1 p + b_1 q + c_1 r, \qquad q_0 = a_2 p + b_2 q + c_2 r, \qquad r_0 = a_3 p + b_3 q + c_3 r,$$

welche unter Eintragung der Ausdrücke (2) und (9) die Gestalten:

$$(13) \quad p_0 = \sin\varphi \sin\vartheta \cdot \dot{\psi} + \cos\varphi \cdot \dot{\vartheta}, \quad q_0 = \cos\varphi \sin\vartheta \cdot \dot{\psi} - \sin\varphi \cdot \dot{\vartheta}, \quad r_0 = \dot{\varphi} + \cos\vartheta \cdot \dot{\psi}$$

annehmen. Diese Gleichungen stellen im bewegten Koordinatensysteme eine Raumkurve, die Kurve der Endpunkte des Vektors $\mathfrak{u}$, dar und liefern damit einen Kegel der Spitze O, welcher als der *„Weg der Geschwindigkeitsachse" im bewegten Koordinatensysteme* oder kurz als der *„bewegliche Polkegel"* bezeichnet wird.

Beide Kegel haben zur Zeit t den Vektor $\mathfrak{u}$ als gemeinsame Mantellinie. Um ihre Beziehung genauer festzustellen, differenzieren wir die eben für p_0, q_0, r_0 angegebenen Gleichungen nach t:

$$\dot{p}_0 = a_1\dot{p} + b_1\dot{q} + c_1\dot{r} + \dot{a}_1 p + \dot{b}_1 q + \dot{c}_1 r,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Da nun $\dot{a}_1, \dot{b}_1, \dot{c}_1$ die Geschwindigkeitskomponenten des im beweglichen Systeme bei $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0$ gelegenen Punktes zur Zeit t sind und die Richtung dieser Geschwindigkeit gegen $\mathfrak{u}$ einen Richtungsunterschied $\frac{\pi}{2}$ bildet, so ist:

$$\dot{a}_1 p + \dot{b}_1 q + \dot{c}_1 = 0,$$

und man findet durch Fortsetzung der Überlegung:

$$(14)\qquad \dot{p}_0 = a_1\dot{p} + b_1\dot{q} + c_1\dot{r}, \quad \dot{q}_0 = a_2\dot{p} + b_2\dot{q} + c_2\dot{r}, \quad \dot{r}_0 = a_3\dot{p} + b_3\dot{q} + c_3\dot{r}.$$

Die Ableitungen $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ erfahren also beim Übergange zum beweglichen Systeme dieselben Transformationen in die $\dot{p}_0, \dot{q}_0, \dot{r}_0$ wie die Koordinaten p, q, r selbst. Mit Benutzung der Relationen (5) können wir hieraus noch den Schluß ziehen:

$$(15)\qquad \dot{p}_0^2 + \dot{q}_0^2 + \dot{r}_0^2 = \dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2.$$

Geometrisch sind diese Ergebnisse so zu deuten, daß die beiden Kurven (9) und (13), die wir als *„feste"* bzw. *„bewegliche Polkurve"* bezeichnen wollen, und die unsere beiden aus den Vektoren $\mathfrak{u}$ aufgebauten Kegel beranden, zur Zeit t in ihrem gemeinsamen Punkte, dem Endpunkte des Vektors $\mathfrak{u}$, gleiche Tangenten haben: *Die beiden Polkegel „berühren" sich demnach zur Zeit t längs des Vektors* $\mathfrak{u}$. Im mechanischen Sinne sind $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ die Komponenten der Geschwindigkeit, mit der der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{u}$ auf dem festen Kegel fortschreitet. Sie ist gleich und gleichgerichtet mit der Geschwindigkeit, mit der der Vektorendpunkt auf dem beweglichen Polkegel voranschreitet. Damit haben wir das einfachste Bild der Bewegung gewonnen: *Die Bewegung des starren Körpers um den festbleibenden Punkt O vollzieht sich in der Weise, daß der bewegliche, mit dem starren Körper festverbundene Polkegel ohne Gleitung auf dem festen Polkegel abrollt.*

Als Beispiel betrachten wir die mit den Konstanten m, n, ε durch:

$$\varphi = mt, \qquad \psi = nt, \qquad \vartheta = \varepsilon$$

dargestellte Bewegung, welche als *„allgemeine Zykloidenbewegung"* oder *„reguläre Präzession"* bezeichnet wird. Die feste Polkurve hat hier die Gleichungen:

$$p = m \sin\varepsilon \cdot \sin nt, \qquad q = -m \sin\varepsilon \cdot \cos nt, \qquad r = m\cos\varepsilon + n,$$

die bewegliche aber:

$$p_0 = n \sin \varepsilon \cdot \sin mt, \qquad q_0 = n \sin \varepsilon \cdot \cos mt, \qquad r_0 = n \cos \varepsilon + m.$$

Die beiden Polkegel sind also einfach zwei gerade Kreiskegel, berandet durch zwei kreisförmige Polkurven. Fig. 128 erläutert den Fall:

$$m > 0, \quad n < 0, \quad m \cos \varepsilon > |n|,$$

woraus leicht $r_0 > r > 0$ folgt. Der bewegliche Polkegel rollt in der in der Figur angegebenen Richtung im Innern des festen ab, und man hat die sogenannte „*Hypozykloidenbewegung*" vor sich.

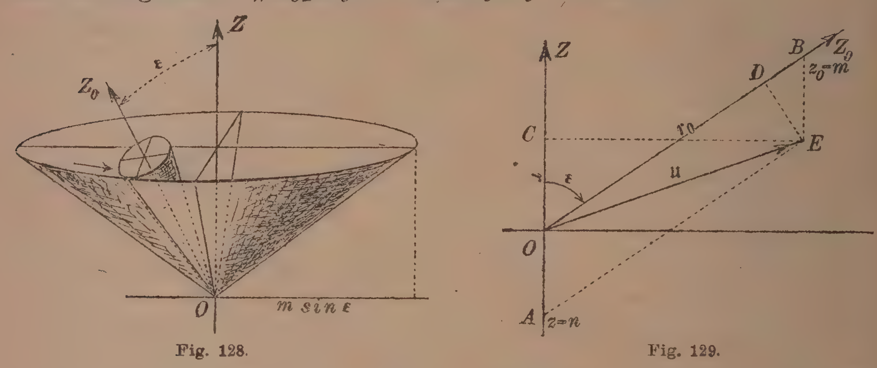


Fig. 128. Fig. 129.

Aufgaben: 1) Man zeige beim eben betrachteten Beispiele das Zutreffen folgender Regeln zur Konstruktion der Kegelachsen: Man markiere auf der z-Achse den Punkt A der Koordinate $z = n$ und auf der unter dem Winkel ε gegen die Achse OZ geneigten Achse OZ_0 den Punkt B der Koordinate $z_0 = m$ (s. Fig. 129). Die Diagonale OE des Parallelogramms $OAEB$ liefert den Vektor $\mathfrak{u}$, und dessen Projektionen auf die beiden Achsen OZ und OZ_0 ergeben die Kegelachsen $\overline{OC}$ und $\overline{OD}$.

2) Fig. 129 bezieht sich auf den vorhin betrachteten Fall $m > 0$, $n < 0$. Man untersuche etwa unter der Annahme eines spitzen Winkels ε auch die übrigen Zeichenkombinationen der Größen m und n und verfolge die Bewegung in den einzelnen Fällen.

8. Bewegung eines starren Körpers im Raume. Um endlich auch noch auf die allgemeinste stetige Bewegung eines starren Körpers im Raume einzugehen, wählen wir wieder ein im Raume festes und ein mit dem starren Körper fest verbundenes Koordinatensystem und behalten alle Bezeichnungen des vorigen Paragraphen bei. Auch hier sehen wir von der Forderung ab, daß beide Systeme etwa zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen.

An Stelle der Gleichungen (1) S. 377 treten jetzt die folgenden:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a_0 + a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3 z_0, \\ y = b_0 + b_1 x_0 + b_2 y_0 + b_3 z_0, \\ z = c_0 + c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3 z_0. \end{cases}$$

Die Darstellung der Bewegung wird dadurch erzielt, daß man a_0, b_0, c_0 als Funktionen der Zeit gibt und die neun übrigen Koeffizienten nach (2) S. 377 vermittelst der $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ als Funktionen von t darstellt. Die Relationen (3), (5) und (6) S. 377 ff. bleiben erhalten, an Stelle von (4) S. 378 aber tritt:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_0 = a_1(x - a_0) + b_1(y - b_0) + c_1(z - c_0), \\ y_0 = a_2(x - a_0) + b_2(y - b_0) + c_2(z - c_0), \\ z_0 = a_3(x - a_0) + b_3(y - b_0) + c_3(z - c_0). \end{cases}$$

Als Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes (x, y, z) zur Zeit t ergeben sich aus (1):

$$\dot{x} = \dot{a}_0 + \dot{a}_1 x_0 + \dot{a}_2 y_0 + \dot{a}_3 z_0, \quad \dot{y} = \dot{b}_0 + \dot{b}_1 x_0 + \cdots, \quad \dot{z} = \dot{c}_0 + \dot{c}_1 x_0 + \cdots.$$

Setzt man rechter Hand die Ausdrücke (2) für x_0, y_0, z_0 ein und zieht die in (7) S. 378 gegebenen Abkürzungen p, q, r wieder heran, so folgt:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dot{x} = \phantom{-qx + {}} - ry + qz + l, \\ \dot{y} = rx - pz + m, \\ \dot{z} = -qx + py + n, \end{cases}$$

wo l, m, n die Bedeutung haben:

$$l = \dot{a}_0 + rb_0 - qc_0, \qquad m = \dot{b}_0 - ra_0 + pc_0, \qquad n = \dot{c}_0 + qa_0 - pb_0$$

und die Komponenten der Geschwindigkeit desjenigen Punktes darstellen, der im betrachteten Augenblicke sich im Nullpunkte O des festen Systemes befindet. Das Quadrat der Geschwindigkeit v des Punktes (x, y, z) zur Zeit t bestimmt sich demnach zu:

$$(4)\qquad v^2 = (-ry + qz + l)^2 + (rx - pz + m)^2 + (-qx + py + n)^2.$$

Wir fragen nun, für welchen Punkt (x, y, z) bzw. für welche Punkte die Geschwindigkeit zur Zeit t am kleinsten ist, und welches das Minimum von v, das wir etwa v_1 nennen wollen, ist. Nach S. 250 ff. haben wir die drei partiellen Ableitungen des in (4) rechts stehenden Ausdrucks nach x, y und z gleich 0 zu setzen. Dies ergibt die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} &+ r(rx - pz + m) - q(-qx + py + n) = 0, \\ &- r(-ry + qz + l) + p(-qx + py + n) = 0, \\ &+ q(-ry + qz + l) - p(+rx - pz + m) = 0, \end{aligned}$$

von denen jede eine Folge der beiden anderen ist; wir können sie durch die dreigliedrige, *eine Gerade darstellende* Gleichung ersetzen:

$$(5)\qquad \frac{-ry + qz + l}{p} = \frac{rx - pz + m}{q} = \frac{-qx + py + n}{r}.$$

Setzen wir für irgend einen Punkt dieser Geraden den gemeinsamen Wert der drei Brüche (5) gleich σ:

$$(6)\qquad \begin{cases} \quad\; - ry + qz + l = \sigma p, \\ rx \quad\; - pz + m = \sigma q, \\ - qx + py \quad\; + n = \sigma r, \end{cases}$$

so folgt durch Multiplikation dieser Gleichungen mit p, q, r und Addition:

$$(7)\qquad lp + mq + nr = \sigma(p^2 + q^2 + r^2),$$

so daß σ, als von den x, y, z unabhängig, längs der ganzen Geraden einen und denselben Wert hat. Aus (6) ergibt sich demnach, wenn (ξ, η, ζ) irgend ein spezieller Punkt der Geraden ist, das Bestehen der Gleichungen:

$$-ry + qz = -r\eta + q\zeta, \quad rx - pz = r\xi - p\zeta, \quad -qx + py = -q\xi + p\eta$$

für alle Punkte (x, y, z) der Geraden. Sie geben, in:

$$(8)\qquad \frac{x-\xi}{p} = \frac{y-\eta}{q} = \frac{z-\zeta}{r}$$

umgerechnet, eine neue Darstellung der Geraden, von der wir demnach erkennen, daß ihre Richtungskosinus zu p, q, r proportional sind. Ziehen wir wieder den S. 379 eingeführten Vektor $\mathfrak{u}$ des Betrages $u = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ und der Richtungskosinus $\frac{p}{u}, \frac{q}{u}, \frac{r}{u}$ heran, der also vom Nullpunkte O nach dem Punkte der Koordinaten $x = p$, $y = q$, $z = r$ läuft, so können wir auch sagen, die Gerade (5) aller Punkte (x, y, z) mit der Minimalgeschwindigkeit v_1 sei dem Vektor $\mathfrak{u}$ parallel. Es stehen übrigens in (6) links die Komponenten $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ der Geschwindigkeit des Geradenpunktes (x, y, z):

$$\dot{x} = \sigma p, \qquad \dot{y} = \sigma q, \qquad \dot{z} = \sigma r,$$

woraus wir einmal entnehmen, daß v_1 dem Vektor $\mathfrak{u}$ gleichgerichtet oder entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem σ positiv oder negativ ist, und andrerseits mit Benutzung von (7) den Schluß ziehen:

$$v_1^2 = \sigma^2(p^2 + q^2 + r^2) = \frac{(lp + mq + nr)^2}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Zusammenfassend merken wir das Resultat an: *Die Punkte der dem Vektor $\mathfrak{u}$ parallel laufenden Geraden* (5) *bzw.* (8) *haben zur Zeit t die minimale Geschwindigkeit v_1; sie ist für alle Punkte der Geraden die gleiche und hat selbst die Richtung der Geraden. Wenn wir übrigens fortan v_1 nicht absolut nehmen, sondern durch:*

$$(9)\qquad v_1 = \frac{lp + mq + nr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

geben, so wird durch das positive Zeichen von v_1 angezeigt, daß v_1 die gleiche Richtung wie $\mathfrak{u}$ hat, durch das negative Zeichen aber, daß entgegengesetzte Richtungen von v_1 und $\mathfrak{u}$ vorliegen. Wir wollen auch die Minimalgeschwindigkeit v_1 nach Größe und Richtung durch einen Vektor $\mathfrak{v}_1$ darstellen, den wir im oben gewählten Punkte (ξ, η, ζ) angebracht denken, und der natürlich auf der Geraden (5) gelegen ist. Zur weiteren Benutzung merken wir dann noch die Gleichungen an:

$$(10) \qquad \pm|\mathfrak{v}_1| = v_1 = \frac{lp + mq + nr}{u} = \sigma u, \qquad \sigma = \frac{v_1}{u}$$

und notieren, da die Gleichungen (6) insbesondere für (ξ, η, ζ) gelten, als Darstellungen der l, m, n:

$$(11) \qquad \begin{cases} l = + r\eta - q\zeta + p\dfrac{v_1}{u}, \\ m = -r\xi + p\zeta + q\dfrac{v_1}{u}, \\ n = +q\xi - p\eta + r\dfrac{v_1}{u}. \end{cases}$$

Wir kehren jetzt zu einem beliebigen Raumpunkte (x, y, z) zurück, dessen Geschwindigkeitskomponenten (3) zur Zeit t unter Benutzung der eben angegebenen Ausdrücke für l, m, n so geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= - r(y-\eta) + q(z-\zeta) + v_1 \cdot \frac{p}{u}, \\ \dot{y} &= +r(x-\xi) - p(z-\zeta) + v_1 \cdot \frac{q}{u}, \\ \dot{z} &= -q(x-\xi) + p(y-\eta) + v_1 \cdot \frac{r}{u}. \end{aligned}$$

Jede dieser Komponenten läßt sich demnach aus zwei Summanden aufbauen:

$$(12) \qquad \dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2, \qquad \dot{y} = \dot{y}_1 + \dot{y}_2, \qquad \dot{z} = \dot{z}_1 + \dot{z}_2,$$

wobei die ersten Summanden $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ durch:

$$(13) \qquad \dot{x}_1 = v_1 \cdot \frac{p}{u}, \qquad \dot{y}_1 = v_1 \cdot \frac{q}{u}, \qquad \dot{z}_1 = v_1 \cdot \frac{r}{u}$$

gegeben sind, während die $\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$ die Gestalt haben:

$$(14) \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = - r(y-\eta) + q(z-\zeta), \\ \dot{y}_2 = +r(x-\xi) - p(z-\zeta), \\ \dot{z}_2 = -q(x-\xi) + p(y-\eta). \end{cases}$$

Die $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ sind einfach die Komponenten des Vektors $\mathfrak{v}_1$, während die $\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$ die Komponenten sind, wie sie bei einer reinen Drehung der Winkelgeschwindigkeit $u = |\mathfrak{u}|$ bzw. des Vektors $\mathfrak{u}$ um die Gerade (5)

auftreten (s. (8) S. 378). Durch Zusammensetzung der Translation des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}_1$ parallel zur Geraden (5) und der Drehung vom Vektor $\mathfrak{u}$ um dieselbe Gerade gewinnt man eine „*Schraubenbewegung*“ um diese Gerade als „*Schraubenachse*“. Damit ist der folgende Satz gewonnen: *Der Geschwindigkeitszustand des starren Körpers zur Zeit t ist so beschaffen, als führe der Körper um die „Schraubenachse“ (5) eine „Schraubenbewegung“ aus, wobei die Achse selbst mit der nach Größe und Richtung durch $\mathfrak{v}_1$ dargestellten Geschwindigkeit in sich verschoben wird, und der Körper sich zugleich um die Schraubenachse mit der durch $\mathfrak{u}$ nach Größe und Drehungssinn gegebenen Winkelgeschwindigkeit dreht.* Ist $\mathfrak{v}_1 = 0$, so handelt es sich um eine reine Drehung; hierfür ist also die Gleichung:

$$lp + mq + nr = 0$$

charakteristisch. Ist $\mathfrak{u} = 0$, so liegt eine reine Translation vor. Je nachdem $(lp + mq + nr)$ positiv oder negativ ist, sind die beiden Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}_1$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet; im ersten Falle haben wir eine „rechtsgängige“ Schraubenbewegung, im zweiten Falle liegt eine „linksgängige“ vor.

Die weitere Beschreibung der Bewegung des starren Körpers deuten wir nur noch kurz an. Wir wählen zunächst als besonderen Punkt (ξ, η, ζ) auf der Schraubenachse etwa den Fußpunkt des Lotes vom festen Nullpunkte auf diese Achse, der also durch die Ebene $px + qy + rz = 0$ auf der Achse ausgeschnitten wird. Da man durch Elimination von σ aus je zwei Gleichungen (6):

$$u^2 x - p(px + qy + rz) = nq - mr,$$
$$u^2 y - q(px + qy + rz) = lr - np,$$
$$u^2 z - r(px + qy + rz) = mp - lq$$

als eine Art der Darstellung der Schraubenachse ableitet, so ist der fragliche Punkt dieser Achse gegeben durch:

$$(15) \qquad \xi = \frac{nq - mr}{u^2}, \quad \eta = \frac{lr - np}{u^2}, \quad \zeta = \frac{mp - lq}{u^2}.$$

An Stelle von (8) können wir dann die Schraubenachse mittelst eines Parameters τ durch die drei Gleichungen geben:

$$x = \xi + \tau p, \qquad y = \eta + \tau q, \qquad z = \zeta + \tau r.$$

Indem wir aber $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ als Funktionen von t auffassen, erhalten wir in:

$$(16) \quad x = \xi(t) + \tau \cdot p(t), \quad y = \eta(t) + \tau \cdot q(t), \quad z = \zeta(t) + \tau \cdot r(t)$$

die dem allgemeinen Ansatze (8) S. 313 sich unterordnende Darstellung einer „Fläche“ mittelst zweier Parameter t und τ, einer Fläche, die aus

den gesamten Geraden besteht, welche im Laufe der Zeit Schraubenachsen werden; wir nennen diese Fläche den „*Weg der Schraubenachsen*“ *im festen Koordinatensysteme* oder kurz die „*feste Achsenfläche*“. Entsprechend liefern die Schraubenachsen in dem mit dem Körper beweglichen Systeme die „*bewegliche Achsenfläche*“.

Das Bild der Bewegung des starren Körpers aber ist dann das folgende: *Die bewegliche Achsenfläche berührt die feste in jedem Augenblicke t längs der zu diesem t gehörenden Schraubenachse; die bewegliche Fläche rollt längs der festen ab unter gleichzeitig eintretender Gleitung längs der berührenden Geraden.*

Als Beispiel betrachten wir die durch:

$$a_0 = e\cos\lambda t,\quad b_0 = e\sin\lambda t,\quad c_0 = 0,\quad \varphi = \mu t,\quad \psi = \lambda t,\quad \vartheta = \varepsilon$$

dargestellte Bewegung, unter e, λ, μ und ε Konstante verstanden. Man berechnet leicht:

$$p = \mu\sin\varepsilon\cdot\sin\lambda t,\quad q = -\mu\sin\varepsilon\cdot\cos\lambda t,\quad r = \lambda + \mu\cos\varepsilon,$$
$$l = e\mu\cos\varepsilon\cdot\sin\lambda t,\quad m = -e\mu\cos\varepsilon\cdot\cos\lambda t,\quad n = -e\mu\sin\varepsilon$$

und findet für die beiden Geschwindigkeiten u und v_1:

$$u = \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\mu\cos\varepsilon + \mu^2},\qquad v_1 = \frac{-e\lambda\mu\sin\varepsilon}{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\mu\cos\varepsilon + \mu^2}}.$$

Bei der Berechnung der Schraubenachse erscheint es zweckmäßig, die beiden Abkürzungen einzuführen:

$$\frac{e(\lambda\mu\cos\varepsilon + \mu^2)}{\lambda^2 + 2\lambda\mu\cos\varepsilon + \mu^2} = a,\qquad \frac{e(\lambda^2 + \lambda\mu\cos\varepsilon)}{\lambda^2 + 2\lambda\mu\cos\varepsilon + \mu^2} = a'.$$

Man findet dann nämlich aus (15) im festen Systeme für die allgemein mit ξ, η, ζ bezeichneten Koordinaten:

$$\xi = a\cos\lambda t,\qquad \eta = a\sin\lambda t,\qquad \zeta = 0$$

und leitet daraus weiter vermöge der Transformationsformeln (2) als Koordinaten des Punktes (ξ, η, ζ) im beweglichen Systeme ab:

$$\xi_0 = a'\cos\mu t,\qquad \eta_0 = -a'\sin\mu t,\qquad \zeta_0 = 0,$$

während sich die Komponenten des Vektors $\mathfrak{u}$ nach den Achsen des beweglichen Systems zu:

$$p_0 = \lambda\sin\varepsilon\cdot\sin\mu t,\qquad q_0 = \lambda\sin\varepsilon\cdot\cos\mu t,\qquad r_0 = \lambda\cos\varepsilon + \mu$$

berechnen. Die feste Achsenfläche hat die Gleichungen:

$$(17)\qquad \begin{cases} x = a\cos\lambda t + \tau\cdot\mu\sin\varepsilon\cdot\sin\lambda t, \\ y = a\sin\lambda t - \tau\cdot\mu\sin\varepsilon\cdot\cos\lambda t, \\ z = \tau(\lambda + \mu\cos\varepsilon), \end{cases}$$

die bewegliche Achsenfläche aber wird dargestellt durch:

$$(18)\qquad \begin{cases} x_0 = +\, a' \cos \mu t + \tau \cdot \lambda \sin \varepsilon \cdot \sin \mu t, \\ y_0 = -\, a' \sin \mu t + \tau \cdot \lambda \sin \varepsilon \cdot \cos \mu t, \\ z_0 = +\, \tau(\lambda \cos \varepsilon + \mu). \end{cases}$$

Um die Ergebnisse der Elimination von t und τ aus (17) und ebenso aus (18) kurz schreiben zu können, erklären wir neben den Konstanten a und $a' = e - a$ noch die Abkürzung:

$$c = \frac{a(\lambda + \mu \cos \varepsilon)}{\mu \sin \varepsilon} = \frac{a'(\lambda \cos \varepsilon + \mu)}{\lambda \sin \varepsilon} = \frac{e}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{(\lambda + \mu \cos \varepsilon)(\lambda \cos \varepsilon + \mu)}{\lambda^2 + 2\lambda\mu \cos \varepsilon + \mu^2}.$$

Dann ergeben sich als Gleichungen der beiden Achsenflächen:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}{(e-a)^2} - \frac{z_0^{\,2}}{c^2} = 1,$$

so daß wir mit zwei „*Rotationshyperboloiden*" zu tun haben. Es handelt sich hierbei um einen in der Kinematik sehr bekannten, in der Theorie der Zahnräder verwendungsfähigen Bewegungsvorgang.

